МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Материалы международной конференции,
посвящённой 80-летию академика РАН В. А. Садовничего

Том I

CONTEMPORARY PROBLEMS OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Proceedings of the international conference dedicated
to the 80th anniversary of academician V. A. Sadovnichy

Volume I

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2019

УДК 517
ББК 22.162:22.193
С56

DOI 10.29003/m978-5-317-06111-1

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) по проекту 19-01-20097 и попечительского Совета МГУ имени М. В. Ломоносова

С56 **Современные проблемы математики и механики.** Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. – Москва : МАКС Пресс, 2019.

ISBN 978-5-317-06133-3 e-ISBN 978-5-317-06111-1

Том I. – 436 с.

ISBN 978-5-317-06134-0

Книга составлена из коротких заметок, в которых представлены результаты исследований участников международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. В книге представлены 5 направлений математики и механики, в которых активно работал В. А. Садовничий. Эти направления совпадают с названиями секций конференции.

1. Теория операторов и функциональный анализ.
2. Дифференциальные уравнения.
3. Теория функций и вычислительная математика.
4. Геометрия и математическая физика.
5. Механика и математическое моделирование.

Книга состоит из 2-х томов. В первом томе представлены заметки, относящиеся к секциям 1–2, во втором томе – заметки, представленные в секциях 3–5.

Представленные в заметках результаты излагаются в авторской редакции. Книга предназначена для преподавателей, научных сотрудников и аспирантов и имеет цель ознакомления с современным состоянием научных исследований, проводимых в России и за рубежом по указанным направлениям.

Ключевые слова: теория операторов, спектральная теория, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, теория функций, математическая физика, механика, математическое моделирование.

ISBN 978-5-317-06134-0 (Т. I)
ISBN 978-5-317-06133-3

Организационный комитет конференции
Председатель: В.Н. Чубариков
Заместители председателя: Т.П. Лукашенко, А.Т. Фоменко, А.А. Шкаликов
Члены комитета: В.В. Александров, Е.Д. Алферова, А.И. Аптекарев, А.А. Владимиров, В.В. Власов, А.А. Левин, Е.С. Карулина, И.С. Ломов, А.Н. Попов, Т.В. Родионов, А.М. Савчук, А.П. Солодов, Я.Т. Султанаев, Д.В. Трещев

Программный комитет конференции
Председатель: В.Н. Чубариков
Заместители председателя: А.И. Шафаревич, А.А. Шкаликов
Члены комитета: Д.В. Георгиевский, В.Н. Денисов, А.О. Иванов, И.С. Ломов, Т.П. Лукашенко, А.М. Савчук, А.С. Шамаев

Organizing Committee
Chairman: V.N. Chubarikov
Vice chairmen: T.P. Lukashenko, A.T. Fomenko, A.A. Shkalikov
Members: V.V. Alexandrov, E.D. Alferova, A.I. Aptekarev, A.A. Vladimirov, V.V. Vlasov, A.A. Levin, E.S. Karulina, I.S. Lomov, A.N. Popov, T.V. Rodionov, A.M. Savchuk, A.P. Solodov, Ya.T. Sultanaev, D.V. Treschev

Program Committee
Chairman: V.N.Chubarikov
Vice chairmen: A.I. Shafarevich, A.A. Shkalikov
Members: D.V. Georgievskii, V.N. Denisov, A.O. Ivanov, I.S. Lomov, T.P. Lukashenko, A.M. Savchuk, A.S. Shamaev

Литература

1. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. — Москва: Наука, 1991.

2. *Crandall M., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton Jacobi equations. // Trans. Amer. Math. Soc., **277**:1 (1983), 1-42.

3. *Hopf E.* Generalized solutions of nonlinear equations of first order // J. Math. Mech., **14** (1965), 951-973.

4. *Bardi M., Evans L.* On Hopf's formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations // Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Appl., **8**:11 (1984), 1373-1381.

5. *Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика, **2** (1970), 54-63.

6. *Субботин А.И., Шагалова Л.Г.* Кусочно-линейное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби // Доклады Академии Наук, **325**:5 (1992), 144-148.

7. *Shagalova L.G.* A piecewise linear minimax solution of the Hamilton – Jacobi equation // Kirillova F.M., Batukhtin V.D. (eds.) Proceedings of IFAC Conference on Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization. — Oxford: Pergamon, Elsevier Science, 1998. — 193-197.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ СО МНОГИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

М.В. Шамолин

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

УДК 517.9, 531.01

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля обладают переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл

Integrable dynamical systems with many degrees of freedom and dissipation

In this study, we show the integrability of certain classes of dynamic systems on the tangent bundle to a multi-dimensional manifold. In this case, the force fields have variable dissipation and generalize the cases considered previously.

Keywords: dynamical system, dissipation, integrability, transcendental first integral

Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Maxim V. Shamolin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

В задачах динамики изучаются системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. Выделим также задачи о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства.

Рассмотрим системы с n степенями свободы $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, $(z_n, \ldots, z_1)$ — квазискорости, наличие диссипации (знакопеременной) характеризует коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении, $F(\alpha)$ — внешнее силовое поле:

$$\begin{gathered}
\dot\alpha = -z_n + b\delta(\alpha),\\
\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z^2_{n-1} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_2^2 + \ldots\\
\ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\dot z_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_{n-1} z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z^2_{n-2} - \ldots\\
\ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \ldots,\\
\dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_2 z_n - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})\right] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4}) z_2 z_3 -\\
-\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_1 z_n - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} -\\
- \left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})\right] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) z_1 z_2,\\
\dot\beta_1 = z_{n-1} f(\alpha),\ \dot\beta_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1),\ \dot\beta_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \ldots,\\
\dot\beta_{n-1} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2});
\end{gathered} \tag{1}$$

здесь всевозможные Γ — коэффициенты связности фазового пространства, D — дифференцирование, функции $f, g, h, i, \ldots$ — гладкие.

Потребуем выполнение следующих равенств:

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) = \ldots = \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots =$$

$$= \Gamma_n(\alpha),\ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{2}$$

Для полного интегрирования системы (1) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$w_n = z_n,\ w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z^2_{n-1}},\ w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1},$$

$$w_{n-3}=\frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}},\ \ldots,\ w_1=\frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_2^{n-2}}},$$

система (1) распадается следующим образом:

$$\dot\alpha=-w_n+b\delta(\alpha),\ \dot w_n=F(\alpha)+\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2,$$

$$\dot w_{n-1}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]w_{n-1}w_n, \tag{3}$$

$$\dot w_s=\pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)\ldots\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s)+Dj(\beta_s)\right],$$

$$\dot\beta_s=\pm\frac{w_sw_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)\ldots,s=1,\ldots,n-2, \tag{4}$$

$$\dot\beta_{n-1}=\pm\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{5}$$

где в системе (4) символом "…" показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g,h,\ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (3)–(5) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3), по одному — для систем (4) (меняя в них независимые переменные; их $n-2$ штуки), и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (5) (т.е. всего $n+1$).

Теорема. *Пусть для некоторых $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$ выполняются равенства $\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)=\kappa d\ln|\delta(\alpha)|/d\alpha$, $F(\alpha)=\lambda d\delta^2(\alpha)/2d\alpha$. Тогда система (1) при выполнении условий (2) обладает полным набором $(n+1)$ независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

В частности, при $\kappa=-1$ система (3) имеет следующий первый интеграл:

$$\Theta_1(w_n,w_{n-1};\alpha)=\frac{w_n^2+w_{n-1}^2-bw_n\delta(\alpha)+\lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)}=C_1=\mathrm{const}.$$

Дополнительный первый интеграл для системы (3) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n,w_{n-1};\alpha)=G\left(\delta(\alpha),\frac{w_n}{\delta(\alpha)},\frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right)=C_2=\mathrm{const}$$

и при $\kappa=-1$ он найдется из квадратуры ($u_n=w_n/\delta(\alpha)$)

$$\ln|g(\alpha)|=\int\frac{(b-u_n)du_n}{2(\lambda-bu_n+u_n^2)-C_1\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_n^2-bu_n+\lambda)}\}/2}.$$

Первые интегралы для систем (4) имеют вид

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s)=\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)}=C_{s+2}=\mathrm{const},\ s=1,\ldots,n-2,$$

где $\Psi_s(\beta_s)$, $s=1,\ldots,n-2$, — некоторые гладкие функции. А дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (5), имеет вид

$$\Theta_{n+1}(w_2,w_1;\alpha,\beta)=\beta_{n-1}\pm\int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_ni(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b)-C_n^2}}\,db=C_{n+1}=\mathrm{const}.$$

Для систем с диссипацией трансцендентность функций как первых интегралов наследуется из наличия притягивающих предельных множеств.

Выделим важные случаи для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{7}$$

Случай (6) формирует системы, соответствующие движению динамически симметричного $(n+1)$-мерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле [1, 2]. Случай (7) формирует системы, соответствующие движению материальной точки на n-мерной сфере также в неконсервативном поле. В случае (6), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение $(n+1)$-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [3]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает обобщенный $(n+1)$-мерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Литература

1. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем., **16**:4 (2010), 3–229.

2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН, **479**:3 (2018), 270–276.

3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН, **474**:2 (2017), 177–181.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ БЕССЕЛЯ

Э.Л. Шишкина

ilina_ dico@mail.ru

УДК 517.9

В докладе рассматривается метод решения дифференциального уравнения с левосторонней дробной производной Бесселя, основанный на применении преобразования Мейера.

Ключевые слова: дробный оператор Бесселя, дробное дифференциальное уравнение, гипергеометрическая функция, преобразование Мейера

Шишкина Элина Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент, Воронежский Государственный Университет (Воронеж, Россия); Elina Shishkina (Voronezh State University, Voronezh, Russia)