М. В. Шамолин*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ К МНОГООБРАЗИЯМ РАЗМЕРНОСТИ 2 И 3**

ВВЕДЕНИЕ

Работа представляет собой изучение случаев интегрируемости динамических систем на касательных расслоениях двумерного или трехмерного многообразий. При этом в исследуемых задачах присутствует диссипация переменного знака.

Изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле «в лоб» интегрировать основное уравнение динамики.

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций [1, 11—13, 16, 17, 20].

Найдены случаи полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом в ряде случаев интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки [21, 22, 26, 27]. По-

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

следний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов).

Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе, обобщающие классическую задачу о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды [28, 29, 32].

Многие результаты данной работы регулярно докладывались на множестве семинаров, в том числе и на семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени профессора В. В. Трофимова [3—10] под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина.

§ 1. ДИНАМИКА НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ДВУМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ

1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к двумерному многообразию.

1.1. Общие обозначения. Рассмотрим гладкое двумерное риманово многообразие M^2 с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, x^2)$ на многообразии порождает аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$.

Рассмотрим также касательное расслоение

$$T_*M^2\{z_2, z_1; x^1, x^2\},$$

где $z = (z_2, z_1)$ — координаты в касательном пространстве.

Если $z_i = \dot{x}^i$, $i = 1, 2$, то уравнения геодезических линий на нем примут вид

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{11}(x)(\dot{x}^1)^2 + 2\Gamma^i_{12}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^2) + \Gamma^i_{22}(x)(\dot{x}^2)^2 = 0, \quad i = 1, 2. \tag{1.1}$$

1.2. Специальные обозначения. Обозначим для наглядности в случае двумерного многообразия координаты (x^1, x^2) через (α, β).

Тогда уравнения (1.1) на касательном расслоении $T_*M^2\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$ примут вид

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2 = 0, \\ &\ddot{\beta} + \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + \Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2 = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Пример 1. В случае сферических координат (α, β), когда метрика на двумерной сфере индуцирована евклидовой метрикой трехмерного пространства, уравнения (1.2) примут вид

$$\ddot{\alpha} - \dot{\beta}^2 \sin\alpha\cos\alpha = 0, \quad \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0, \tag{1.3}$$

т. е. ненулевые коэффициенты связности примут вид

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) = -\sin\alpha\cos\alpha, \quad \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Пример 2. В случае сферических координат (α, β), но когда метрика на двумерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля (см. [33, 34]), уравнения (1.2) примут вид

$$\ddot{\alpha} - \dot{\beta}^2 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \quad \ddot{\beta} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = 0, \tag{1.4}$$

т. е. ненулевые коэффициенты связности примут вид

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha}.$$

1.3. Замены координат касательного пространства. Одной из целей исследования является изучение структуры уравнений (1.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^2.

Рассмотрим замену координат касательного пространства:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= R_1 z_1 + R_2 z_2, \\ \dot{\beta} &= R_3 z_1 + R_4 z_2, \end{aligned} \tag{1.5}$$

которую можно обратить:

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1 \dot{\alpha} + T_2 \dot{\beta}, \\ z_2 &= T_3 \dot{\alpha} + T_4 \dot{\beta}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

при этом R_k, T_k, $k = 1, \ldots, 4$, — функции от α, β, а также

$$RT = E,$$

где

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}.$$

Назовем также уравнения (1.5) (или (1.6)) *новыми кинематическими соотношениями*, т. е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^2.

Справедливы тождества:

$$\begin{aligned}\dot z_1 &= T_{1\alpha}\dot\alpha^2 + T_{1\beta}\dot\alpha\dot\beta + T_{2\alpha}\dot\alpha\dot\beta + T_{2\beta}\dot\beta^2 + T_1\ddot\alpha + T_2\ddot\beta,\\ \dot z_2 &= T_{3\alpha}\dot\alpha^2 + T_{3\beta}\dot\alpha\dot\beta + T_{4\alpha}\dot\alpha\dot\beta + T_{4\beta}\dot\beta^2 + T_3\ddot\alpha + T_4\ddot\beta,\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$T_{k\alpha} = \frac{\partial T_k}{\partial\alpha},\quad T_{k\beta} = \frac{\partial T_k}{\partial\beta},\quad k = 1,\ldots,4.$$

Подставляя в (1.7) уравнения (1.2), имеем:

$$\begin{aligned}\dot z_1 = \dot\alpha^2\{T_{1\alpha} - T_1\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} - T_2\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}\} + \dot\alpha\dot\beta\{T_{1\beta} + T_{2\alpha} - 2T_1\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - 2T_2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\} +\\ + \dot\beta^2\{T_{2\beta} - T_1\Gamma^\alpha_{\beta\beta} - T_2\Gamma^\beta_{\beta\beta}\},\\ \dot z_2 = \dot\alpha^2\{T_{3\alpha} - T_3\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} - T_4\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}\} + \dot\alpha\dot\beta\{T_{3\beta} + T_{4\alpha} - 2T_3\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - 2T_4\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\} +\\ + \dot\beta^2\{T_{4\beta} - T_3\Gamma^\alpha_{\beta\beta} - T_4\Gamma^\beta_{\beta\beta}\},\end{aligned} \tag{1.8}$$

при этом в последней системе вместо $\dot\alpha, \dot\beta$ надо подставить формулы (1.5).

Предложение 1.1. *Система* (1.2) *в той области, где* $\det R(\alpha,\beta) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (1.5), (1.8).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1.2) к эквивалентной системе уравнений (1.5), (1.8) зависит как от замены переменных (1.5) (или (1.6)) (т. е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности Γ^i_{jk}.

Следствие 1.1. *В случае сферических координат* (α,β), *когда метрика на двумерной сфере индуцирована евклидовой метрикой трехмерного пространства (см. также пример* 1), *система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.3), *примет следующий вид*:

$$\begin{aligned}\dot\alpha &= -z_2,\\ \dot z_2 &= -z_1^2\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha},\\ \dot z_1 &= z_1 z_2\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha},\\ \dot\beta &= z_1\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha},\end{aligned} \tag{1.9}$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.9) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Следствие 1.2. *В случае сферических координат* (α, β), *но когда метрика на двумерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля* (см. [40, 41], *а также пример* 2), *система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.4), *примет следующий вид*:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= -z_2, \\
\dot{z}_2 &= -z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\
\dot{z}_1 &= z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\
\dot{\beta} &= z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.10) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

1.4. Полный список первых интегралов для уравнений геодезических. Рассмотрим достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = -z_2, \quad \dot{\beta} = z_1 f(\alpha), \tag{1.11}$$

где $f(\alpha)$ — достаточно гладкая функция.

Тогда справедливо утверждение.

Предложение 1.2. *В случае* (1.11) *уравнения* (1.8) *примут вид*

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 = -\frac{1}{f(\alpha)}\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) z_2^2 + \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2 - \\
- f(\alpha)\Gamma^{\beta}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) z_1^2, \\
\dot{z}_2 = \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) z_2^2 - 2\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) f(\alpha) z_1 z_2 + f^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) z_1^2.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Таким образом, уравнения геодезических (1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений почти всюду эквивалентны составной системе (1.11), (1.12) на многообразии $T_*M^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$.

Для полного интегрирования системы (1.11), (1.12) четвертого порядка необходимо знать, вообще говоря, три независимых первых интеграла.

Следствие 1.3. *Если выполнены свойства*

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\beta}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.13}$$

то система, эквивалентная уравнениям геодезических (1.2), *может быть приведена к следующему виду*:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_2, \\ \dot{z}_2 = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_1^2, \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2, \\ \dot{\beta} = z_1 f(\alpha). \end{cases} \tag{1.14}$$

Предложение 1.3. *Если всюду справедливо равенство*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \tag{1.15}$$

то система (1.14) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{1.16}$$

Предложение 1.4. *Если функция* $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ *является функцией лишь* α:

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{1.17}$$

то система (1.14) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1 \Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{1.18}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp\left\{ 2 \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b) db \right\}.$$

Замечание 1.1. Если выполнено свойство (1.17) и функция $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также является функцией лишь α:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha), \tag{1.19}$$

то в системе (1.14) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на $\dot{\beta}$ отделяется):

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_2, \\ \dot{z}_2 = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) z_1^2, \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2, \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\dot{\beta} = z_1 f(\alpha). \tag{1.21}$$

В частности, если выполнены свойства (1.15), (1.17), то такая независимая подсистема (1.20) появляется.

Предложение 1.5. *Если выполнены условия* (1.15), (1.17), *то система* (1.20), (1.21) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \beta \pm \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f(a)}{\sqrt{C_1^2 \Phi_0^2(a) - C_2^2}}\, da = C_3 = \mathrm{const}, \qquad (1.22)$$

где, после взятия интеграла (1.22), *вместо постоянных* C_1, C_2 *нужно подставить левые части равенств* (1.16), (1.18) *соответственно.*

Теорема 1.1. *Если выполнены условия* (1.15), (1.17), *то система* (1.20), (1.21) *обладает полным набором* (*тремя*) *независимых первых интегралов вида* (1.16), (1.18), (1.22).

§ 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ДВУМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

1. Приведенная система. Теперь несколько модифицируем систему (1.14). При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (2.1) (в отличие от системы (1.14)). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_2, \\ \dot z_2 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d \ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta = z_1 f(\alpha). \end{cases} \qquad (2.1)$$

Замечание 2.1. Система (2.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0, \\ \ddot\beta + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

2. Полный список первых интегралов для системы в потенциальном силовом поле.

Предложение 2.1. *Если всюду справедливо равенство* (1.15) *то система* (2.1) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_1(z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad F_1(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)\,da. \tag{2.3}$$

Предложение 2.2. *Если функция* $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ *является функцией лишь* α (*условие* (1.17)), *то система* (2.1) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1\Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{2.4}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)db\right\}.$$

Замечание 2.2. Если выполнено свойство (1.17) и функция $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также является функцией лишь α (условие (1.19)) то в системе (2.1) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на $\dot\beta$ отделяется):

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_2, \\ \dot z_2 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\dot\beta = z_1 f(\alpha). \tag{2.6}$$

В частности, если выполнены свойства (1.15), (1.17), то такая независимая подсистема (2.5) появляется.

Предложение 2.3. *Если выполнены условия* (1.15), (1.17), *то система* (2.5), (2.6) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \beta \pm \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f(a)}{\sqrt{\Phi_0^2(a)(C_1 - F_1(a)) - C_2^2}}\,da = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.7}$$

где, после взятия интеграла (2.7), *вместо постоянных* C_1, C_2 *нужно подставить левые части равенств* (2.3), (2.4), *соответственно.*

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* (1.15), (1.17), *то система* (2.5), (2.6) *обладает полным набором* (*тремя*) *независимых первых интегралов вида* (2.3), (2.4), (2.7).

§ 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ДВУМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

1. Приведенная система. Теперь несколько модифицируем систему (2.1)). При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $bg(\alpha), b > 0$, в первом уравнении системы (3.1) (в отличие от системы (2.1))) Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_2 + bg(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_1^2, \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \\ \dot{\beta} = z_1 f(\alpha). \end{cases} \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Система (3.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - bg'(\alpha)\dot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} - bg(\alpha) f(\alpha)\dot{\beta} + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

2. Полный список первых интегралов для системы с диссипацией. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы четвертого порядка (3.1) при выполнении свойств (1.15), (1.17). Тогда система (3.1) допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_2 + bg(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) z_1^2, \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\dot{\beta} = z_1 f(\alpha). \tag{3.4}$$

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (3.3) неавтономную систему второго порядка

$$
\begin{aligned}
\frac{dz_2}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) z_1^2}{-z_2 + bg(\alpha)},\\
\frac{dz_1}{d\alpha} &= \frac{\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2}{-z_2 + bg(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$
z_k = u_k g(\alpha), \quad k = 1, 2, \tag{3.6}
$$

приводим систему (3.5) к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
g(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} + g'(\alpha) u_2 &= \frac{F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) g^2(\alpha) u_1^2}{-u_2 g(\alpha) + bg(\alpha)},\\
g(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} + g'(\alpha) u_1 &= \frac{\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] g^2(\alpha) u_1 u_2}{-u_2 g(\alpha) + bg(\alpha)},
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

что, учитывая (1.15), почти всюду эквивалентно

$$
\begin{aligned}
g(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} &= \frac{F_3(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) g(\alpha) u_1^2 + g'(\alpha) u_2^2 - bg'(\alpha) u_2}{-u_2 + b},\\
g(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{-\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) g(\alpha) u_1 u_2 + g'(\alpha) u_1 u_2 - bg'(\alpha) u_1}{-u_2 + b},\\
F_3(\alpha) &= \frac{F(\alpha)}{g(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

А вот теперь для интегрирования системы (3.8) потребуем выполнения следующих двух условий.

- Для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ должно выполняться равенство

$$
\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}; \tag{3.9}
$$

- Для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ должно выполняться равенство

$$
F_3(\alpha) = \lambda g'(\alpha). \tag{3.10}
$$

Условия (3.9) и (3.10) можно переписать соответственно как

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)=\kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|g(\alpha)|; \tag{3.11}$$

$$F(\alpha)=\lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{g^2(\alpha)}{2}. \tag{3.12}$$

Действительно, после выполнения условий (3.9) и (3.10) (или (3.11) и (3.12)) система (3.8) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{\lambda+\kappa u_1^2+u_2^2-bu_2}{(1-\kappa)u_1u_2-bu_1}. \tag{3.13}$$

Уравнение (3.13) имеет вид уравнения Абеля [11, 13, 42]. В частности, при $\kappa=-1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+\lambda}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{3.14}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(z_2,z_1;\alpha)=\frac{z_2^2+z_1^2-bz_2g(\alpha)+\lambda g^2(\alpha)}{z_1g(\alpha)}=C_1=\mathrm{const}. \tag{3.15}$$

Замечание 3.2. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.3) (как часть системы (3.3), (3.4)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [14, 15, 23]. При этом она превращается в систему, консервативную при $b=0$:

$$\begin{cases}\dot\alpha=-z_2,\\ \dot z_2=F(\alpha)+\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)z_1^2,\\ \dot z_1=\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha)+\dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2.\end{cases} \tag{3.16}$$

Система (3.16) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (2.3), (2.4). Преобразуем их. В силу (3.10) (или (3.12)) имеем:

$$\Phi_1(z_2,z_1;\alpha)=z_1^2+z_2^2+2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F(a)\,da=$$

$$=z_1^2+z_2^2+\lambda\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{da}g^2(a)\,da\cong z_1^2+z_2^2+\lambda g^2(\alpha), \tag{3.17}$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью до аддитивной постоянной.

Далее, в силу (1.15) имеем:

$$\Phi_2(z_1;\alpha) = z_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)db\right\} =$$

$$= z_1 f(\alpha)\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(b)f^2(b) + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right]db\right\} \cong$$

$$\cong z_1 \exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(b)f^2(b)db\right\},$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Теперь в силу (3.9) (или (3.11)) последняя величина при $\kappa = -1$ перепишется в виде

$$z_1 \exp\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{db}\ln|g(b)|db\right\} \cong z_1 g(\alpha) \tag{3.18}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.17), (3.18) (или (2.3), (2.4)) также является первым интегралом системы (3.16). Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$z_2^2 + z_1^2 - bz_2 g(\alpha) + \lambda g^2(\alpha) \tag{3.19}$$

и (3.18) по отдельности не является первым интегралом системы (3.3). Однако отношение функций (3.19), (3.18) является первым интегралом системы (3.3) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.3) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.14) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{3.20}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{3.21}$$

и фазовое пространство системы (3.3) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.20).

Таким образом, в силу соотношения (3.14) первое уравнение системы (3.8) при условиях (3.9) и (3.10) и при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{g(\alpha)}{g'(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 - b_*}, \tag{3.22}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + \lambda)}\right\}, \tag{3.23}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.21).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.3) примет вид

$$\int \frac{dg(\alpha)}{g(\alpha)} = \int \frac{(b - u_2)du_2}{2(\lambda - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + \lambda)}\}/2}. \tag{3.24}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|g(\alpha)|. \tag{3.25}$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4\lambda, \tag{3.26}$$

то правая часть равенства (3.24) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \mp \frac{b}{2}I_1, \tag{3.27}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{3.28}$$

При вычислении интеграла (3.28) возможны три случая.

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right| +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \mp C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right| + \text{const}. \tag{3.29}$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{3.30}$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{3.31}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{z_2}{g(\alpha)} - \frac{b}{2}, \tag{3.32}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $b > 2$.

$$\begin{gathered} I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln\left| \frac{\sqrt{b^2-4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln\left| \frac{\sqrt{b^2-4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{3.33}$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{3.34}$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{3.35}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (2.5) при $\kappa = -1$ — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных [24, 25]

Замечание 3.3. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.14).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (ср. с [30, 31]):

$$\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = G\left(g(\alpha), \frac{z_2}{g(\alpha)}, \frac{z_1}{g(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.36}$$

или, другими словами,

$$\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = g(\alpha) \exp\left\{ \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} A(u_2; C_1) du_2 \right\} = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.37}$$

$$A(u_2; C_1) = \frac{u_2 - b}{2(\lambda - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + \lambda)}\}/2}.$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (2.5), (2.6) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (2.5). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (2.6).

Поскольку

$$g(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} = \frac{u_1\big((1-\kappa)u_2 - b\big)g'(\alpha)}{b - u_2}, \quad g(\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{u_1 g(\alpha) f(\alpha)}{b - u_2}, \tag{3.38}$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta} = [(1-\kappa)u_2 - b]\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)f(\alpha)}. \tag{3.39}$$

Опуская дальнейшие выкладки, заключаем, что искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = G_1\left(g(\alpha), \beta, \frac{z_2}{g(\alpha)}, \frac{z_1}{g(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{3.40}$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.3), (3.4) имеет три первых интеграла, выражающихся соотношениями (3.15), (3.36), (3.40), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа).

Теорема 3.1. *Система* (3.3), (3.4) *обладает полным набором* (*тремя*) *независимых первых интегралов. При* $\kappa = -1$ *они имеют вид* (3.15), (3.36), (3.40).

§ 4. О ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

Выше были приведены два содержательных примера (1.3) и (1.4) для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на двумерной сфере, для которых получены случаи интегрируемости динамических систем с диссипацией. Остановимся далее на применении только что рассмотренной методики для двумерных поверхностей вращения.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) задана поверхность вращения следующим уравнением:

$$\rho = \rho(z). \tag{4.1}$$

Уравнения геодезических линий на данной поверхности имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_2(\alpha)\dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} + \Gamma_3(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\Gamma_1(\alpha) = \frac{\rho'(\alpha)\rho''(\alpha)}{1+\rho'^2(\alpha)}, \quad \Gamma_2(\alpha) = \frac{\rho(\alpha)\rho'(\alpha)}{1+\rho'^2(\alpha)}, \quad \Gamma_3(\alpha) = 2\frac{\rho'(\alpha)}{\rho'(\alpha)}, \tag{4.3}$$

где $\alpha = z$, $\beta = \varphi$.

Введем новые кинематические соотношения:

$$\dot{\alpha} = f_1(\alpha)z_2, \quad \dot{\beta} = f_2(\alpha)z_1, \tag{4.4}$$

в результате чего система (4.2), (4.3) перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = f_1(\alpha)z_2, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2\left\{-\Gamma_1(\alpha)f_1(\alpha) - f_1'(\alpha)\right\} + z_1^2\left\{\dfrac{-\Gamma_2(\alpha)f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right\}, \\ \dot{z}_1 = z_2z_1\left\{-\Gamma_3(\alpha)f_1(\alpha) - f_2'(\alpha)\dfrac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}\right\}, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\dot{\beta} = f_2(\alpha)z_1, \tag{4.6}$$

где уравнение (4.6) отделяется в системе четвертого порядка (4.5), (4.6).

Достаточными условиями существования первого интеграла

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = \mathrm{const} \tag{4.7}$$

для системы (4.5), (4.6) является выполнение двух групп условий:

$$\begin{cases} \Gamma_1(\alpha)f_1(\alpha) + f_1'(\alpha) = 0, \\ \frac{\Gamma_2(\alpha)f_2^3(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} + \Gamma_3(\alpha)f_2(\alpha) + f_2'(\alpha) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Уравнения (4.8) имеют следующие решения:

$$\begin{gathered} f_1(\alpha) = \frac{A_1}{\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}}, \\ f_2(\alpha) = \frac{A_1}{\rho(\alpha)\sqrt{A_2A_1^2\rho^2(\alpha) - 1}}, \quad A_2 > 0, \quad A_1, A_2 \in \mathbf{R}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Выбрав функции $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ в качестве решений (4.9), перепишем систему (4.5), (4.6) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 \dfrac{A_1}{\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}}, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2 \Gamma(\alpha), \\ \dot{z}_1 = z_2 z_1 \Gamma(\alpha), \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\dot{\beta} = z_1 \frac{A_1}{\rho(\alpha)\sqrt{A_2 A_1^2 \rho^2(\alpha) - 1}}, \tag{4.11}$$

где

$$\Gamma(\alpha) = \frac{A_1 \rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}(A_2 A_1^2 \rho^2(\alpha) - 1)}. \tag{4.12}$$

Введем теперь в систему (4.10), (4.11) консервативное силовое поле $F(\alpha)$ и диссипацию $g(\alpha), b > 0$, и получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 f_1(\alpha) + b g(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F(\alpha) - z_1^2 \Gamma(\alpha), \\ \dot{z}_1 = z_2 z_1 \Gamma(\alpha), \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\dot{\beta} = z_1 f_2(\alpha). \tag{4.14}$$

Для интегрирования системы (4.13), (4.14) поставим в соответствие системе третьего порядка (4.13) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dz_2}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - \Gamma(\alpha) z_1^2}{z_2 f_1(\alpha) + b g(\alpha)}, \\ \frac{dz_1}{d\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha) z_1 z_2}{z_2 f_1(\alpha) + b g(\alpha)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_k = u_k \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}, \quad k = 1, 2, \tag{4.16}$$

приводим систему (4.15) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} + \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]' u_2 &= \frac{F(\alpha) - \Gamma(\alpha)\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]^2 u_1^2}{-u_2 g(\alpha) + b g(\alpha)}, \\ \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \frac{du_1}{d\alpha} + \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]' u_1 &= \frac{\Gamma(\alpha)\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]^2 u_1 u_2}{-u_2 g(\alpha) + b g(\alpha)}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

что почти всюду эквивалентно

$$\begin{gathered}\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha}=\frac{F_3(\alpha)-\Gamma(\alpha)\frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)}u_1^2-\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]'u_2^2-b\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]'u_2}{u_2+b},\\ \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\frac{du_1}{d\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha)\frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)}u_1u_2-\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]'u_1u_2-b\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]'u_1}{u_2+b},\end{gathered}\tag{4.18}$$

$$F_3(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{g(\alpha)}.$$

А вот теперь для интегрирования системы (4.18) потребуем выполнения следующих двух условий.

- Для некоторого $\kappa\in\mathbf{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma(\alpha)\frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)}=\kappa\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]'.\tag{4.19}$$

- Для некоторого $\lambda\in\mathbf{R}$ должно выполняться равенство

$$F_3(\alpha)=\lambda\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]'.\tag{4.20}$$

Действительно, после выполнения условий (4.19) и (4.20) система (4.18) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{\lambda-\kappa u_1^2-u_2^2-bu_2}{(\kappa-1)u_1u_2-bu_1}.\tag{4.21}$$

Уравнение (4.21) имеет вид уравнения Абеля [11, 13, 42]. В частности, при $\kappa=-1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{-u_2^2-u_1^2-bu_2+\lambda}{u_1}=C_1=\mathrm{const},\tag{4.22}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\begin{gathered}\Theta_1(z_2,z_1;\alpha)=\\ =\frac{-z_2^2f_1^2(\alpha)-z_1^2f_1^2(\alpha)-bz_2g(\alpha)f_1(\alpha)+\lambda g^2(\alpha)}{z_1g(\alpha)f_1(\alpha)}=C_1=\mathrm{const}.\end{gathered}\tag{4.23}$$

Аналогичным образом находятся два других первых интеграла (см. выше, а также [2, 18, 19]).

В частности, свойство (4.19) переписывается в следующем виде:

$$g(\alpha) = \frac{A_1 A_3}{\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}} \left| \frac{\rho^2(\alpha)}{A_2 A_1^2 \rho^2(\alpha) - 1} \right|^{-1/2\kappa} = C_1 = \text{const}, \tag{4.24}$$

$$A_1 \neq 0, \quad A_2 > 0, \quad A_1, A_2, A_3, \kappa \in \mathbf{R}.$$

§ 5. ДИНАМИКА НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЕХМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ

В задачах динамики систем с тремя степенями свободы пространствами положений являются трехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение четырехмерного твердого тела-маятника (обобщенного сферического маятника) в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [35]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [36].

Известен также класс задач о движении точки по трехмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства. В ряде случаев в системах с переменной диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [37].

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией [38] и обобщают ранее рассмотренные.

1. Уравнения геодезических при замене координат. Как известно, в случае трехмерного риманова многообразия M^3 с координатами

(α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^3\{\dot{\alpha},\ \dot{\beta}_1,\ \dot{\beta}_2;\ \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{3} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0,\ i = 1, 2, 3. \tag{5.1}$$

Изучим структуру уравнений (5.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^3. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{3} R^{ij}(x)z_j, \tag{5.2}$$

которую можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^{3} T_{ji}(x)\dot{x}^i,$$

при этом $R^{ij}, T_{ji}, i, j = 1, 2, 3,$ — функции от x^1, x^2, x^3, а также

$$RT = E,$$

где

$$R = (R^{ij}), \quad T = (T_{ji}).$$

Назовем также уравнения (5.2) *новыми кинематическими соотношениями*, т. е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^3.

Справедливы тождества:

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{3} \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{3} T_{ji}\ddot{x}^i,\ \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{3} T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{5.3}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, 2, 3.$$

Подставляя в (5.3) уравнения (5.1), имеем:

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{3} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{3} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q, \tag{5.4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, 2, 3$, надо подставить формулы (5.2).

Другими словами, равенство (5.4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{3} Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k|_{(5.2)} = 0, \tag{5.5}$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{3} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{5.6}$$

Предложение 5.1. *Система* (5.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (5.2), (5.4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (5.1) к эквивалентной системе уравнений (5.2), (5.4) зависит как от замены переменных (5.2) (т. е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

2. Достаточно общий случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_3, \\ \dot{\beta}_1 &= z_2 f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \end{aligned} \tag{5.7}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2, z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (в частности, на поверхностях вращения):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 = 0, \end{cases} \tag{5.8}$$

т. е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (5.7) уравнения (5.4) примут вид

$$
\begin{gathered}
\dot z_1 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \\
- \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_2, \\
\dot z_2 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) z_1^2, \\
\dot z_3 = \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) z_2^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2,
\end{gathered}
\tag{5.9}
$$

и уравнения (5.8) почти всюду эквивалентны составной системе (5.7), (5.9) на многообразии $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Для полного интегрирования системы (5.7), (5.9) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов.

Предложение 5.2. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$
\left\{
\begin{aligned}
2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \\
2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0, \\
\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0,
\end{aligned}
\right.
\tag{5.10}
$$

то система (5.7), (5.9) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$
\Phi_1(z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{5.11}
$$

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы (5.10) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (5.11) для системы (5.7), (5.9) уравнений геодезических (5.8). Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для систем при отсутствии силового поля, или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (5.10) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (5.7) выполнение условий

$$
f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha), \tag{5.12}
$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из (5.10):

$$
2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) \equiv 0. \tag{5.13}
$$

Таким образом, функцию $g(\beta_1)$ будем брать в зависимости от коэффициентов связности, а вот ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 5.3. *Если выполнены свойства* (5.12), (5.13), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{5.14}$$

то система (5.7), (5.9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\ \Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{5.15}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp\left\{2 \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\}.$$

Предложение 5.4. *Если выполнено свойство* (5.12), *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{5.16}$$

а также второе равенство из (5.14) *(*$\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha)$*), то система* (5.7), (5.9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_3(z_1; \alpha, \beta_1) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Phi(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{5.17}$$

$$\Phi(\beta_1) = g(\beta_1) \exp\left\{2 \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \Gamma_2(b)db\right\}.$$

Предложение 5.5. *Если выполнены условия* (5.12), (5.13), (5.14), (5.16), *то система* (5.7), (5.9) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_4(z_2, z_1; \beta) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Phi^2(b) - C_3^2}}\ db = C_4 = \mathrm{const}, \tag{5.18}$$

где, после взятия интеграла (5.18), *вместо постоянных* C_2, C_3 *нужно подставить левые части равенств* (5.15), (5.17), *соответственно.*

При вышеперечисленных условиях система (5.7), (5.9) обладает полным набором (четырьмя) независимых первых интегралов вида (5.11), (5.15), (5.17), (5.18).

3. Уравнения движения на касательном расслоении к трехмерному многообразию в потенциальном силовом поле. Теперь несколько модифицируем систему (5.7), (5.9) при условиях (5.12), (5.13), (5.14), (5.16), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (5.19). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = -z_3,\\
\dot z_3 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_2^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2,\\
\dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2z_3 - \Gamma^1_{22}(\beta_1)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2,\\
\dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1z_3 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha)z_1z_2,\\
\dot\beta_1 = z_2f(\alpha),\\
\dot\beta_2 = z_1f(\alpha)g(\beta_1),
\end{cases}
\tag{5.19}
$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{cases}
\ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,\\
\ddot\beta_1 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\beta_1)\dot\beta_2^2 = 0,\\
\ddot\beta_2 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0.
\end{cases}
$$

Предложение 5.6. *Если выполнены условия предложения* 5.2, *то система* (5.19) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$
\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \mathrm{const},
$$
$$
F_1(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da.
\tag{5.20}
$$

Предложение 5.7. *Если выполнены условия предложений* 5.3, 5.4, *то система* (5.19) *имеет два гладких первых интеграла вида* (5.15), (5.17).

Предложение 5.8. *Если выполнены условия предложения* 5.5, *то система* (5.19) *имеет первый интеграл вида* (5.18).

При вышеперечисленных условиях система (5.19) обладает полным набором (четырьмя) независимых первых интегралов вида (5.20), (5.15), (5.17), (5.18).

4. Уравнения движения на касательном расслоении к двумерному многообразию в силовом поле с диссипацией. Теперь усложним систему (5.19) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2, \\ \dot{z}_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2z_3 - \Gamma^1_{22}(\beta_1)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2, \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1z_3 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha)z_1z_2, \\ \dot{\beta}_1 = z_2 f(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = z_1 f(\alpha)g(\beta_1), \end{cases} \tag{5.21}$$

которая почти всюду эквивалентна

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\beta_1)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 = 0. \end{cases}$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (5.21) при условии (5.13), а также при выполнении равенств

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \tag{5.22}$$

Введем также (по аналогии с (5.13)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (5.10):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{5.23}$$

Для полного ее интегрирования необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$z_1, z_2 \to z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1},$$

система (5.21) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) z^2, \\ \dot{z} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z z_3, \end{cases} \tag{5.24}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_* = \pm z\sqrt{1+z_*^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \dfrac{z z_*}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{5.25}$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{5.26}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (5.24)—(5.26) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (5.24), один — системы (5.25), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (5.26) (т. е. всего четыре).

Теорема 5.1. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{5.27}$$

Тогда система (5.21) *при выполнении равенств* (5.13), (5.22), (5.23) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (5.24) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dz_3}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) z^2}{-z_3 + bg(\alpha)}, \\ \frac{dz}{d\alpha} &= \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z z_3}{-z_3 + bg(\alpha)}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_3 = u_3 \delta(\alpha), \; z = u\delta(\alpha), \tag{5.29}$$

приводим систему (5.28) к следующему виду:

$$\begin{gathered}
\delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha}+\delta'(\alpha)u_3=\frac{F(\alpha)+\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u^2}{-u_3\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)},\\
\delta(\alpha)\frac{du}{d\alpha}+\delta'(\alpha)u=\frac{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\delta^2(\alpha)uu_3}{-u_3\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)},
\end{gathered}\tag{5.30}$$

что, учитывая (5.23), почти всюду эквивалентно

$$\begin{gathered}
\delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha}=\frac{F_3(\alpha)+\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u^2+\delta'(\alpha)u_3^2-b\delta'(\alpha)u_3}{-u_3+b},\\
\delta(\alpha)\frac{du}{d\alpha}=\frac{-\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)uu_3+\delta'(\alpha)uu_3-b\delta'(\alpha)u}{-u_3+b},\\
F_3(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}.
\end{gathered}\tag{5.31}$$

После выполнения условий (5.27) система (5.31) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_3}{du}=\frac{\lambda+\kappa u^2+u_3^2-bu_3}{(1-\kappa)uu_3-bu}.\tag{5.32}$$

Уравнение (5.32) имеет вид уравнения Абеля [11, 13, 42]. В частности, при $\kappa=-1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_3^2+u^2-bu_3+\lambda}{u}=C_1=\mathrm{const},\tag{5.33}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\begin{gathered}
\Theta_1(z_3,z;\alpha)=G_1\left(\frac{z_3}{\delta(\alpha)},\frac{z}{\delta(\alpha)}\right)=\\
=\frac{z_3^2+z^2-bz_3\delta(\alpha)+\lambda\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)}=C_1=\mathrm{const}.
\end{gathered}\tag{5.34}$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (5.24) при $\kappa=-1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (5.33) при $u\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_3-\frac{b}{2}\right)^2+\left(u-\frac{C_1}{2}\right)^2=\frac{b^2+C_1^2}{4}-\lambda.\tag{5.35}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{5.36}$$

и фазовое пространство системы (5.24) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (5.35).

Таким образом, в силу соотношения (5.33) первое уравнение системы (5.31) при условиях (5.23) и при $\varkappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)}\frac{du_3}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_3 + u_3^2) - C_1 U_1(C_1, u_3)}{-u_3 + b}, \tag{5.37}$$

где

$$U_1(C_1, u_3) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_3^2 - bu_3 + \lambda)}\right\}, \tag{5.38}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (5.36).

Тогда дополнительный первый интеграл для системы (5.24) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{z}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const} \tag{5.39}$$

и при $\varkappa = -1$ он найдется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_3)du_3}{2(\lambda - bu_3 + u_3^2) - C_1\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_3^2 - bu_3 + \lambda)}\right\}/2},$$

где

$$u_3 = \frac{z_3}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 необходимо подставить левую часть равенства (5.34). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (5.34), (5.39) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первый интеграл для системы (5.25) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \mathrm{const}, \tag{5.40}$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (5.17). А дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (5.26), находится по аналогии с (5.18):

$$\Theta_4(z_*;\beta) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3^2\Phi^2(b)-1}}\, db = C_4 = \mathrm{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо C_3 необходимо подставить левую часть равенства (5.40).

§ 6. СТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (5.24) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [37]. При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (5.20), (5.15). В силу (5.27)

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da \cong z^2 + z_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \quad (6.1)$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом, в силу (5.23) и (5.27)

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) =$$
$$= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} f(\alpha) \exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\} \cong z\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \quad (6.2)$$

где «$\cong$» означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (6.1), (6.2) (или (5.20), (5.15)) также является первым интегралом системы (5.24) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$z^2 + z_3^2 - bz_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \quad (6.3)$$

и (6.2) по отдельности не является первым интегралом системы (5.24). Однако отношение функций (6.3), (6.2) является первым интегралом системы (5.24) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [38].

§ 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{7.1}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{7.2}$$

Случай (7.1) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [39]. Случай (7.2) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на трехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [40]. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на трехмерной сфере. В случае (7.1), если

$$\delta(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos\alpha},$$

то система описывает пространственное движение четырехмерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [41]. В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad \delta(\alpha) = \sin\alpha,$$

то система описывает также обобщенный четырехмерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т. е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985.
2. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1988.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Трофимов Валерий Владимирович // СМФН. 2007. Т. 23. С. 5—15.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского, М. В. Шамолина, С. А. Агафонова // СМФН. 2007. Т. 23. Геометрия и механика. С. 16—45.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Соврем. матем. и её прил. 2009. Т. 62. Геометрия и механика. С. 3—15.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Соврем. матем. и её прил. 2009. Т. 65. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. С. 3—10.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского, М. В. Шамолина, С. А. Агафонова // Соврем. матем. и её прил. 2012. Т. 76. Геометрия и механика. С. 3—10.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова // Соврем. матем. и её прил. 2015. Т. 88. Геометрия и механика.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством

С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Соврем. матем. и её прил. 2015. Т. 98. Геометрия и механика. С. 3—8.

10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Соврем. матем. и её прил. 2016. Т. 100. Геометрия и механика. С. 3—11.
11. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38, вып. 1. С. 3—67.
12. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией // Соврем. матем. и её прил. 2016. Т. 100. Геометрия и механика. С. 76—133.
13. *Пуанкаре А.* Новые методы в небесной механике // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1972.
14. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16, вып. 4. С. 3—229.
15. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133—135.
16. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. – М.: Наука, 1976.
17. *Шамолин М. В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 65—68.
18. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН 1998. Т. 53, вып. 3. С. 209—210.
19. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. 1999. Т. 364, № 5. С. 627—629.
20. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 5. С. 22—28.
21. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // УМН. 2002. Т. 57, вып. 1. С. 169—170.
22. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости // Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 4. С. 482—485.
23. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен. 2007. 352.
24. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учете вращательных производных момента силы ее воздействия // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 3. С. 187—192.

25. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // УМН. 2007. Т. 62, вып. 5. С. 169—170.

26. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, вып. 3. С. 3—237.

27. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 3. С. 43—49.

28. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем // Соврем. матем. и её прил. 2009. Т. 62. Геометрия и механика. С. 131—171.

29. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 3. С. 339—343.

30. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. 2011. Т. 437, № 2. С. 190—193.

31. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Докл. РАН. 2012. Т. 444, № 5. С. 506—509.

32. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Докл. РАН. 2012. Т. 442, № 4. С. 479—481.

33. *Шамолин М. В.* Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Соврем. матем. и её прил. 2012. Т. 76. Геометрия и механика. С. 84—99.

34. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в пространственной динамике твердого тела в неконсервативном поле сил // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 287—350.

35. *Шамолин М. В.* Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. № 3. С. 11—14.

36. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы в динамике на касательном расслоении к сфере // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. № 2. С. 25—30.

37. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к сфере // Пробл. матем. анализа. 2016. Вып. 86. С. 139—151.

38. *Шамолин М. В.* Трансцендентные первые интегралы динамических систем на касательном расслоении с сфере // Соврем. матем. и её прил. Т. 100. Геометрия и механика. 2016. С. 58—75.

39. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Докл. РАН. 2016. Т. 471, № 5. С. 547—551.
40. *Шамолин М. В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Ч. 1 // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. 2017. Т. 134. С. 6—128.
41. *Шамолин М. В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Ч. 2 // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. 2017. Т. 135. С. 3—93.
42. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л.: ОНТИ, 1936.