ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 5, с. 49–53

МЕХАНИКА

УДК 531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ПЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 12.12.2018 г.

Поступило 13.12.2018 г.

Показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова:

DOI:

ВВЕДЕНИЕ

Дать общее определение динамической системы с имеющейся диссипацией довольно затруднительно. В каждом конкретном случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определённые коэффициенты в уравнениях указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на её подкачку. Последнее приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), выражающихся через гладкие функции.

Однако как только в системе обнаруживаются притягивающие или отталкивающие предельные множества, необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всём фазовом пространстве первых интегралов [1].

В некоторых случаях для систем с диссипацией, если и удаётся найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями, имеющими существенно особые точки. Полученные в работе результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Во множестве работ автора уже затрагивалась данная тематика (см., например, [2, 3]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

ЗАМЕЧАНИЯ К СИСТЕМАМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Пусть v, α, z — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы (для простоты, степени 2) по переменным v, z (см. также [4]). Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную $q\left(dq = v dt,\ \dfrac{d}{dq} = \langle ' \rangle\right)$, будем рассматривать систему третьего порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \quad \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha),$$
$$Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -bZ^2\delta'(\alpha), \qquad (1)$$

$z = Zv$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение на v отделяется, что даёт возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы с одной степенью свободы на двумерном многообразии $\mathrm{N}^2\{Z;\ \alpha\}$ [5].

Система (1) имеет два гладких первых интеграла:

$$\Phi_0(v;\ Z;\ \alpha) = v^2(1 - 2bZ\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const},$$
$$\Phi_1(v;\ Z) = vZ = C_1 = \text{const}.$$

Другими словами, независимая подсистема на $N^2\{Z;\ \alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида (см. также [4, 6])

$$\Phi(Z;\ \alpha) = \frac{1 - 2bZ\delta(\alpha)}{Z^2} = C = \text{const}.$$

Добавляя в систему (1) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при $b > 0$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: *shamolin@rambler.ru*

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \quad \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha),$$
$$Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z),$$

создаётся впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b = 0$ [2]). Действительно, при некотором условии у неё существует гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const},$$
$$F_1'(\alpha) = 2F(\alpha),$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии, но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет. Более того, если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$, дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих предельных множеств) [7].

СИСТЕМЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Пусть $v, \alpha, \beta, z_1, z_2$ — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z_1, z_2 (см. также [8]). Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную $q\left(dq = v dt,\ \dfrac{d}{dq} = \langle ' \rangle\right)$, будем рассматривать систему пятого порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v,$$
$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha), \tag{2}$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha),$$
$$Z_2' = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$
$$Z_1' = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_1Z_2 - \tag{3}$$
$$- Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$
$$\beta' = Z_1 f(\alpha),$$

$z_k = Z_k v, k = 1, 2, b \geq 0, \delta(\alpha), f(\alpha)$ — некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (2) отделяется, что даёт возможность рассматривать уравнения (3) в качестве независимой системы (с двумя степенями свободы) на четырёхмерном многообразии $N^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\} = TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ (касательном расслоении гладкого двумерного многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$, см. также [2, 8]).

Рассмотрим структуру системы (3). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\alpha, \beta; \alpha, \beta\}$ многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$, [9] (в частности, сферы или поверхностей вращения с двумя или тремя ненулевыми коэффициентами связности):

$$\begin{gathered}\alpha^{\cdot\cdot} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)\beta^{\cdot 2} = 0,\\ \beta^{\cdot\cdot} + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot} = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, Z_2 в касательном пространстве в виде

$$\alpha' = -Z_2, \quad \beta' = Z_1 f(\alpha), \tag{5}$$

мы получаем соотношения на них в виде (ср. с системой (3))

$$Z_1' = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_1Z_2,$$
$$Z_2' = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)f^2(\alpha)Z_1^2, \tag{6}$$

при этом уравнения (4) почти всюду эквивалентны совокупности (5), (6), которая прежде всего присутствует в системе (3).

Далее, в системе (3) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$, но, как и в системе (1), они не нарушают консервативности, поскольку система (2), (3) обладает полным набором (четырьмя) гладких первых интегралов.

Предложение 1. *Если всюду справедливо равенство*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)f^2(\alpha) + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \tag{7}$$

то система (2), (3) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(v; Z_2, Z_1) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2) = C_1^2 = \text{const}. \tag{8}$$

Предложение 2. *Если функция* $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)$ *является функцией лишь* α:

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{9}$$

то система (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(v; Z_1; \alpha) = v^2 Z_1\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{10}$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ *должна удовлетворять равенству*

$$\delta(\alpha) = A_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)db\right\}, \quad A_1 = \text{const}., \tag{11}$$

Если выполнено свойство (9) и функция $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)$ также является функцией лишь α: $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)$, то в системе (3) выделяется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трёх уравнений (уравнение на β' отделяется). В частности, если выполнены свойства (7), (9), то такая независимая подсистема выделяется.

Предложение 3. *Пусть функция* $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)$ *является функцией лишь* α: $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)$. *Тогда система* (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_2\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}, \quad (12)$$

если функция $\delta(\alpha)$ *удовлетворяет равенству*

$$\delta(\alpha) = A_2 \exp\left\{-\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(b)db\right\}, \quad A_2 = \text{const}.$$

В частности, если выполнены свойства (7), (9), (11), то система (2), (3) имеет гладкий первый интеграл вида (12).

Предложение 4. *Если выполнены условия* (7), (9), (11), *то система* (2), (3) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = \beta + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2^2 f(b)}{A_3 + bC_1^2\delta^2(b)}db = C_3 = \text{const}, \quad (13)$$

где после взятия интеграла (13), *вместо постоянных* C_1^2, C_2 *можно подставить левые части равенств* (8), (10), *соответственно* ($A_3 = \text{const}$).

Теорема 1. *Если выполнены условия* (7), (9), (11), *то система* (2), (3) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *гладких независимых первых интегралов вида* (8), (10), (12), (13).

ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Модифицируем систему (2), (3) при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geq 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z_2' системы (14), (15) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{gathered} v' = \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v, \\ \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta(\alpha), \end{gathered} \quad (14)$$

$$\begin{gathered} \alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)}, \\ Z_2' = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)f^2(\alpha)Z_1^2 - \\ - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ Z_1' = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_1Z_2 - \\ - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \beta' = Z_1 f(\alpha), \end{gathered} \quad (15)$$

$\mu = \text{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1',, Z_2' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$, а во второй строке — коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра b, $b_1 \geq 0$, μ) будут иметь вид

$$U\begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2) \\ b_1F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\delta'(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$ и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$,. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [2, 3, 8]).

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ

Перейдём теперь к интегрированию искомой системы пятого порядка (14), (15) при выполнении свойств (7), (9). Она также допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка.

Теорема 2. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$\begin{gathered} \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|; \\ F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \end{gathered} \quad (16)$$

Тогда система (14), (15) *при выполнении свойств* (7), (9) *обладает четырьмя независимыми* (*вообще говоря, трансцендентными* [10] *в смысле комплексного анализа*) *первыми интегралами*.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\kappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов таков:

$$\Theta_1(Z_2, Z_1; \alpha) = G_1\left(\frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = \\ = \frac{Z_2^2 + Z_1^2 - b_1\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{Z_1\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}, \tag{17}$$

При помощи интеграла (17) получаются и другие первые интегралы. При этом они имеют следующие структурные виды:

$$\Theta_2(Z_2, Z_1; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = \\ = C_2 = \text{const}, \tag{18}$$

$$\Theta_3(Z_2, Z_1; \alpha, \beta) = G_3\left(\delta(\alpha), \beta, \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = \\ = C_3 = \text{const}. \tag{19}$$

Выражение первых интегралов (18), (19) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\kappa = -1$ второй из интегралов системы (14), (15) найдётся из уравнения Бернулли

$$\frac{d\delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_2)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_2) + u_2^2) - b_1\lambda\delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2 - U^2(C_1, u_2)},$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2)}\right\}}{2},$$

$$u_2 = Z_2/\delta(\alpha).$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1^2 можно подставить левую часть равенства (17).

Кроме того, у системы (14), (15) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (12)), который, например, при $b = b_1$, $\mu = 1$ примет вид

$$\Phi_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_2\delta(\alpha) + b^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = \\ = C_0 = \text{const}.$$

Справедлива и теорема, обратная теореме 2.

Теорема 3. *Условия* (7), (9), (16) (*например, при* $\kappa = -1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (17) *для системы* (14), (15).

СТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (14), (15) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [8, 9]. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (2), (3). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (8), (10). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (14), (15) при втором условии из (16) обладает первым интегралом вида

$$\Xi_0(v; Z_2, Z_1; \alpha) = \\ = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \text{const}. \tag{20}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (20), (10) также является первым интегралом системы (14), (15) при неравенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Xi_{b_1}(v; Z_2, Z_1; \alpha) = \\ = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 - b_1\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)) \tag{21}$$

и (10) по отдельности не является первым интегралом системы (14), (15). Однако отношение функций (21), (10) является первым интегралом (17) системы (14), (15) (при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [1–3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выделим существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на двумерной сфере, и $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \delta(\alpha) = \sin\alpha. \tag{22}$$

Случай (22) формирует класс систем (14), (15) при $\mu = 1$, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твёрдого тела на нулевом уровне циклического интеграла в неконсервативном поле сил [8, 9]. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на двумерной сфере. В случае (22), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает пространственное движение твёрдого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [8]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система эквивалентна пространственному (сферическому) маятнику, помещённому в поток набегающей среды, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то почти всегда рассматриваемая система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является “собственно” диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теореме 2) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. 1998, Т. 53. В. 3. С. 209–210.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
4. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // ПММ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
5. *Арнольд В.И.*, *Козлов В.В.*, *Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
6. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
7. *Трофимов В.В.*, *Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. математика. 2010. Т. 16. В. 4. С. 3–229.
8. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и её приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2013. Т. 125. С. 5–254.
9. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трёхмерной сферам // ДАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.
10. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

NEW CASES OF INTEGRABLE FIFTH-ORDER SYSTEMS WITH DISSIPATION

M. V. Shamolin