ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Март 2019 **Выпуск 97. С. 00-00**

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
Москва, Россия
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО И ПЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

Показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем нечетного (третьего и пятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладким многообразиям. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные. Библиография: 15 назв.

Дать общее определение динамической системы с имеющейся диссипацией довольно затруднительно. В конкретном случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определенные коэффициенты в уравнениях указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на ее подкачку. Последнее приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), выражающихся через гладкие функции. Но как только в системе обнаруживаются притягивающие или отталкивающие предельные множества, необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве первых интегралов [**1**].

В некоторых случаях для систем с диссипацией, если и удается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями, имеющими существенно особые точки. Полученные в работе результаты особенно важны в смысле присутствия в системе неконсервативного поля сил.

В работах автора уже затрагивалась данная тематика (см., например, [**2, 3**]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

1. Замечания к системам третьего порядка

1.1. Система при отсутствии внешнего поля сил. Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы (для простоты, степени 2) по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α следующим образом (см. также [**4**]):

$$\begin{aligned} \dot{v} &= a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \\ \dot{z} &= d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, \\ v\dot{\alpha} &= g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Тогда, выбирая в качестве новой независимой переменной величину q ($dq = vdt$, $d/dq =<'>$, $v \neq 0$), систему (1.1) можно переписать в виде

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2,$$

$z = Zv$, при этом уравнение (1.2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (1.3) с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ [**5**].

Особняком стоит случай, когда выполнены тождества

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0. \tag{1.4}$$

Тогда система (1.2), (1.3) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$z = vZ = \mathrm{const}\,. \tag{1.5}$$

Для полной интегрируемости системы (1.2), (1.3) при условии (1.4) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (1.5). Для этого можно предъявить достаточные условия существования искомого первого интеграла. Но в данной работе мы ограничимся важным частным случаем системы (1.2), (1.3).

В качестве представителя систем вида (1.2), (1.3) при условии (1.4) будем рассматривать следующую систему третьего порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \\ Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \delta'(\alpha),$$

где $z = Zv$, $b_0 \geqslant 0$ — параметр, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как систему при отсутствии внешнего поля сил.

1.2. Полный набор гладких первых интегралов.

Предложение 1.1. *Система* (1.6), (1.7) *имеет два гладких первых интеграла*

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)) = C_0 = \mathrm{const},$$

$$\Phi_1(v; Z) = vZ = C_1 = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. Достаточно продифференцировать функции Φ_0 и Φ_1 в силу системы (1.6), (1.7). □

Другими словами, независимая подсистема (1.7) на многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида (см. также [**4**])

$$\Phi(Z; \alpha) = \frac{1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)}{Z^2} = C = \mathrm{const}, \tag{1.8}$$

который не имеет существенно особых точек. В силу последнего подсистема (1.7) не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Таким образом, внутреннее силовое поле (зависящее от параметра $b_0 > 0$) в системе (1.6), (1.7) не нарушает консервативности системы.

1.3. Некоторые фазовые портреты. 1. Приведем фазовый портрет системы (1.7), для начала слегка преобразовав его. Его правая часть линейно зависит от величины Z. Таким образом, вся ось абсцисс $\{(\alpha, Z) \in \mathbf{R}^2 : \ Z = 0\}$ состоит из неизолированных положений равновесия.

Несколько поправим правую часть за счет ее сокращения на величину Z (изменив скорость движения вдоль фазовых траекторий). Таким образом, фазовые характеристики остались на своем месте, при этом ось абсцисс перестала быть “сотканной” из неизолированных положений равновесия. Рассматриваемая система примет вид

$$\begin{aligned} \alpha' &= -1 + b_0 Z\delta(\alpha), \\ Z' &= b_0 Z^2 \delta'(\alpha). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Для функции $\delta(\alpha) = \sin\alpha$ поле направлений для фазового портрета системы (1.9) представлено на рис. 1.

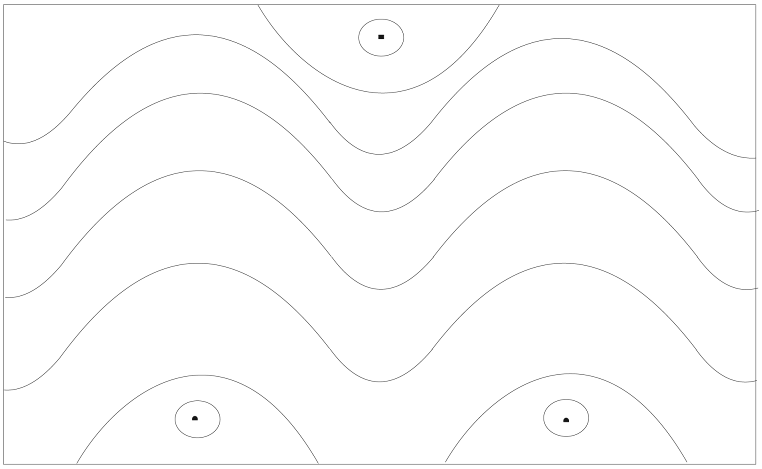

Рис. 1. Поле направлений для фазового портрета системы (1.9).

1.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов. Добавляя следующим образом в систему (1.6), (1.7) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при наличии внутреннего ($b_0 > 0$):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{1.11}$$

создается впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b_0 = 0$ [**2**], т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность “подтвердилась” бы наличием в системе двух гладких первых интегралов. Действительно, при некотором естественном условии у системы (1.10), (1.11) существует гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \mathrm{const}, \quad F_1'(\alpha) = 2F(\alpha), \tag{1.12}$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет. Более того, если, в частности, $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$, то дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е.

имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих предельных множеств) (см. следующее предложение, а также [**6**]).

Предложение 1.2. *Если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$, то система* (1.10), (1.11) *имеет два независимых* (*один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий*) *первых интеграла*

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2 \left(1 - b_0 Z\delta(\alpha) - b_0(Z^2 + \delta^2(\alpha)) \arctan \frac{\delta(\alpha)}{Z}\right) = C_0 = \text{const}, \tag{1.13}$$

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + \delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}\,. \tag{1.14}$$

Доказательство. Достаточно продифференцировать функции (1.13) и (1.14) в силу системы (1.10), (1.11) при условии $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$. □

Более того, как видно из вида первого интеграла (1.13), притягивающее множество рассматриваемой системы (1.10), (1.11) может быть найдено из системы равенств

$$Z = \delta(\alpha) = 0.$$

В данном случае первый интеграл (1.14) является частным случаем интеграла (1.12).

Модифицируем далее систему (1.10), (1.11), при наличии двух ключевых параметров $b_0, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее силовое поле. Получим систему

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1.15}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha), \\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{cases} \tag{1.16}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \widetilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)},$$

где $\mu = \text{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b_0, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Только что мы ввели такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (1.10), (1.11), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b_0 = 0$.

Мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^1\{Z; \alpha\}$ примет вид (1.15), (1.16). Как будет показано далее, только что было введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования.

Теорема 1.1. *Если выполнено условие $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$, то система* (1.15), (1.16) *обладает полным набором — двумя* (*одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным*) *первыми интегралами.*

Ниже доказана более общая теорема 4.1, поэтому доказательство теоремы 1.1 мы опускаем.

1.5. Некоторые фазовые портреты. 2. Приведем фазовый портрет системы (1.16). Для функций $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$, $\mu = 1$, три типа фазовых портретов системы (1.16) представлены на рис. 2–4 ($\omega \leftrightarrow Z$).

2. Системы пятого порядка при отсутствии внешнего силового поля

Пусть v, α, β, z_1, z_2 — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z_1, z_2 с коэффициентами, зависящими от α, β. Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = v dt$, $d/dq = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), будем рассматривать систему пятого порядка

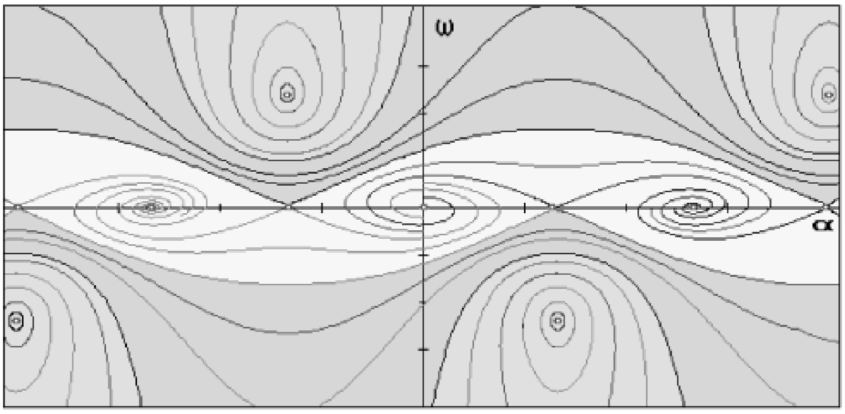

Рис. 2. Фазовый портрет системы с диссипацией.

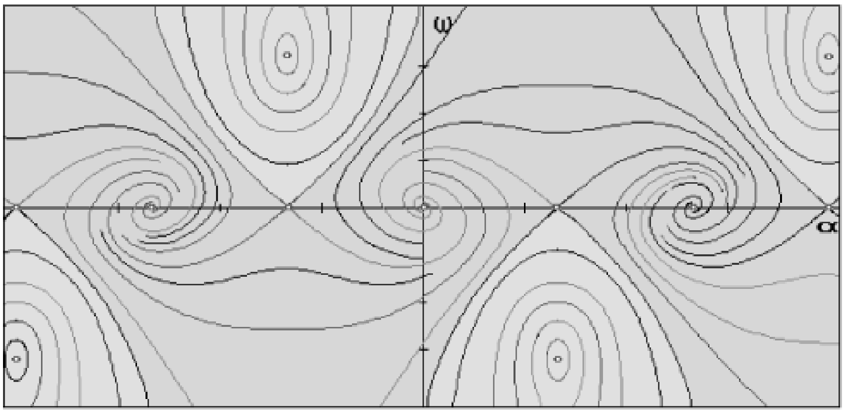

Рис. 3. Фазовый портрет системы с диссипацией.

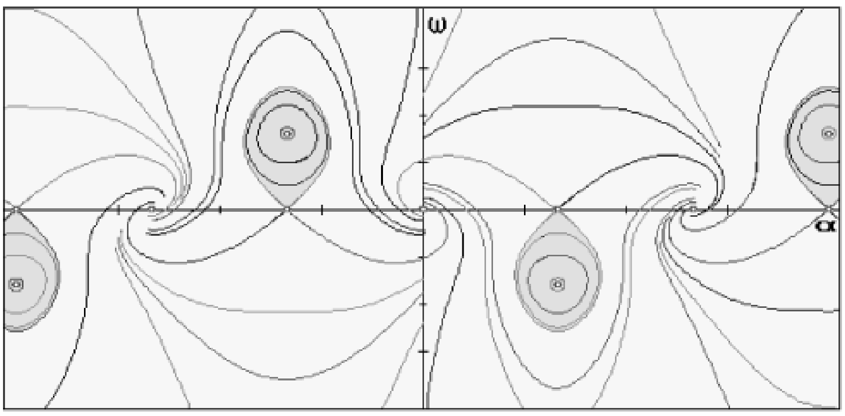

Рис. 4. Фазовый портрет системы с диссипацией.

$$v' = \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha), \\ Z_2' = \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ Z_1' = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \beta' = Z_1 f(\alpha), \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha),$$

$z_k = Z_k v$, $k = 1, 2$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$ — некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (2.1) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (2.2) в качестве независимой системы (с двумя степенями свободы) на четырехмерном многообразии $N^4\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\} = TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ (касательном расслоении гладкого двумерного многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$, см. также [**2, 7**]).

Рассмотрим структуру системы (2.2). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\dot\alpha, \dot\beta; \alpha, \beta\}$ многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$ [**8**] (в частности, сферы или поверхностей вращения — с двумя или тремя ненулевыми коэффициентами связности):

$$\begin{aligned} &\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0, \\ &\ddot\beta + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, Z_2 в касательном пространстве в виде

$$\begin{aligned} &\dot\alpha = -Z_2, \\ &\dot\beta = Z_1 f(\alpha), \end{aligned} \tag{2.4}$$

мы получаем соотношения на них в виде (ср. с системой (2.2))

$$\begin{aligned} &Z_1' = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ &Z_2' = \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \end{aligned} \tag{2.5}$$

при этом уравнения (2.3) почти всюду эквивалентны совокупности (2.4), (2.5), которая, прежде всего, присутствует в системе (2.2).

Далее, в системе (2.2) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Но, как и в системе (1.7), они не нарушают консервативности, поскольку система (2.1), (2.2) обладает полным набором (четырьмя) гладких первых интегралов.

Предложение 2.1. *Если всюду справедливо равенство*

$$2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) \equiv 0, \tag{2.6}$$

то система (2.1), (2.2) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(v; Z_2, Z_1) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2) = C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (2.7) в силу системы (2.1), (2.2) дает

$$2v^2\left[\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1^2 Z_2 \equiv 0,$$

поскольку выполнено свойство (2.6). □

Предложение 2.2. *Если функция* $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ *является функцией лишь* α*:*

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{2.8}$$

то система (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(v;Z_1;\alpha)=v^2Z_1\delta(\alpha)=C_2=\mathrm{const}, \tag{2.9}$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ *должна удовлетворять равенству*

$$\delta(\alpha)=A_1f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)db\right\},\quad A_1=\mathrm{const}\,. \tag{2.10}$$

Доказательство. Будем искать первый интеграл в виде

$$v^2Z_1\Phi_0(\alpha).$$

Дифференцирование последней функции в силу системы (2.1), (2.2) дает

$$v^2\left\{\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\Phi_0'(\alpha)\right\}Z_1Z_2-v^2bZ_1(Z_1^2+Z_2^2)[\delta'(\alpha)\Phi_0(\alpha)-\delta(\alpha)\Phi_0'(\alpha)].$$

Для того, чтобы эта производная тождественно равнялась нулю, достаточно, чтобы функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяла обыкновенному уравнению

$$\Phi_0'(\alpha)=\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

а также было выполнено тождество

$$\delta'(\alpha)\Phi_0(\alpha)\equiv\delta(\alpha)\Phi_0'(\alpha).$$

Но для этого, в свою очередь, достаточно выполнения свойства (2.10) и равенства функций $\Phi_0(\alpha)$ и $\delta(\alpha)$ с точностью до множителя. □

Если выполнено свойство (2.8) и функция $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также является функцией лишь α: $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)$, то в системе (2.2) выделяется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на β' отделяется). В частности, если выполнены свойства (2.6), (2.8), то такая независимая подсистема выделяется.

Аналогичным образом доказывается и следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Пусть функция* $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ *является функцией лишь* α*:* $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)$. *Тогда система* (2.1), (2.2) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_0(v;Z_2;\alpha)=v^2(1-2bZ_2\delta(\alpha))=C_0=\mathrm{const}, \tag{2.11}$$

если функция $\delta(\alpha)$ *удовлетворяет равенству*

$$\delta(\alpha)=A_2\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(b)db\right\},\quad A_2=\mathrm{const}\,.$$

В частности, если выполнены свойства (2.6), (2.8), (2.10), то система (2.1), (2.2) имеет гладкий первый интеграл вида (2.11).

Предложение 2.4. *Если выполнены условия* (2.6), (2.8), (2.10), *то система* (2.1), (2.2) *имеет первый интеграл вида*

$$\Phi_3(\alpha,\beta)=\beta+\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2^2f(b)}{A_3+bC_1^2\delta^2(b)}\,db=C_4=\mathrm{const}, \tag{2.12}$$

где после взятия интеграла (2.12)*, вместо постоянных* C_1^2*,* C_2 *можно подставить левые части равенств* (2.7), (2.9)*, соответственно* ($A_3=\mathrm{const}$).

Доказательство. Данное предложение вытекает из предложений 2.1 и 2.2 и использовании явных видов первых интегралов (2.7) и (2.9). □

Прямым следствием предложений 2.1–2.4 является основная теорема данного раздела.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* (2.6), (2.8), (2.10), *то система* (2.1), (2.2) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *гладких независимых первых интегралов вида* (2.7), (2.9), (2.11), (2.12).

3. Введение внешнего силового поля и унимодулярные преобразования

Модифицируем систему (2.1), (2.2), при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geqslant 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z_2' системы (3.1), (3.2) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v, \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha), \\ Z_2' = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha, \beta) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ Z_1' = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) + \dfrac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \beta' = Z_1 f(\alpha), \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad \widetilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)},$$

$\mu = \text{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', Z_2' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$, а во второй строке — коэффициенты из уравнения на α'. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geqslant 0$, $\mu \in \mathbf{R}$) имеет вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\delta'(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \widetilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$, и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [**2, 3, 7**]).

4. Интегрирование системы с диссипацией

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы пятого порядка (3.1), (3.2) при выполнении свойств (2.6), (2.8). Она также допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка.

Теорема 4.1. *Пусть для некоторых* $\varkappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) = \varkappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{4.1}$$

Тогда система (3.1), (3.2) *при выполнении равенств* (2.6), (2.8) *обладает четырьмя независимыми* (*вообще говоря, трансцендентными* [**9**] *в смысле комплексного анализа*) *первыми интегралами.*

Доказательство. Для начала сопоставим рассматриваемой подсистеме третьего порядка неавтономную систему второго порядка

$$
\begin{aligned}
\frac{dZ_2}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha) - b_1 Z_2 F(\alpha)\delta(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) Z_1^2}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha)},\\
\frac{dZ_1}{d\alpha} &= \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha) + \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_2 - b_1 Z_1 F(\alpha)\delta(\alpha)}{-Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\widetilde{f}(\alpha)}.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$
Z_k = u_k \delta(\alpha), \quad k = 1, 2, \tag{4.3}
$$

пользуясь (4.1), приводим систему (4.2) к виду

$$
\begin{aligned}
\delta\frac{du_2}{d\delta} + u_2 &= \frac{\lambda + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1\lambda u_2\delta^2 + \varkappa u_1^2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)},\\
\delta\frac{du_1}{d\delta} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 - b_1\lambda u_1\delta^2 - \varkappa u_1 u_2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

В дальнейшем система (4.4) приводится к уравнению первого порядка

$$
\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2 + \varkappa u_1^2}{(1-\varkappa)u_1 u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \tag{4.5}
$$

Уравнение (4.5) имеет вид уравнения Абеля [**2, 9**]. В частности, при $\varkappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл [**10, 11**]:

$$
\frac{u_2^2 + u_1^2 - b_1\lambda\mu u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{4.6}
$$

который в прежних переменных выглядит как

$$
\Theta_1(Z_2, Z_1; \alpha) = G_1\left(\frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{Z_2^2 + Z_1^2 - b_1\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{Z_1\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}\,. \tag{4.7}
$$

Итак, показано, что в общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\varkappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов только что приведен.

При помощи интеграла (4.7) получаются и другие первые интегралы. При этом они имеют следующие структурные виды (ср. с [**12, 13**]):

$$
\Theta_2(Z_2, Z_1; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}, \tag{4.8}
$$

$$
\Theta_3(Z_2, Z_1; \alpha, \beta) = G_3\left(\delta(\alpha), \beta, \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = C_3 = \text{const}\,. \tag{4.9}
$$

Выражение первых интегралов (4.8), (4.9) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\varkappa = -1$ второй из интегралов системы (3.1), (3.2) найдется из уравнения Бернулли

$$
\frac{d\delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_2)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_2) + u_2^2) - b_1\lambda\delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2 - U^2(C_1, u_2)},
$$

$$
U(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\Big\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2)}\Big\}.
$$

При этом после взятия интеграла вместо C_1^2 можно подставить левую часть равенства (4.7).

Кроме того, у системы (3.1), (3.2) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (2.11)), который, например, при $b = b_1$, $\mu = 1$ примет вид

$$\Theta_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_2\delta(\alpha) + b^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = C_0 = \mathrm{const}\,.$$

□

Справедлива также теорема, обратная к теореме 4.1.

Теорема 4.2. *Условия* (2.6), (2.8), (4.1) (*например, при* $\varkappa = -1$) *являются необходимыми условиями существования первого интеграла* (4.7) *для системы* (3.1), (3.2).

5. Строение первых интегралов для систем с диссипацией

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.1), (3.2) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [**7, 8**]. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (2.1), (2.2). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (2.7), (2.9). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (3.1), (3.2) при втором условии из (4.1) обладает первым интегралом вида (ср. с [**14, 15**])

$$\Theta_0(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \mathrm{const}\,. \tag{5.1}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (5.1), (2.9) также является первым интегралом системы (3.1), (3.2) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta_{b_1}(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 - b_1\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)) \tag{5.2}$$

и (2.9) по отдельности не является первым интегралом системы (3.1), (3.2). Однако отношение функций (5.2), (2.9) является первым интегралом (4.7) системы (3.1), (3.2) (при $\varkappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [**1**]–[**3**].

Литература

1. М. В. Шамолин, “Об интегрируемости в трансцендентных функциях”, *Успехи мат. наук* **53**, No. 3, 209–210 (1998).
2. М. В. Шамолин, “Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия”, *Докл. РАН* **475**, No. 5, 519–523 (2017).
3. М. В. Шамолин, “Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия”, *Докл. РАН* **482**, No. 5, 527–533 (2018).
4. В. В. Козлов, “Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем”, *Прикл. мат. мех.* **79**, No. 3, 307–316 (2015).
5. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, ВИНИТИ, М. (1985).
6. В. В. Трофимов, М. В. Шамолин, “Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем”, *Фундам. прикл. мат.* **16**, No. 4, 3–229 (2010).
7. М. В. Шамолин, “Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил”, *Итоги науки и техники. Сер. “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”* **125**, 5–254 (2013).
8. М. В. Шамолин, “Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам”, *Докл. РАН* **471**, No. 5, 547–551 (2016).
9. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Наука, М. (1987).
10. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Мир, М. (1972).

11. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М. (1971).
12. М. В. Шамолин, “Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к сфере”, *Пробл. мат. анал.* **86**, 139–151 (2016).
13. М. В. Шамолин, “Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере”, *Пробл. мат. анал.* **90**, 107–113 (2018).
14. М. В. Шамолин, “Интегрируемые системы с диссипацией с двумя и тремя степеням свободы”, *Пробл. мат. анал.* **94**, 91–109 (2018).
15. М. В. Шамолин, “Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией”, *Пробл. мат. анал.* **95**, 79–101 (2018).

Статья поступила в редакцию 3 января 2019 г.