ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Март 2019 **Выпуск 97. С. 00-00**

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
Москва, Россия
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ СТЕПЕНЕЙ В СИСТЕМАХ С ДИССИПАЦИЕЙ

Исследуется относительная структурная устойчивость (относительная грубостm) динамических систем, рассматриваемых, не на всем пространстве динамических систем, а лишь на некотором его подпространстве. При этом пространство деформаций (динамических) систем также не совпадает со всем пространством допустимых деформаций. В частности, рассмотрены системы дифференциальных уравнений, возникающие в динамике твердого тела и теории колебаний, в которых присутствует диссипация. При определенных условиях установлены их относительная грубость и относительная негрубость различных степеней. Библиография: 22 назв. Иллюстрации: 9 рис.

1. Введение

Грубые (структурно устойчивые) системы можно рассматривать как наиболее простые и наиболее многочисленные динамические системы в соответствующем пространстве динамических систем. Действительно, грубые системы выделяются условиями типа неравенств и поэтому их естественно рассматривать как наиболее общий случай.

Можно провести далеко идущую аналогию между грубыми динамическими системами и функциями одной переменной, имеющими только простые корни, а также кривыми, не имеющими особенностей, рассматриваемыми в конечной части плоскости [**1**]. Эта аналогия является, в частности, весьма плодотворной для выработки эффективных методов качественного исследования.

В ряде вопросов представляет интерес рассмотрение относительной грубости; именно, грубости по отношению к некоторому классу динамических систем, т.е. по отношению к некоторому подмножеству пространства динамических систем. Таким понятием относительной грубости можно воспользоваться при выделении простейших негрубых систем, т.е. систем первой степени негрубости, а также при классификации негрубых систем по степени сложности или степени негрубости. Отметим, что с точки зрения такой классификации негрубых систем консервативные системы являются системами бесконечной степени негрубости, другими словами, системами степени негрубости более высокой, чем любая конечная степень негрубости. Таким образом, консервативные системы являются с точки зрения такой классификации чрезвычайно “редкими” системами.

Однако мы можем, рассматривая класс консервативных (или гамильтоновых) систем, ввести понятие грубости системы относительно этого класса. Таким понятием (без термина “грубость”) фактически пользовался Пуанкаре [**2**].

Системы первой степени негрубости можно определить как системы, которые являются относительно грубыми во множестве (относительно) негрубых систем (определение дано ниже).

(Относительно) негрубое векторное поле может быть топологически эквивалентно (относительно) грубому векторному полю. Например, на двумерной сфере возможна та ситуация, при которой векторное поле (абсолютно) не грубо, хотя топологически эквивалентно грубому векторному полю.

Основной причиной негрубости в последнем случае является вырожденность производной возле предельного множества.

В случае достаточно гладких динамических систем, требуя у правых частей динамической системы не менее пяти производных, можно определить динамические системы второй степени негрубости как системы, относительно грубые во множестве систем, негрубых и не являющихся системами первой степени негрубости.

Совершенно аналогично можно определить динамические системы 3-й, 4-й, $\ldots$, n-й степени негрубости. Определение вводится индуктивно. В рассматриваемом случае динамических систем с достаточно гладкими (или даже аналитическими) правыми частями вводится определение близости систем.

Таким образом, динамическую систему в дальнейшем назовем *системой n-й степени негрубости* в замкнутой области, если она является негрубой системой, не являющейся негрубой системой степени, меньшей или равной $n-1$, и если она является относительно грубой во множестве негрубых систем, не являющихся негрубыми системами степени, меньшей или равной $n-1$.

2. Определение относительной структурной устойчивости (относительной грубости)

Классическое определение грубости [**3**]–[**6**], а также определение, данное в [**7, 8**], оперируют с двумя объектами, а именно, с классами динамических систем и пространством деформаций систем со своей топологией.

Впервые определение грубости динамической системы на плоскости было дано при некотором дополнительном предположении относительно множества рассматриваемых динамических систем. Именно, дополнительно предполагалось, что граница области, в которой рассматривается система, является циклом без контакта для траекторий этой системы, т.е. простой гладкой замкнутой кривой, не имеющей контактов (не касающейся траекторий системы). Очевидно, когда кривая является циклом без контакта также и для траекторий всякой системы, достаточно близкой к рассматриваемой. Хотя это предположение сильно ограничивает класс рассматриваемых динамических систем, но при этом смысл понятия грубости системы сохраняется, а определение грубости значительно проще, чем при общих предположениях относительно границы области.

Можно ввести определение грубости таким образом, что оно не будет запрещать наличие негрубых траекторий, лежащих на границе области. А это не соответствует содержанию понятия грубости.

Введение понятия грубости без специальных предположений о границе области представляется естественным и необходимым с различных точек зрения.

В основе же понятия грубости (в том числе и различных степеней негрубости) лежит понятие топологической эквивалентности динамических систем.

Пусть $X^r(M)$ — пространство C^r-векторных полей на компактном многообразии M с C^r-топологией, $r \geqslant 1$. Два векторных поля $X, Y \in X^r(M)$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M \to M$, который переводит траектории поля X в траектории поля Y, сохраняя их ориентации; это последнее условие означает, что если $p \in M$ и

$\delta > 0$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $0 < t < \delta$, то

$$hX_t(p) = Y_{t'}(h(p))$$

для некоторого $t' \in (0, \varepsilon)$. Будем называть h *топологической эквивалентностью* между X и Y.

Таким образом, мы определили отношение эквивалентности на $X_r(M)$. Другим, более сильным отношением является сопряженность потоков векторных полей. Два векторных поля X и Y называются *сопряженными*, если существует топологическая эквивалентность h, сохраняющая параметр t; это означает, что

$$hX_t(p) = Y_t(h(p))$$

при всех $p \in M$ и $t \in \mathbb{R}$.

Замечание 2.1. Как известно, сопряженность потоков — слишком сильное отношение, поскольку, как известно, расширяющийся цикл (как функция от параметра) для автономных систем, как правило, меняет свой период, а, как известно, замкнутые траектории переходят в замкнутые при топологической эквивалентности.

Определение, данное Андроновым и Понтрягиным [**6**], наряду с близостью в некоторой топологии рассматриваемой системы и ее деформации требует близость к тождественному гомеоморфизма, через который осуществляется топологическая эквивалентность последних двух систем. Определение же, данное Пейксото [**7, 8**], не требует указанной близости.

Если система груба по Андронову — Понтрягину, то она является грубой и по Пейксото. При этом необходимые и достаточные условия грубости по Андронову — Понтрягину совпадают с необходимыми и достаточными условиями грубости по Пейксото. Последнее определение имеет следующее преимущество: непосредственно из этого определения вытекает тот факт, что грубые системы в пространстве динамических систем заполняют области. При первом же определении этот факт нужно доказывать, опираясь на необходимые и достаточные условия грубости.

Пусть $\mathscr{V}$ — достаточно малая окрестность рассматриваемого векторного поля X в $X^r(C^r)$. Как уже кратко отмечалось, в первоначальном определении грубости, данным Андроновым и Понтрягиным, требуется еще, чтобы при достаточной малости окрестности $\mathscr{V}$ гомеоморфизм, осуществляющий топологическую эквивалентность между X и Y, мог быть сделан сколь угодно близким к тождественному в C^0-топологии (т.е. сколь угодно мало сдвигал точки M). Так как вариант этого требования предложен Пейксото, в тех случаях, когда надо уточнить, какой именно вариант грубости имеется в виду, говорят о грубости по Андронову — Понтрягину и о грубости по Пейксото. Однако в настоящее время неясно, действительно ли эти варианты различаются между собой и имеет ли один из них существенное преимущество перед другим.

Приведенное определение зависит от r. При необходимости явно указывать на эту зависимость можно говорить о грубости в классе C^r [**9**].

До сих пор мы говорили о глобальных свойствах векторных полей на многообразиях. Можно анализировать локальное топологическое поведение траекторий векторных полей [**10, 11**]. Для векторных полей из некоторого открытого плотного подмножества в пространстве $X^r(M)$ можно описать поведение траекторий в окрестности каждой точки многообразия. Кроме того, локальная структура траекторий не меняется при малых возмущениях поля (так называемая локальная грубость). Таким образом получается полная классификация через топологическую сопряженность.

Замечание 2.2. По всей видимости, лишь в локальном случае отношение топологической сопряженности является конструктивным, поскольку в глобальном случае это влечет наличие очень жестких условий.

В высших размерностях множество грубых полей по-прежнему обширно, но не является уже всюду плотным. Здесь существуют богатые и более сложные явления, сохраняющиеся при малых возмущениях первоначального поля. Даже для грубых полей структура траекторий предельных множеств до конца не ясна, и ее описание по-прежнему остается областью активного исследования.

Параллельно определениям, данным выше, в работах [**6**]–[**8**], [**12**] изучались маломерные грубые системы, а в [**13**] — теория систем Аносова, для которых понятие грубости оказалось естественным.

В силу классических определений структурной устойчивости в [**14**]–[**17**] обсуждаются критерии последней, как для линейных неавтономных систем, так и для классов нелинейных систем. Признаки структурной устойчивости для маломерных систем формулируются в качестве гипотез Смейла на большие размерности.

За последнее время появилось еще несколько видоизмененных определений грубости [**18**]. Все они имеют одно общее сходство: деформация рассматриваемых динамических систем на некотором многообразии M^n берется во всем пространстве гладких векторных полей $\chi(C^r)$ в C^r-топологии (чаще всего $r = 1$).

Будем рассматривать векторные поля (динамические системы), деформируемые не над всем классом $\chi(C^r)$ полей, а лишь над некоторым подклассом $\chi(\mathscr{B})$, определенным с помощью класса функций $\mathscr{B} \subset C^r$.

Определение 2.1. Векторное поле v на многообразии M^n называется *относительно структурно устойчивым* (*относительно грубым* или *грубым по отношению к классу полей* $X(\mathscr{B})$, определенного с помощью класса функций $\mathscr{B}$), если для любой окрестности $\mathscr{T}$ гомеоморфизма 1_{M^n} в пространстве всех гомеоморфизмов с C^0-топологией имеется окрестность $\mathscr{U} \subset \chi(\mathscr{B})$ рассматриваемого векторного поля v такая, что последнее эквивалентно любому векторному полю из $\mathscr{U} \subset \chi(\mathscr{B})$ посредством некоторого гомеоморфизма из $\mathscr{T}$.

Заметим, что близость векторных полей понимается в C^1-топологии, а близость гомеоморфизма — в C^0-топологии. При этом речь идет не о сопряжении, а об эквивалентности.

Заметим также, что пока в вышеприведенном определении важны следующие аспекты:

(1) достаточная малость гомеоморфизма, осуществляющего эквивалентность,

(2) C^1-топология в пространстве рассматриваемых векторных полей.

3. Относительная структурная неустойчивость (относительная негрубость) различных степеней

Подобно тому, как дается определение векторного поля первой степени негрубости, можно определить поля первой степени относительной негрубости, рассматривая деформации полей в подпространстве $\chi(B)$ пространства всех векторных полей.

Определение 3.1. Векторное поле v на многообразии M^n называется *векторным полем первой степени относительной негрубости*, если оно не является относительно грубым векторным полем и если для любой окрестности $\mathscr{T}$ гомеоморфизма 1_{M^n} в пространстве всех гомеоморфизмов с C^0-топологией имеется окрестность $\mathscr{U} \subset \chi(B)$ векторного поля v такая, что поле v топологически эквивалентно любому полю из $\mathscr{U} \subset \chi(B)$, не являющемуся относительно грубым, посредством некоторого гомеоморфизма из $\mathscr{T}$.

Заметим, что близость векторных полей в данном случае понимается в C^3-топологии.

Аналогичным образом можно определить векторные поля, являющиеся полями n-й степени относительной негрубости. При этом используется C^{2n+1}-топология в пространстве векторных полей.

Определение 3.2. Векторное поле v на многообразии M^n называется *векторным полем n-й степени относительной негрубости*, если оно не является относительно негрубым векторным полем, не являющимся относительно негрубым векторным полем степени, меньшей или равной $n-1$, и если для любой окрестности $\mathscr{T}$ гомеоморфизма 1_{M^n} в пространстве всех гомеоморфизмов с C^0-топологией имеется окрестность $\mathscr{U} \subset \chi(B)$ векторного поля v такая, что поле v топологически эквивалентно любому полю из $\mathscr{U} \subset \chi(B)$, не являющемуся относительно грубым или относительно негрубым векторным полем степени, меньшей или равной $n-1$, посредством некоторого гомеоморфизма из $\mathscr{T}$.

4. Маятниковые системы из динамики твердого тела и теории колебаний

4.1. Маятниковые системы с переменной диссипацией с нулевым средним. Рассматриваемые системы обладают одним общим свойством: поскольку, как правило, у систем, обладающих переменной диссипацией с нулевым средним [**19**], существуют дополнительные симметрии, данные системы имеют сепаратрисы, соединяющие гиперболические седловые положения равновесия. Поэтому (абсолютно) структурно устойчивыми (абсолютно грубыми) такие системы быть не могут.

Поскольку деформации таких систем рассматриваются лишь над некоторым подмножеством всех систем, определенным с помощью подкласса функций (правых частей), позволяющего сохранить все симметрии в системе, рассматриваемые системы в некоторых областях параметров остаются относительно грубыми.

Действительно, рассмотрим маятниковые системы на цилиндре с одной степенью свободы вида

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= -\Omega + A_1\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}, \\ \dot\Omega &= A_2F(\alpha), \quad A_1,\ A_2>0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

при условии

$$F\in\Phi. \tag{4.2}$$

Класс функций Φ состоит из достаточно гладких нечетных π-периодических функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} &F(\alpha)>0, \quad \alpha\in(0,\pi/2), \\ &dF(0)/d\alpha>0, \quad dF(\pi/2)/d\alpha<0. \end{aligned}$$

Видно, что типичным представителем данного класса функций Φ является аналитическая функция $F_0(\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha$, т.е. $F_0\in\Phi$.

Поскольку система (4.1) приводится к уравнению

$$\ddot\alpha - A_1\dot\alpha\frac{d}{d\alpha}\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}+A_2F(\alpha)=0,$$

видно, что коэффициент при $\dot\alpha$ (который характеризует или рассеяние, или подкачку энергии) имеет вид

$$A_1\frac{d}{d\alpha}\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Это говорит о том, что или рассеяние, или подкачка энергии зависит от знака данной величины, которая в среднем за период равна нулю

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d}{d\alpha}\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}d\alpha=0$$

(это — одно из свойств систем с переменной диссипацией с нулевым средним, см. также [**19**]).

Лемма 4.1. *Система* (4.1) *относительно структурно устойчива. Более того, любые две системы вида* (4.1) *топологически эквивалентны.*

Доказательство. Определим пространство векторных полей $\chi(\Phi)$, отвечающих системе (4.1); при этом функция F пробегает весь класс Φ. Пространство параметров системы при этом бесконечномерно. Лемма 4.1 следует из следующих замечаний.

1. Для любого $F\in\Phi$ фазовый портрет системы (4.1) имеет один и тот же топологический тип (см. также [**20**]).

2. В каждой из областей фазового цилиндра (колебательная и вращательная) (рис. 1) строится своя топологическая эквивалентность: на "ключевых" сепаратрисах данные эквивалентности "сшиваются".

3. Например, в колебательной области (рис. 1) эквивалентность строится следующим образом. Построим эквивалентность — гомеоморфизм h фазового цилиндра. В колебательной области

существуют лишь две особые точки: $(0,0)$ и $(\pi,0)$ (первая из которых отталкивающая, а вторая — притягивающая). Итак, рассмотрим две системы (4.1) для функций $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$. Соответствующие фазовые потоки фазового цилиндра обозначим через g_1^t, g_2^t. Потребуем, чтобы гомеоморфизм h переводил начало координат в начало координат. Рассмотрим малую окружность $\mathbb{S}^1$ начала координат. Ее можно выбрать трансверсальной к обоим полям систем (4.1) при $F=F_1$ и $F=F_2$ одновременно. Определим $h(p)=p$ (с точностью до линейного сжатия или растяжения) для всех $p\in\mathbb{S}^1$ таким образом, чтобы $h(p_1^1)=h(p_2^1)$ и $h(p_1^2)=h(p_2^2)$. Здесь $p_k^1, p_k^2, k=1,2$ — две точки на окружности $\mathbb{S}^1$, через которые проходят сепаратрисы поля системы (4.1) при $F=F_k$, выходящие из начала координат и входящие в седла S_{-1} и S_0 (в полосе П). Если q не является началом координат, то существует единственное $t\in\mathbb{R}$ такое, что $g_1^t(q)=p\in\mathbb{S}^1$. Положим $h(q)=g_2^{-t}(p)=g_2^{-t}g_1^t(q)$. Непосредственно видно, что h непрерывно и имеет непрерывное обратное.

4. В силу построенного отображения h точка $(\pi,0)$ системы для функций $F_1(\alpha)$ перейдет в точку $(\pi,0)$ системы для функций $F_2(\alpha)$ по непрерывности. □

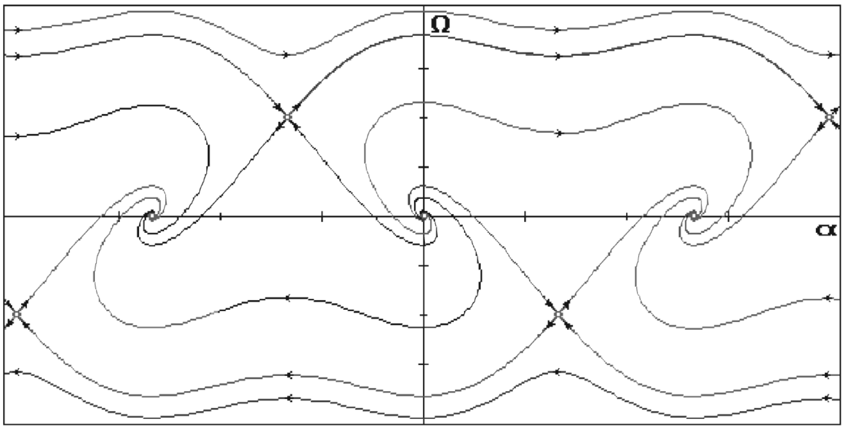

Рис. 1. Относительно грубая система на фазовом цилиндре.

Следствие 4.1. *Система* (4.1) *при условии* (4.2) *топологически эквивалентна уравнению*

$$I_*\theta'' + h\theta'\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 0, \tag{4.3}$$

где $I_*>0$, $h<0$, *а также общему уравнению плоского маятника в потоке среды* (*см. также* [**19, 20**]). *При этом уравнение* (4.3) *можно интерпретировать как одно из немногих уравнений такого класса, которые интегрируются через конечную комбинацию элементарных функций.*

4.2. Маятниковые системы с переменной диссипацией с ненулевым средним.

4.2.1. Обобщим несколько систему (4.1). В [**20**] приведена типичная топологическая классификация портретов системы

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= -\Omega + A_1\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha},\\ \dot\Omega &= A_2F(\alpha) - h\Omega, \quad A_1,\ A_2>0,\ h\in\mathbf{R}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

при условии (4.2) для некоторой бесконечномерной области параметров. Вообще же, система (4.4) при $h\neq 0$ является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним [**19, 20**] (т.е. является “собственно” диссипативной).

Лемма 4.2. *Бесконечномерное пространство векторных полей* $\chi(\Phi)$, *отвечающее системе* (4.4) *при* $h\neq0$, *совпадает с замыканием конечного объединения*

$$\chi(\Phi)=\overline{E},\quad E=\bigcup_{i=1}^{N}\chi(\Phi_i),$$

обладающее следующим свойством: система (4.4) *при* $h \neq 0$, *определенная с помощью пространств* $\chi(\Phi_k)$, $k = 1, \ldots, N$ (*абсолютно*) *груба.*

Доказательство. Определим пространство векторных полей $\chi(\Phi)$, отвечающих системе (4.4); при этом функция F пробегает весь класс Φ. Пространство параметров системы бесконечномерно. Лемма 4.2 вытекает из следующих замечаний.

1. Если функция F пробегает класс функций Φ, то фазовый портрет системы (4.4) при $h \neq 0$ имеет конечное число (абсолютно) грубых топологических типов [**19, 20**].

2. Для каждого фиксированного i топологическая эквивалентность строится отдельно (в соответствии со своим топологическим типом) и аналогично доказательству леммы 4.1 (см. выше).

3. Векторное поле системы (4.4) при условии (4.2) обладает свойством строгой монотонности относительно параметра h [**20**] (такое свойство называют также *свойством поворота векторного поля системы*).

4. Оставшиеся системы, не соответствующие векторным полям $\chi(\Phi_k)$ ни для какого $k = 1, \ldots, N$, в пространстве параметров задаются конечным числом алгебраических уравнений и имеют меру нуль. □

Восемь "типичных" классов (но не все) для систем (4.4) при $h \neq 0$ приведены на рис. 2–9.

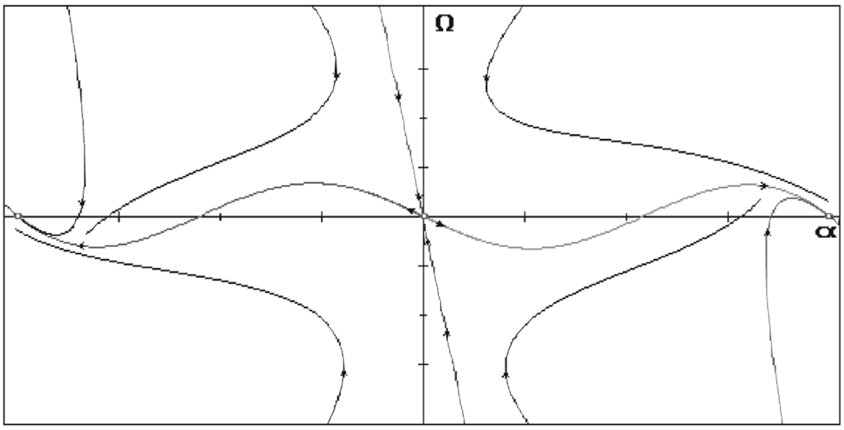

Рис. 2.

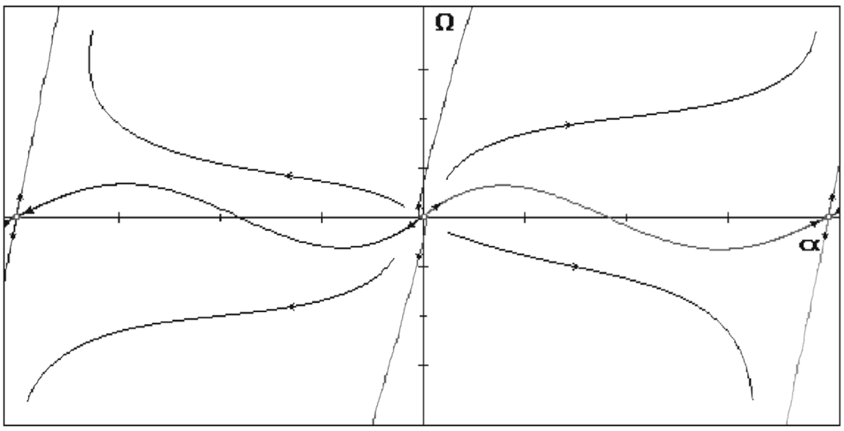

Рис. 3.

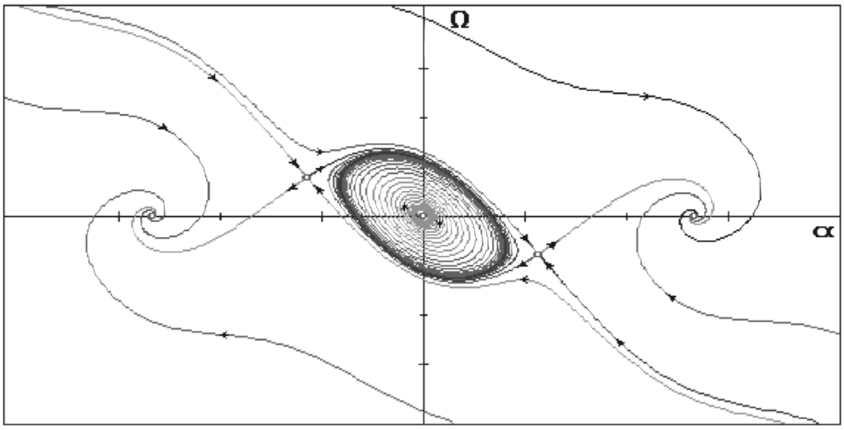

Рис. 4.

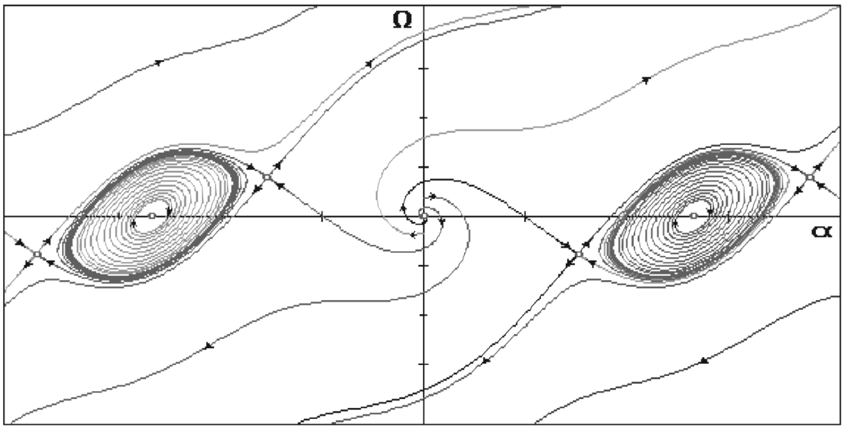

Рис. 5.

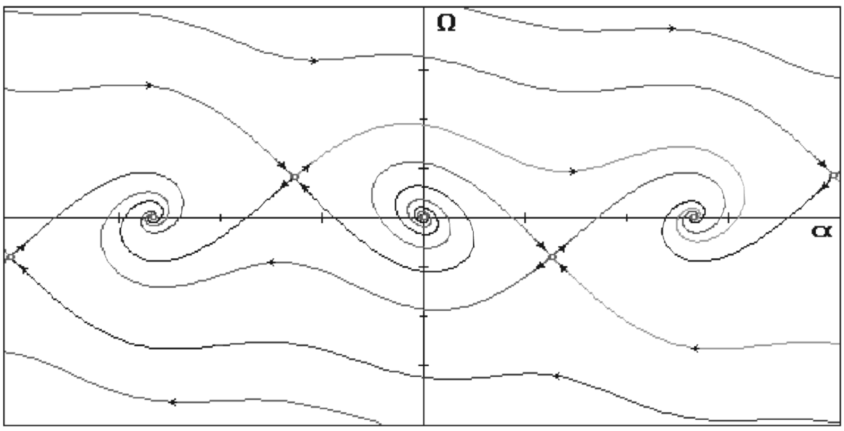

Рис. 6.

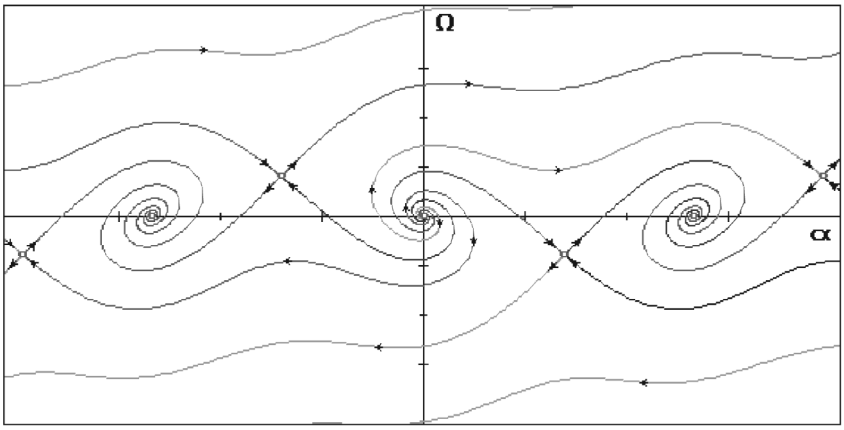

Рис. 7.

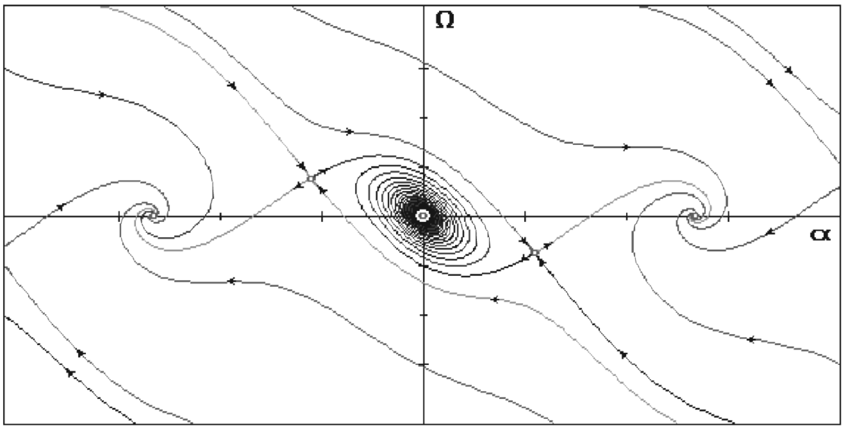

Рис. 8.

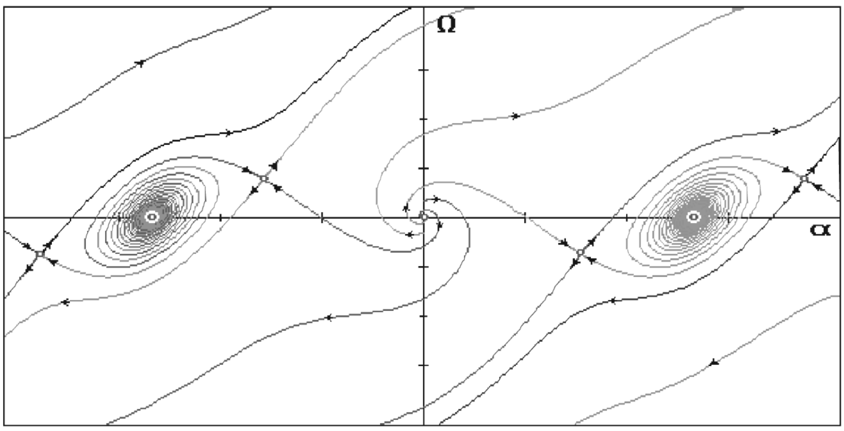

Рис. 9.

Необходимо заметить, что в системе (4.4) при $h \neq 0$ можно пользоваться "типичными" представителями данных классов систем — соответствующими аналитическими системами (по аналогии с уравнением (4.3)).

4.2.2. В следующем классе систем, также обобщающих системы вида (4.1), возникает счетное множество (абсолютно) грубых систем, замыкание множества которых дает весь класс целиком.

Рассмотрим систему на фазовом цилиндре

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2 \sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha, \tag{4.5}$$

$$\omega' = \frac{1}{I}F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha,\omega), \quad \sigma, I, m > 0, \tag{4.6}$$

где

$$\Psi(\alpha,\omega) = -\sigma\omega^2\cos\alpha + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha,$$

при условиях (4.2) и

$$s \in \Sigma. \tag{4.7}$$

Класс Σ состоит из функций достаточно гладких, 2π-периодических, четных, удовлетворяющих следующим условиям:

$$s(\alpha) > 0, \quad \alpha \in (0, \pi/2),$$

$$s(\alpha) < 0, \quad \alpha \in (\pi/2, \pi),$$

причем $s(0) > 0$, $ds(\pi/2)/d\alpha < 0$. Функции s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$.

С помощью классов функций Φ и Σ, которые пробегают, соответственно, функции F и s, определяется пространство векторных полей системы (4.5), (4.6), которое обозначим $\chi(B)$.

Лемма 4.3. *Бесконечномерное пространство* $\chi(B)$*, отвечающее системе вида* (4.5)*,* (4.6)*, разбивается на счетное непересекающееся объединение*

$$\chi(B) = \chi(B_1) \amalg \chi(b_1) \amalg \chi(B_2) \amalg \chi(b_2) \ldots ,$$

обладающее следующими свойствами:

(1) система вида (4.5)*,* (4.6)*, определенная с помощью пространств* $\chi(B_i)$ *для любого* $i \in \mathbf{N}$ *(абсолютно) груба,*

(2) система (4.5)*,* (4.6)*, определенная с помощью пространств* $\chi(b_i)$*, является системой первой степени относительной негрубости в пространстве* $\chi(B)$*,*

(3) множества $\chi(b_i)$ *имеют меру нуль в пространстве* $\chi(B)$*,*

(4) множества $\chi(B_i)$ *имеют конечную меру в пространстве* $\chi(B)$*.*

Доказательство. Определим пространство векторных полей $\chi(\Phi)$, отвечающих системе (4.5), (4.6); при этом функции F и s пробегают все классы функций Φ и Σ соответственно. Пространство параметров системы при этом бесконечномерно. Лемма 4.3 вытекает из следующих замечаний.

1. Если функции F и s пробегают все классы функций Φ и Σ соответственно, фазовый портрет системы (4.5), (4.6) имеет счетное число (абсолютно) грубых топологических типов [**21, 22**].

2. Для каждого фиксированного i топологическая эквивалентность векторных полей из класса $\chi(B_i)$ строиться отдельно (в соответствии со своим топологическим типом) и аналогично доказательству леммы 4.1 (см. выше).

3. Векторное поле системы (4.5), (4.6) при условиях (4.2) и (4.7) обладает свойством строгой монотонности относительно конечного числа параметров рассматриваемой системы (это также свойство поворота векторного поля системы).

4. Системы, соответствующие векторным полям из классов $\chi(b_i)$, в пространстве параметров задаются конечным числом алгебраических уравнений и имеют меру нуль. □

Гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность, систем, взятых из пространства $\chi(B_i)$ для каждого фиксированного i, может и не быть достаточно близок к тождественному. Последний факт является оригинальным в смысле построения понятия относительной грубости.

В данном случае мы имеем многопараметрическое семейство фазовых портретов, в котором при переходе от одного топологического типа портрета к другому мы вынуждены иметь дело с вырожденными перестройками (см. также [**21, 22**]).

Из всего вышеизложенного видно, что рассмотренные системы с переменной диссипацией с ненулевым средним в типичном случае (абсолютно) структурно устойчивы. При этом относительно структурно устойчивые (типичные) системы с переменной диссипацией с нулевым средним являются, как правило, удобными системами сравнения для систем с переменной диссипацией с ненулевым средним (ср. с [66]).

Литература

1. Д. А. Гудков, “О понятии грубости и степеней негрубости для плоских алгебраических кривых”, *Мат. сб.* **67**, No. 4, 481–527 (1965).
2. А. Пуанкаре, *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*, ОГИЗ, М.-Л. (1947).
3. А. А. Андронов, *Собрание трудов*, Изд-во АН СССР, М. (1956).
4. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, “Динамические системы первой степени негрубости на плоскости,” *Мат. сб.* **68**, No. 3, 328–372 (1965).
5. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, “Достаточные условия для негрубости первой степени динамической системы на плоскости”, *Дифференц. уравнения* **6**, No. 12, 2121–2134 (1970).
6. A. Andronov, L. S. Pontryagin, “Systèmes grossiers” [in French], *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS* **14**, 247–250 (1937).
7. M. M. Peixoto, “On structural stability”, *Ann. Math. (2)* **69**, 199–222 (1959).
8. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds”, *Topology*, **1**, No. 2, 101–120 (1962).
9. Дж. Пали, С. Смейл, “Теоремы структурной устойчивости”, *Сб. пер. Мат.* **13**, No. 2, 145–155 (1969).
10. Д. М. Гробман, “О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР* **128**, No. 5, 880–881 (1959).
11. Д. М. Гробман, “Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве”, *Мат. сб.* **56**, No. 1, 77–94 (1962).
12. M.M. Peixoto, “On an approximation theorem of Kupka and Smale”, *J. Differ. Equations* **3**, 214–227 (1967).
13. Д. В. Аносов, “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Тр. МИАН* **90**, 1–235 (1967).
14. В. А. Плисс, “О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе”, *Вестн. ЛГУ, сер. мат.* **13**, 15–23 (1960).
15. В. А. Плисс, *Нелокальные проблемы теории колебаний*, Наука, М.-Л. (1964).
16. В. А. Плисс, *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений*, Наука, М. (1977).
17. В. А. Плисс, “Об устойчивости произвольной системы по отношению к малым в смысле C возмущениям”, *Дифференц. уравнения* **16**, No. 10, 1891–1892 (1980).
18. З. Нитецки, *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М. (1975).

19. М. В. Шамолин, “Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил”, *Совр. мат. прил. Тематические обзоры* **125**, 5–254 (2013).
20. М. В. Шамолин, “Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента”, *Прикл. мат. мех.* **57**, No. 4, 40–49 (1993).
21. М. В. Шамолин, “Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде”, *Докл. АН* **337**, No. 5, 611–614 (1994).
22. М. В. Шамолин, “Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений” *Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. мех.* No. 2, 66–70 (1993).

Статья поступила в редакцию 19 февраля 2019 г.