Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Российский университет дружбы народов
Математический Фонд Крыма

Сборник материалов международной конференции

КРОМШ-2019

XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум
по спектральным и эволюционным задачам

Симферополь
«Полипринт»
2019

УДК 517.9:519.2
С 23

Печатается по решению Организационного комитета XXX Крымской Осенней Математической Школы-симпозиума по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2019).

Ответственный за выпуск:

Копачевский Николай Дмитриевич, председатель Организационного комитета КРОМШ-2019, д.ф.-м.н., профессор.

Ответственный редактор:

Войтицкий Виктор Иванович, к.ф.-м.н., доцент.

Редакционная коллегия:

Копачевский Н.Д., Муратов М.А., Скубачевский А.Л., Шкаликов А.А., Войтицкий В.И., Пашкова Ю.С., Плохая Е.В., Старков П.А.

С 23 Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019: ПОЛИПРИНТ, 2019. – 328 с.

ISBN 978-5-6043331-6-7

В сборнике представлены материалы работ участников международной конференции “Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2019)”, посвященных различным направлениям исследований в области математического и функционального анализа, численного анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей, оптимального управления, теории игр, математического моделирования, дискретной математики и методики преподавания.

В книге сохранена авторская редакция статей, выполнено лишь частичное техническое редактирование; в связи с этим редакционная коллегия не несет ответственности за возможные неточности.

Материал, представленный в сборнике, может быть полезен научным сотрудникам, работникам высшего образования, аспирантами студентам.

УДК 517.9:519.2

ISBN 978-5-6043331-6-7

непустое множество.

Определение. Если $a_{ki} > 0$, признак k называется доминантным, а признак i рецессивным.

Допустим, что совокупность всех признаков разбита на два непересекающихся класса I и II так, что любой индивид из класса I доминирует над любым индивидом из класса II.

Теорема 2. В процессе эволюции все признаки из класса II начинают исчезать, т.е. для любого $k \in II$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0.$$

К начальной биологической системе добавим один или несколько дополнительных признаков $m+1, m+2, ..., m+p$ так, чтобы индивиды с этим признаком доминировали над любым индивидом из класса I и были рецессивны по отнощению любого индивида из класса II. Совокупность этих признаков обозначим через III. Можно ли коэффициенты наследственности подобрать так, чтобы III класс мог спасти II класс от исчезновения.

В простейшем случае рассмотрим два признака, один из которых доминирует над другим.

Теорема 3. В этом случае всегда существует третий признак, который спасёт второй признак от исчезновения, причем коэффициенты наследственности могут быть любыми.

Естественно, с увеличениям m задача становится более содержательной и трудной. Нами получено полное исследование задачи при $m = 5$.

Список литературы

[1] Ganikhodzhaev R.N., Eshmatova D.B. On the structure and properties of charts of fixed points of quadratic stochastic operators of Volterra type. (Russian) Uzbek. Mat. Zh. No. 5-6 (2000), 7-11.

[2] Ganikhodzhaev R.N. A chart of fixed points and Lyapunov functions for a class of discrete dynamical systems. Math. Notes 56(5-6) (1994), 1125-1131.

[3] Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories. Vladikavkaz. Mat. Zh. 8(2) (2006), 12-28 (in Russian).

[4] Ganikhodzhaev R.N., Abdirakhmanova R.E. Description of quadratic automorphisms of a finite-dimensional simplex. (Russian) Uzbek.Mat. Zh. No. 1 (2002), 7-16.

УДК: 517+531.01

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

Шамолин М. В.

доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, МГУ имени М. В. Ломоносова (Российская Федерация, Москва)

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем нечетного порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладким многообразиям. При этом силовое поле обладает диссипацией разного знака и обобщает ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

CERTAIN INTEGRABLE ODD-ORDER DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION

Shamolin M. V.

DSci, Full Professor, Leading Scientist, Lomonosov Moscow State University (Russian Federation, Moscow)

Integrability is shown for some classes of odd-order dynamic systems homogeneous in variables, in which a system on the tangent bundle of smooth manifolds is separated. Here, the force fields possess the dissipation of alternating signs and generalize the fields considered earlier.

Keywords: dynamical system, dissipation, integrability, transcendental first integral.

1. Системы седьмого порядка при отсутствии внешнего силового поля

Пусть v, α, β ($\beta = (\beta_1, \beta_2)$), z ($z = (z_1, z_2, z_3)$) — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z, с коэффициентами, зависящими от α, β. Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = vdt$, $d/dq =<'>$, $v \neq 0$), будем рассматривать систему седьмого порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha), \\ Z_3' = \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) Z_2^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' = \left[2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_3 - \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = \left[2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_3 - \left[2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_1 Z_2 - \\ - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_2 f_1(\alpha),\ \beta_2' = -Z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1),\ \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta'(\alpha), \end{cases} \tag{2}$$

$Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $z_k = Z_k v$, $k = 1, 2, 3$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (1) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (2) в качестве независимой системы (с тремя степенями свободы) на шестимерном многообразии $N^6\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\} = TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ (касательном расслоении гладкого трехмерного многообразия $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$, см. также [1, 2]).

Рассмотрим структуру системы (2). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ многообразия $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$:

$$\begin{cases} \ddot\alpha + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, Z_2, Z_3 в касательном пространстве в виде

$$\dot\alpha = -Z_3,\ \dot\beta_1 = Z_2 f_1(\alpha),\ \dot\beta_2 = Z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \tag{4}$$

мы получаем соотношения на них в виде (ср. с системой (2))

$$\begin{aligned} Z_1' &= \left[2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_3 - \left[2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) Z_1 Z_2, \\ Z_2' &= \left[2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_3 - \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) Z_1^2, \\ Z_3' &= \Gamma_{11}^{\alpha} f_1^2(\alpha) Z_2^2 + \Gamma_{22}^{\alpha} f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) Z_1^2, \end{aligned} \tag{5}$$

при этом уравнения (3) почти всюду эквивалентны совокупности (4), (5), которая, прежде всего, присутствует в системе (2). В ней также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но они не нарушают консервативности, поскольку система (1), (2) обладает полным набором (пятью) гладких первых интегралов.

2. Введение внешнего силового поля и унимодулярные преобразования

Модифицируем систему (1), (2) при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geq 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ лишь в уравнение на Z_3' системы (6), (7) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \tag{6}$$

$$
\begin{cases}
\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha),\\
Z_3' = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_2^2 + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z),\\
Z_2' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_3 - \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z),\\
Z_1' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_3 - \left[2\Gamma_2(\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) Z_1 Z_2 -\\
- Z_1\Psi(\alpha, Z),\\
\beta_1' = Z_2 f(\alpha),\ \beta_2' = Z_1 f(\alpha) g(\beta_1),
\end{cases} \tag{7}
$$

$$
\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha),\ \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)},
$$

$\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', Z_2', Z_3' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$, а во второй строке — коэффициенты из уравнения на α'. Совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geq 0$, $\mu \in \mathbf{R}$) будут иметь вид

$$
U\begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} -\delta'(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},
$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию разного знака.

3. Интегрирование системы седьмого порядка с диссипацией

Перейдем к интегрированию системы седьмого порядка (6), (7), которая допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка. Введем также ограничение и на функцию $f(\alpha)$:

$$
2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{8}
$$

Для полного интегрирования системы (7) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных $Z_1, Z_2 \to Z_0, Z_*$, $Z_0 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$, $Z_* = Z_2/Z_1$, система (7) распадается следующим образом:

$$
\begin{cases}
\alpha' = -Z_3 + b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha),\ Z_3' = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_0^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z),\\
Z_0' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_0 Z_3 - Z_0\Psi(\alpha, Z),
\end{cases} \tag{9}
$$

$$
Z_*' = \pm Z_0\sqrt{1 + Z_*^2} f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right],\ \beta_1' = \pm\frac{Z_0 Z_*}{\sqrt{1 + Z_*^2}} f(\alpha), \tag{10}
$$

$$
\beta_2' = \pm\frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1), \tag{11}
$$

$$
\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha),\ \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)}.
$$

Для полной интегрируемости системы (7) достаточно указать два независимых интеграла системы (9), один — системы (10), и интеграл, “привязывающий” уравнение (11) (т.е. всего четыре).

Теорема 1. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства*

$$
\Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|,\ F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{12}
$$

Тогда система (6), (7) при выполнении свойства

$$
2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) \equiv 0, \tag{13}
$$

и (8) обладает пятью независимыми (вообще говоря, трансцендентными в смысле комплексного анализа) первыми интегралами.

В частности, при $\kappa = -1$ первый интеграл выглядит как

$$\Theta_1(Z_3, Z_0; \alpha) = G_1\left(\frac{Z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_0}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{Z_3^2 + Z_0^2 - b_1\lambda\mu Z_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{Z_0\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \quad (14)$$

При помощи интеграла (14) получается и дополнительный первый интеграл для системы (7), который имеет следующий структурный вид [3, 4]:

$$\Theta_2(Z_3, Z_0; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{Z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_0}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \quad (15)$$

Первый интеграл для независимой (после преобразований) подсистемы (10) будет иметь вид

$$\Theta_3(Z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + Z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \mathrm{const},\ \Phi(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{01}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \quad (16)$$

А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (11), находится из равенства

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2, C_3) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\frac{g(b)}{C_3^2\Phi^2(b) - 1}\,db = C_4 = \mathrm{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо C_3 можно подставить левую часть (16) [4, 5].

Кроме того, у системы (6), (7) существует гладкий первый интеграл, “привязывающий” уравнение (6)), который, например, при $b = b_1$, $\mu = 1$ примет вид: $\Theta_0(v; Z_3, Z_0; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_3\delta(\alpha) + b^2(Z_3^2 + Z_0^2)) = C_0 = \mathrm{const}$.

Справедлива и теорема, обратная к теореме 1.

Теорема 2. *Условия (13), (8), (12) (например, при $\kappa = -1$) являются необходимыми условиями существования первого интеграла (14) для системы (6), (7).*

Список литературы

[1] Shamolin M.V. Comparison of Jacobi-integrable cases of the plane and three-dimensional motion of a body in a medium in the case of jet flow / M. V. Shamolin // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2005. – V. 69, No. 6. – P. 900–906.

[2] Shamolin M.V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium / M. V. Shamolin // Journal of Mathematical Sciences. – 2002. – V. 110, No. 2. – P. 2528–2557.

[3] Shamolin M.V. New cases integrable according to Jacobi in the dynamics of a solid body placed into fluid flow / M. V. Shamolin // Doklady Physics. – 1999. – V. 44, No. 2. – P. 110–113.

[4] Shamolin M.V. Variety of integrable cases in dynamics of low- and multi-dimensional rigid bodies in nonconservative force fields / M. V. Shamolin // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V. 204, No. 4. – P. 379–530.

[5] Шамолин М.В. Пространственные топографические системы пуанкаре и системы сравнения / М. В. Шамолин // Успехи математических наук. – 1997. – Т. 52, вып. 3. – С. 177–178.

MSC2010: 37C10

HYPERCHAOTIC ATTRACTOR IN A MAP WITH CHANGING STRUCTURE

Barabash Nikita, Belykh Vladimir

Volga state university of water transport, Lobachevsky State University (Russia, Nizhny Novgorod)

E-mail: barabash@itmm.unn.ru

Certain mappings with a variable structure are considered. A logistic mapping in which regular and chaotic modes alternate during iterations is studied. For a multidimensional map, the change of which is determined by an external master map, the existence of a hyperchaotic attractor is analytically proved.

Keywords: attractor, mapping, hyperchaos, skew product.

The mappings with a changing structure considered in the paper are given by equations with discrete time of the form

$$x(i + 1) = F(x(i), u(i)), \quad (1)$$