ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, *том* 487, № 4, *с.* 33–38

МЕХАНИКА

УДК 531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 04.04.2019 г.

Поступило 05.04.2019 г.

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем седьмого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к трёхмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл.

DOI:

Определить наличие в системе диссипации бывает довольно затруднительно. Это может быть сделано следующим образом: вполне определённые коэффициенты в уравнениях указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях — на подкачку энергии. Последнее приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), выражающихся через гладкие функции.

Препятствием к наличию полного набора гладких первых интегралов в системе могут быть притягивающие или отталкивающие предельные множества. При их обнаружении необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всём фазовом пространстве автономных первых интегралов [1].

В ряде случаев в динамике систем с диссипацией (того или иного знака) если и удаётся найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями, имеющими существенно особые точки. Поэтому полученные в данной работе результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил. Во множестве работ автора уже затрагивалась данная тематика (см., например, [2, 3]).

1. Замечания к системам третьего и пятого порядков. Пусть v, α, z — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z (см. также [4]). Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = v dt$, $\frac{d}{dq} = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), ранее изучалась система третьего порядка

$$\begin{gathered} v' = \Psi(\alpha, Z)v, \quad \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -bZ^2\delta'(\alpha), \end{gathered} \tag{1}$$

$z = Zv$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как система при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение на v отделяется, что даёт возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ [5].

Система (1) имеет два гладких первых интеграла. Независимая же подсистема на $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл (см. также [4, 6]). Добавляя в систему (1) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при $b > 0$

$$\begin{gathered} v' = \Psi(\alpha, Z)v, \quad \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{gathered}$$

создаётся впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b = 0$ [2, 3]). Действительно, при некотором условии у неё существует гладкий первый интеграл, структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет. Более того, если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$, дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих предельных множеств) [7].

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

**E-mail*: *shamolin@rambler.ru*; *shamolin@imec.msu.ru*

Аналогичным образом рассматриваются системы пятого порядка на многообразии с ненулевыми коэффициентами связности Γ^i_{jk}:

$$v' = \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v,$$
$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha),$$
$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha),$$
$$Z_2' = \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha, \beta)f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$
$$Z_1' = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$
$$\beta' = Z_1 f(\alpha),$$

$z_k = Z_k v$, $k = 1, 2$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha), f(\alpha)$ — некоторые гладкие функции, как системы при отсутствии внешнего поля сил. В них также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системе (1), данные коэффициенты не нарушают консервативности, поскольку данные системы обладают полным набором (четырьмя) гладких первых интегралов.

2. Системы седьмого порядка при отсутствии внешнего силового поля. Пусть v, α, β $(\beta = \beta_1, \beta_2))$, z $(z = z_1, z_2, z_3))$ — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z (см. также [8]) с коэффициентами, зависящими от α, β. Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q $\left(dq = vdt, \dfrac{d}{dq} = \langle'\rangle, v \neq 0\right)$, будем рассматривать систему седьмого порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v,$$
$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta'(\alpha), \tag{2}$$

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha),$$
$$Z_3' = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha, \beta)f_1^2(\alpha)Z_2^2 + {}$$
$$+ \Gamma^\alpha_{22}(\alpha, \beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z),$$
$$Z_2' = \left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_2Z_3 - {}$$
$$- \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \tag{3}$$
$$Z_1' = \left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_1Z_3 - {}$$
$$- \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1(\alpha)Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),$$
$$\beta_1' = Z_2 f_1(\alpha),$$
$$\beta_2' = -Z_1 f_2(\alpha)g(\beta_1),$$

$Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $z_k = Z_k v$, $k = 1, 2, 3$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha), f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (2) отделяется, что даёт возможность рассматривать уравнения (3) в качестве независимой системы (с тремя степенями свободы) на шестимерном многообразии $N^6\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\} = TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ (касательном расслоении гладкого трёхмерного многообразия $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$, см. также [2, 7, 8]).

Рассмотрим структуру системы (3). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^3\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ многообразия $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ [9] (в частности, сферы или поверхностей вращения с шестью или девятью ненулевыми коэффициентами связности):

$$\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha, \beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha, \beta)\dot\beta_2^2 = 0,$$
$$\ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha, \beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta)\dot\beta_2^2 = 0, \tag{4}$$
$$\ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha, \beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0.$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, Z_2, Z_3 в касательном пространстве в виде

$$\alpha' = -Z_3, \quad \beta_1' = Z_2 f_1(\alpha), \quad \beta_2' = -Z_1 f_2(\alpha)g(\beta_1), \tag{5}$$

мы получаем соотношения на них в следующем виде (ср. с системой (3)):

$$Z_1' = \left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_1Z_3 - {}$$
$$- \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1(\alpha)Z_1Z_2,$$
$$Z_2' = \left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_2Z_3 - {} \tag{6}$$
$$- \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)Z_1^2,$$
$$Z_3' = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha, \beta)f_1^2(\alpha)Z_2^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha, \beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)Z_1^2,$$

при этом уравнения (4) почти всюду эквивалентны совокупности (5), (6), которая, прежде всего, присутствует в системе (3).

В системе (3) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системе (1), они не нарушают консервативности, поскольку система (2), (3) обладает полным набором (пятью) гладких первых интегралов.

Предложение 1. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha, \beta)f_1^2(\alpha) \equiv 0,$$
$$2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha, \beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1) \equiv 0, \tag{7}$$
$$\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1^2(\alpha) + {}$$
$$+ \Gamma^1_{22}(\alpha, \beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1) \equiv 0,$$

то система (2), (3) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(v; Z_3, Z_2, Z_1) = \\ = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) = C_1^2 = \text{const}. \qquad (8)$$

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы (7) для условий наличия аналитического интеграла (8) для системы (5), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией вся группа условий (7) нам не потребуется. Тем не менее в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (5) выполнение равенств

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha), \qquad (9)$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из (7):

$$2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) \equiv 0. \qquad (10)$$

Таким образом, функция $g(\beta_1)$ зависит от коэффициентов связности, а вот ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 2. *Если выполнены свойства* (9), (10), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \qquad (11)$$

то система (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\,\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \qquad (12)$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ *должна удовлетворять равенству*

$$\delta(\alpha) = A_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}, \quad A_1 = \text{const} \qquad (13)$$

Предложение 3. *Если выполнено свойство* (9), *при этом справедливо условие*

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \qquad (14)$$

а также второе равенство из (11) ($\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha)$) *и* (13), *то система* (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(v; Z_1; \alpha, \beta_1) = v^2 Z_1\delta(\alpha)\Phi(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \qquad (15)$$

$$\Phi(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Предложение 4. *Пусть выполнено свойство* (9) *и*

$$\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \qquad (16)$$

Тогда система (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_0(v; Z_3; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_3\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}, \qquad (17)$$

если функция $\delta(\alpha)$ *удовлетворяет равенству*

$$\delta(\alpha) = A_2\exp\left\{-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_3(b)f^2(b)db\right\}, \quad A_2 = \text{const}.$$

В частности, если выполнены свойства (7), (9), (11), (13), (16), то система (2), (3) имеет гладкий первый интеграл вида (17).

Предложение 5. *Если выполнены условия* (9)–(11), (13), *то система* (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_4(\beta_1, \beta_2, C_2, C_3) = \\ = \beta_2 + \int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\frac{C_3^2 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}}db = C_4 = \text{const}, \qquad (18)$$

где, после взятия интеграла (18) *вместо постоянных* C_2, C_3 *можно подставить левые части равенств* (12), (15) *соответственно*.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (7), (9)–(11), (13), (16), *то система* (2), (3) *обладает полным набором* (*пятью*) *гладких независимых первых интегралов вида* (8), (12), (15), (17), (18).

3. Введение внешнего силового поля. Модифицируем систему (2), (3) при условиях (9)–(11), (14), (16) при наличии двух ключевых параметров b, $b_1 \geq 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ лишь в уравнение на Z_3' системы (19), (20) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \\ \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \qquad (19)$$

$$
\begin{gathered}
\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha),\\
\tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)},\\
Z_3' = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_2^2 + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_1^2 -\\
- Z_3\Psi(\alpha, Z),\\
Z_2' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2 Z_3 -\\
- \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z),\\
Z_1' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_3 -\\
- \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),\\
\beta_1' = Z_2 f(\alpha),\\
\beta_2' = -Z_1 f(\alpha) g(\beta_1),
\end{gathered} \tag{20}
$$

$\mu = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', Z_2', Z_3' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$, а во второй строке — коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра b, $b_1 \ge 0$, μ) будет иметь вид

$$
U\begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\delta'(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},
$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$ и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [2, 3, 8]).

4. Интегрирование системы с диссипацией. Перейдём теперь к интегрированию искомой системы седьмого порядка (19), (20) при выполнении свойства (10). Она также допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка.

Введём также (по аналогии с (10)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (7):

$$
2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{21}
$$

Для полного интегрирования системы (20) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$
Z_1, Z_2 \to Z_0, Z_*, \; Z_0 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}, \; Z_* = \frac{Z_2}{Z_1},
$$

система (20) распадается следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\alpha' = -Z_3 + b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha),\\
Z_3' = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) Z_0^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z),\\
Z_0' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_0 Z_3 - Z_0\Psi(\alpha, Z),
\end{gathered} \tag{22}
$$

$$
\begin{gathered}
Z_*' = (\pm) Z_0 \sqrt{1 + Z_*^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right],\\
\beta_1' = (\pm)\frac{Z_0 Z_*}{\sqrt{1 + Z_*^2}} f(\alpha),
\end{gathered} \tag{23}
$$

$$
\beta_2^{\bullet} = (\pm)\frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1), \tag{24}
$$

$$
\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha).
$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (20) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (22), один — системы (23), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (24) (т.е. всего четыре).

Теорема 2. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$
\Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|; \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{25}
$$

Тогда система (19), (20) *при выполнении свойств* (10), (21) *обладает пятью независимыми* (*вообще говоря, трансцендентными* [10] *в смысле комплексного анализа*) *первыми интегралами*.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\kappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов таков:

$$
\begin{gathered}
\Theta_1(Z_3, Z_0; \alpha) = G_1\left(\frac{Z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_0}{\delta(\alpha)}\right) =\\
= \frac{Z_3^2 + Z_0^2 - b_1\lambda\mu Z_3 \delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{Z_0 \delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}.
\end{gathered} \tag{26}
$$

При помощи интеграла (26) получается и дополнительный первый интеграл для системы (20), который имеет следующий структурный вид:

$$
\begin{gathered}
\Theta_2(Z_3, Z_0; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{Z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_0}{\delta(\alpha)}\right) =\\
= C_2 = \mathrm{const}.
\end{gathered} \tag{27}
$$

Выражение первого интеграла (27) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\kappa = -1$

этот первый интеграл найдётся из уравнения Бернулли

$$\frac{d\delta}{du_3} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_3)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_3) + u_3^2) - b_1\lambda\delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u_3 + u_3^2 - U^2(C_1, u_3)},$$

$$U(C_1, u_3) = \frac{\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1\lambda\mu u_3 + u_3^2)}\}}{2},$$

$$u_3 = \frac{Z_3}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (26).

Первый интеграл для независимой (после замены независимого переменного) подсистемы (23) будет иметь вид

$$\Theta_3(Z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + Z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}, \tag{28}$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (15). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (24), находится по аналогии с (18):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2, C_3) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3^2\Phi^2(b) - 1}} db = C_4 = \text{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо C_3 можно подставить левую часть равенства (28).

Кроме того, у системы (19), (20) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (17), “привязывающий” уравнение (19)), который, например, при $b = b_1$, $\mu = 1$ примет вид

$$\Theta_0(v; Z_3, Z_0; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_3\delta(\alpha) + b^2(Z_3^2 + Z_0^2)) = C_0 = \text{const}.$$

Справедлива и теорема, обратная к теореме 2.

Теорема 3. *Условия* (10), (21), (25) (*например, при* $\kappa = -1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (26) *для системы* (19), (20).

5. Строение первых интегралов для систем с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (19), (20) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [8, 9]. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (2), (3). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (8), (12). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (19), (20) при втором условии из (25) обладает первым интегралом вида

$$\Xi_0(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \text{const}. \tag{29}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (29), (12) также является первым интегралом системы (19), (20) при неравенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Xi_{b_1}(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - b_1\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)) \tag{30}$$

и (12) по отдельности не является первым интегралом системы (19), (20). Однако отношение функций (30), (12) является первым интегралом (26) системы (19), (20) (при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. также [1–3]).

5. Заключение. Выделим существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на трёхмерной сфере, и $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \delta(\alpha) = \sin\alpha. \tag{31}$$

Случай (31) формирует класс систем (19), (20) при $\mu = 1$, соответствующих движению четырёхмерного динамически симметричного твёрдого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил [8, 9]. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на трёхмерной сфере. В случае (31), если $\delta(\alpha) = \dfrac{F(\alpha)}{\cos\alpha}$, то система описывает движение четырёхмерного твёрдого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [8]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система эквивалентна обобщённому (сферическому) четырёхмерному маятнику, помещённому в некоторое неконсервативное поле, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то почти всегда рассматриваемая система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является “собственно” диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 2 и 3) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости многомерных диссипативных систем в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 168–172.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 1–6.
4. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // ПММ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
5. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. В. 1. С. 3–67.
6. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
7. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. математика. 2010. Т. 16. В. 4. С. 3–229.
8. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2013. С. 5–254.
9. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // ДАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.
10. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

NEW CASES OF INTEGRABLE SEVENTH-ORDER SYSTEMS WITH DISSIPATION

M.V. Shamolin,

The paper shows the integrability of certain classes of seventh-order dynamic systems that are homogeneous in part, in which the system on the tangent bundle to three-dimensional manifolds is distinguished. In this case, the force fields have various dissipation and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral.