Н. Л. Поляков, М. В. Шамолин*

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ АГРЕГИРОВАНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть дано конечное непустое множество (альтернатив) A и фиксировано натуральное число r. Во избежание рассмотрения тривиальных случаев будем предполагать, что $2 \leqslant r < |A|$, если явно не указаны иные ограничения. Множество всех r-элементных подмножеств множества A обозначается символом $[A]^r$:

$$[B]^r \coloneqq \bigl\{C \subseteq B \colon |C| = r\bigr\}.$$

Для каждого множества $B \subseteq A$ в соответствии с [1] и [2] (индивидуальные) *r-предпочтения* на множестве B моделируются r-функциями выбора, т. е. функциями $\mathfrak{c} \colon [B]^r \to B$, удовлетворяющими условию

$$\bigl(\forall p \in [B]^r\bigr)\ \mathfrak{c}(p) \in p.$$

Множество всех r-функций выбора на множестве B обозначается символом $\mathfrak{C}_r(B)$. Заметим, что формальное теоретико-множественное определение функции дает, что для любого множества X существует единственная (пустая) функция $\varnothing \colon \varnothing \to X$, поэтому, если $|B| < r$, то $\mathfrak{C}_r(B) = \{\varnothing\}$ (мы будем пользоваться этим в дальнейшем).

Любую r-функцию выбора $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(B)$ будем называть *рациональной*, если существует такой линейный порядок $\prec$ на множестве B, что для каждого множества $p \in [B]^r$ значение $\mathfrak{c}(p)$ есть максимальный элемент множества p относительно порядка $\prec$. Множество всех рациональных r-функций выбора на множестве B обозначается символом $\mathfrak{R}_r(B)$.

Замечание 1. $\mathfrak{R}_2(B) = \mathfrak{C}_2(B)$ для любого двухэлементного множества $B \subseteq A$.

В настоящей работе мы в основном будем рассматривать только случай $r = 2$*. В этом случае предпочтения $\mathfrak{c}$ могут быть отождествлены с бинарным связным асимметричным отношением

$$P_{\mathfrak{c}} \rightleftharpoons \big\{(a,b) \in B^2 \colon a \neq b \text{ и } \mathfrak{c}(\{a,b\}) = b\big\}$$

или, если угодно, с *полным ориентированным графом* (*турниром*) $\Gamma_{\mathfrak{c}} \rightleftharpoons (B, P_{\mathfrak{c}})$.

Предложение 1. *Для любой 2-функции выбора на множестве B, $|B| \geqslant 2$, следующие условия эквивалентны*:

1) *функция $\mathfrak{c}$ рациональна,*
2) *отношение $P_{\mathfrak{c}}$ есть отношение строго линейного порядка,*
3) $\mathfrak{c}(\{\mathfrak{c}(\{x,y\}),z\}) = \mathfrak{c}(\{x,\mathfrak{c}(\{y,z\})\})$ *для всех $x,y,z \in B$ ($x \neq y$ и $y \neq z$).*

Для каждой перестановки σ множества A, множества $B \subseteq A$ и функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(B)$ символом σB обозначается множество

$$\{\sigma(x) \colon x \in B\},$$

а символом $\mathfrak{c}_\sigma$ r-функция выбора на множестве σB, заданная равенствами

$$\mathfrak{c}_\sigma(p) = \sigma^{-1}\big(\mathfrak{c}(\sigma p)\big)$$

для всех $p \in [B]^r$. Для каждого множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$ и перестановки σ множества A положим $\mathfrak{D}_\sigma \rightleftharpoons \{\mathfrak{c}_\sigma \colon \mathfrak{c} \in \mathfrak{D}\}$. Множество

$$\mathbb{D} \subseteq \bigcup_{B \subseteq A} \mathscr{P}\big(\mathfrak{C}_r(B)\big)$$

называется *симметричным*, если

$$\mathfrak{D} \in \mathbb{D} \Rightarrow \mathfrak{D}_\sigma \in \mathbb{D}$$

для любого множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$ и перестановки σ множества A. Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ называется *симметричным*, если синглетон $\{\mathfrak{D}\}$ симметричный.

Для любых множеств $C \subseteq B \subseteq A$ и функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(B)$ символом $\mathfrak{c}_{[C]}$ обозначается ограничение $\mathfrak{c} \restriction [C]^r$ функции $\mathfrak{c}$ на множество $[C]^r$. Для любого множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$ положим $\mathfrak{D}_{[C]} \rightleftharpoons \{\mathfrak{c}_{[C]} \colon \mathfrak{c} \in \mathfrak{D}\}$. Заметим, что, если $|C| < r$ и $\mathfrak{c} \in C_r(B)$, то $\mathfrak{c}_{[C]} = \varnothing$ и, значит $\mathfrak{D}_{[C]} = \{\varnothing\}$ для любого непустого множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$.

---

*Из результатов [2, 3] можно извлечь, что общий случай почти не добавляет новых комбинаторных эффектов.

Определение 1. *Функцией адаптации* (r-предпочтений на множестве A) называется любая функция

$$\mathcal{A}\colon \mathfrak{C}_r(A) \times \Big(\bigcup_{B \subseteq A} \mathfrak{C}_r(B) \Big) \to \mathfrak{C}_r(A),$$

удовлетворяющая условиям: для всех множеств $B \subseteq A$ и функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A)$ и $\mathfrak{d} \in \mathfrak{C}_r(B)$

1) $\mathcal{A}(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})_{[B]} = \mathfrak{d}$,
2) если $\mathfrak{c}_{[B]} = \mathfrak{d}$, то $\mathcal{A}(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{c}$.

Для каждого множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, множества $B \subseteq A$ и функции $\mathfrak{d} \in \mathfrak{C}_r(B)$ положим $\mathcal{A}(\mathfrak{D}, \mathfrak{d}) \rightleftharpoons \{\mathcal{A}(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})\colon \mathfrak{c} \in \mathfrak{D}\}$. Функция адаптации $\mathcal{A}$ *сохраняет* множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, если

$$\mathcal{A}(\mathfrak{D}, \mathfrak{d}) \subseteq \mathfrak{D}$$

для всех множеств $B \subseteq A$ и функций $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}_{[B]}$. Заметим, что из определения функции адаптации следует, что условие $\mathcal{A}(\mathfrak{D}, \mathfrak{d}) \subseteq \mathfrak{D}$ равносильно условию $\mathcal{A}(\mathfrak{D}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{D}$ для любой функций $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}_{[B]}$, $B \subseteq A$.

Пример 1. Пусть $r = 2$ и $|A| = 3$. Определим функцию адаптации $\mathcal{A}$ следующим образом. Пусть $B = \{x, y\} \in [A]^2$, $\mathfrak{c} \in \mathfrak{R}_2(A)$ и $\mathfrak{d} \in \mathfrak{R}_2(B) = \mathfrak{C}_2(B)$. Для простоты вместо рациональных функций функций $\mathfrak{c}$ будем говорить о соответствующих линейных порядках $P_{\mathfrak{c}}$. Если x, y есть «соседние» альтернативы относительно $P_{\mathfrak{c}}$, то отношение $P_{\mathcal{A}(\mathfrak{c},\mathfrak{d})}$ есть линейный порядок, который продолжает порядок $P_{\mathfrak{d}}$ и «оставляет элемент $z \in A \setminus \{x, y\}$ на своем месте». Если же x, y есть крайние альтернативы относительно $P_{\mathfrak{c}}$, а относительно порядка $P_{\mathfrak{d}}$ они «переставлены местами», то отношение $P_{\mathcal{A}(\mathfrak{c},\mathfrak{d})}$ есть линейный порядок, который продолжает порядок $P_{\mathfrak{d}}$ и «перемещает средний элемент $z \in A \setminus \{x, y\}$ в максимальную позицию». Во всех остальных случаях определим функцию $\mathcal{A}$ произвольно (соблюдая условия определения 1).

Функцию $\mathcal{A}$ на множестве $\mathfrak{R}_2(A) \times \Big(\bigcup_{B \in [A]^2} \mathfrak{R}_2(B) \Big)$ можно наглядно представить следующей таблицей. Пусть $P_{\mathfrak{c}} = x < y < z$. Тогда

$P_{\mathfrak{d}}$	$P_{\mathcal{A}(\mathfrak{c},\mathfrak{d})}$	$P_{\mathfrak{d}}$	$P_{\mathcal{A}(\mathfrak{c},\mathfrak{d})}$
$x < y$	$x < y < z$	$y < x$	$y < x < z$
$y < z$	$x < y < z$	$z < y$	$x < z < y$
$x < z$	$x < y < z$	$z < x$	$z < x < y$

Легко заметить, что $\mathcal{A}$ есть симметричная функция адаптации, которая сохраняет множество $\mathfrak{R}_2(A)$.

Пусть фиксировано конечное непустое множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ (агентов). Во избежание рассмотрения тривиальных случаев будем предполагать $n \geqslant 2$. Динамическим *профилем* (агентов) будем называть любую пару $(\mathbf{c}, \mathcal{A})$, где $\mathbf{c} \in \big(\mathfrak{C}_r(A)\big)^n$ и $\mathcal{A}$ есть функция адаптации r-предпочтений на множестве A.

Функцией агрегирования (r-предпочтений на множестве $B \subseteq A$) называется любая функция

$$f\colon \big(\mathfrak{C}_r(B)\big)^n \to \mathfrak{C}_r(B).$$

Функция агрегирования удовлетворяет

1) *условию консервативности* (**K**), если

$$f(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n)(p) \in \big\{\mathfrak{c}_1(p), \mathfrak{c}_2(p), \ldots, \mathfrak{c}_n(p)\big\}$$

для всех $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n \in \mathfrak{C}_r(B)$ и $p \in [B]^r$;

2) *первому условию независимости от посторонних альтернатив* ($\mathbf{IIA}_1$), если

$$\big(\mathfrak{c}_1(p), \mathfrak{c}_2(p), \ldots, \mathfrak{c}_n(p)\big) = \big(\mathfrak{c}'_1(p), \mathfrak{c}'_2(p), \ldots, \mathfrak{c}'_n(p)\big) \implies \\ \implies f(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n)(p) = f(\mathfrak{c}'_1, \mathfrak{c}'_2, \ldots, \mathfrak{c}'_n)(p)$$

для всех $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{c}'_2, \ldots, \mathfrak{c}'_n \in \mathfrak{C}_r(B)$ и $p \in [B]^r$.

3) *второму условию независимости от посторонних альтернатив* ($\mathbf{IIA}_2$), если

$$\big(\mathfrak{c}_1(p), \mathfrak{c}_2(p), \ldots, \mathfrak{c}_n(p)\big) = \big(\mathfrak{c}_1(q), \mathfrak{c}_2(q), \ldots, \mathfrak{c}_n(q)\big) \implies \\ \implies f(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n)(p) = f(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n)(q)$$

для всех $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n \in \mathfrak{C}_r(B)$ и $p, q \in [B]^r$.

Замечание 2. В случае $r \leqslant 2$ второе условие независимости от посторонних альтернатив следует из консервативности, а условие консервативности эквивалентно условию единогласия $\mathbf{U}$:

$$\mathfrak{c}_1(p) = \mathfrak{c}_2(p) = \ldots = \mathfrak{c}_n(p) = a \implies f(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n)(p) = a$$

для всех $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n \in \mathfrak{C}_r(B)$, $p \in [B]^2$ и $a \in p$.

Функции агрегирования, которые удовлетворяют $\mathbf{K}$, $\mathbf{IIA}_1$ и $\mathbf{IIA}_2$ будем называть *локальными**. Множество всех локальных функций агрегирования $f\colon \big(\mathfrak{C}_r(B)\big)^n \to \mathfrak{C}_r(B)$ обозначается $\mathcal{L}_{n,r}(B)$.

*Для случая $r = 2$ условия локальности, рассматриваемые в настоящей работе, полностью соответствуют условиям локальности из [4—6].

Локальные функции агрегирования допускают следующее удобное описание. Каждая последовательность из множества B^n является (или отождествляется с) функцией $\mathbf{a}\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to B$; поэтому для любой n-ки $\mathbf{a} \in B^{<\omega}$ мы употребляем стандартные обозначения $\operatorname{dom}\mathbf{a}$ и $\operatorname{ran}\mathbf{a}$ для ее области определения и области значений соответственно. Будем использовать обозначение B^n_r для множества $\{\mathbf{a} \in B^n \colon |\operatorname{ran}\mathbf{a}| = r\}$. В естественном смысле будем употреблять обозначения

$$B^n_{\leqslant r} \rightleftharpoons \bigcup_{k \leqslant r} B^n_k, \quad B^{<\omega}_{\leqslant r} \rightleftharpoons \bigcup_{n<\omega} B^n_{\leqslant r}, \quad B^{<\omega}_{\geqslant r} \rightleftharpoons \bigcup_{r \leqslant n < \omega} B^n_{\geqslant r}$$

и т. п. Любая функция $g\colon B^n_{\leqslant r} \to B$, удовлетворяющая условию

$$(\forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n_{\leqslant r}) \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} (g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i)$$

называется (n-местной) *консервативной r-функцией* на множестве B.

Предложение 2. *Пусть $|B| \geqslant r$. Тогда для каждой функции агрегирования $f\colon\ (\mathfrak{C}_r(B))^n \to \mathfrak{C}_r(B)$, удовлетворяющей условиям* $\mathbf{K}$, $\mathbf{IIA}_1$ *и* $\mathbf{IIA}_2$, *существует единственная n-местная консервативная r-функция $\hat{f}$ на множестве B, для которой*

$$f(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n)(p) = \hat{f}\big(\mathfrak{c}_1(p), \mathfrak{c}_2(p), \ldots, \mathfrak{c}_n(p)\big)$$

для всех $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n \in \mathfrak{C}_r(B)$ и $p \in [B]^r$.

Для каждой локальной функции агрегирования f r-предпочтений на множестве B и каждого множества $C \subseteq B$, $|C| \geqslant r$, следующим образом корректно определена локальная функция агрегирования $f_{[C]}$ r-предпочтений на множестве C: для любых $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n \in \mathfrak{C}_r(C)$

$$f_{[C]}(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n) = f(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_n),$$

где $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_n$ есть произвольные r-функции выбора на множестве B, ограничения которых на множество $[C]^r$ совпадают с функциями $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n$ соответственно. Легко заметить, что

$$\hat{f}_{[C]} = \hat{f} \restriction C^n_{\leqslant r}.$$

С этого момента мы будем, как правило, опускать надстрочный символ $\hat{}$ в выражении $\hat{f}$, отождествляя каждую локальную функцию агрегирования f и соответствующую консервативную r-функцию $\hat{f}$.

Пусть даны функция агрегирования $f\colon \big(\mathfrak{C}_r(B)\big)^n \to \mathfrak{C}_r(B)$ и множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$. Обозначим

$$f(\mathfrak{D}) \rightleftharpoons \big\{f(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n) \colon \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n \in \mathfrak{D}\big\}.$$

Функция агрегирования f *сохраняет* множество $\mathfrak{D}$, если

$$f(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}.$$

Замечание 3. Каждая функция агрегирования $f\colon \big(\mathfrak{C}_r(B)\big)^n \to \mathfrak{C}_r(B)$ сохраняет пустое множество и множество $\mathfrak{C}_r(B)$. Если функция агрегирования f удовлетворяет условию единогласия $\mathbf{U}$, то она сохраняет любое одноэлементное множество. Кроме того, в этом случае f сохраняет $\mathfrak{D}$ тогда и только тогда, когда $f(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}$.

Для локальных функций агрегирования f операцию $f(\mathfrak{D})$ и отношение сохранения функцией f множества $\mathfrak{D}$ можно естественным образом распространить на множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(C)$, положив

$$f(\mathfrak{D}) \rightleftharpoons \big\{ f_{[C]}(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n) \colon \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n \in \mathfrak{D} \big\}.$$

Для каждой локальной функции агрегирования $f\colon \big(\mathfrak{C}_r(B)\big) \to \mathfrak{C}_r(B)$ символом $\mathrm{Inv}(f)$ мы будем обозначать множество всех множеств

$$\mathfrak{D} \in \bigcup_{C \subseteq B} \mathscr{P}\big(\mathfrak{C}_r(C)\big),$$

каждое из которых сохраняет функция f*.

Замечание 4. Для каждой локальной функции агрегирования f r-предпочтений на множестве B множество $\mathrm{Inv}(f)$ содержит пустое множество, все множества $\mathfrak{C}_r(C)$, $C \subseteq B$, и все одноэлементные множества $\mathfrak{D} \in \bigcup\limits_{C \subseteq B} \mathscr{P}\,(\mathfrak{C}_r(C))$. Кроме того, множество $\mathrm{Inv}(f)$ замкнуто относительно ограничений, т. е. если $\mathfrak{D} \in \mathrm{Inv}(f) \cap \mathscr{P}\,(\mathfrak{C}_r(C))$ и $D \subseteq C$, то $\mathfrak{D}_{[D]} \in \mathrm{Inv}(f)$.

С этого момента мы будем опускать нижний индекс $[C]$ в выражении $f_{[C]}$, считая что каждая локальная функция агрегирования r-предпочтений на множестве B автоматически задает локальные функции агрегирования r-предпочтений на любом множестве $C \subseteq B$.

Для каждого множества $\mathcal{F}$ локальных функций агрегирования положим

$$\mathrm{Inv}(\mathcal{F}) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Inv}(f).$$

---

*В теории замкнутых классов дискретных функций символ $\mathrm{Inv}(f)$ используется для обозначения множества предикатов, которые сохраняет функция f. В [3] показано, что отношение сохранения функцией f предиката P и отношения функцией f множества функций F суть близкородственные понятия (по существу, одно получается из другого переводом на другой язык). Поэтому мы не опасаемся разночтений, употребляя символ $\mathrm{Inv}(f)$ в новом смысле.

Если $\mathfrak{D} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{F})$, будем говорить, что множество $\mathcal{F}$ *сохраняет* множество $\mathfrak{D}$.

Определение 2. Любую пару $(f, \mathcal{A})$, где f есть локальная функция агрегирования, а $\mathcal{A}$ есть функция адаптации r-предпочтений на множестве A, будем называть *динамической системой агрегирования* (над множеством r-предпочтений на множестве A). Множество всех динамических систем агрегирования над множеством r-предпочтений на множестве A будем обозначать символом $V_r(A)$.

Жребием на множестве A будем называть любое подмножество множества $\mathscr{P}(A)$, которое линейно упорядочено отношением включения и содержит множества $\varnothing$ и A. Очевидно, любой жребий J допускает (единственную) естественную нумерацию $J = \{A_0, A_1, \dots, A_m\}$, $m < \omega$, удовлетворяющую условию

$$1 \leqslant i < j \leqslant m \Rightarrow A_i \subsetneq A_j$$

(и, следовательно, $A_0 = \varnothing$ и $A_m = A$). В дальнейшем записывая

$$J = \{A_0, A_1, \dots, A_m\},$$

мы имеем в виду, что вышеприведенное условие выполнено.

Множество всех жребиев $J = \{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ на множестве A с условием $|A_1| \geqslant r$ будем обозначать символом $\mathcal{J}_r(A)$. Для каждого жребия $J = \{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ и перестановки σ множества A символом J_σ обозначается жребий $\{\sigma A_0, \sigma A_1, \dots, \sigma A_m\}$. Очевидно, если $J \in \mathcal{J}_r(A)$, то $\sigma J \in \mathcal{J}_r(A)$. Множество $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}(A)$ жребиев на множестве A будем называть симметричным, если

$$J \in \mathcal{J} \Rightarrow J_\sigma \in \mathcal{J}$$

для любого жребия J на множестве A.

Основным понятием данной статьи является понятие потока на множестве предпочтений $\mathfrak{D}$ по жребию J (при заданной схеме последовательного агрегирования).

Определение 3. Пусть даны динамическая система агрегирования $S = (f, \mathcal{A}) \in V_r(A)$, множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ и жребий

$$J = \{A_0, A_1, \dots, A_m\} \in \mathcal{J}_r(A).$$

Потоком $\Pi_S(\mathfrak{D}, J)$ (из множества $\mathfrak{D}$ по жребию J) назовем пару

$$\big(\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J), \mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J)\big),$$

для которой

1) $\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \subseteq \bigcup\limits_{B \in J} \mathfrak{C}_r(B)$, причем множество $\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_r(A_0)$ не пусто (т. е. $\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_r(A_0) = \{\varnothing\}$),
2) $\mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J)$ есть семейство $\{\mathfrak{D}_\mathfrak{c}\} \subseteq \bigcup\limits_{B \in J} \mathscr{P}\big(\mathfrak{C}_r(B)\big)$, индексированное функциями $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \setminus \mathfrak{C}_r(A)$,
3) для всех k, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, и $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J)$
   a) $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A_k) \implies \mathfrak{D}_\mathfrak{c} = \mathcal{A}(\mathfrak{D}, \mathfrak{c})_{[A_{k+1}]}$
   b) $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A_{k+1}) \iff \mathfrak{c} \in f(\mathfrak{D}_\mathfrak{d})$ для некоторой функции $\mathfrak{d} \in \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_r(A_k)$.

Предложение 3. *Условия 1—4 определения 3 задают ровно один поток* $\Pi_S(\mathfrak{D}, J) = \big(\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J), \mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J)\big)$. *При этом*

1) *множество* $\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J)$ *замкнуто относительно ограничений на множества* $B \in J$, *т. е. для всех* $i, j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ *и* $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_r(A_j)$
$$i \leqslant j \implies \mathfrak{c}_{[A_i]} \in \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J),$$
2) *для всех* i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, *и* $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_r(A_i)$
$$\mathfrak{D}_\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{C}_r(A_{i+1}) \quad \text{и} \quad (\mathfrak{D}_\mathfrak{c})_{[A_i]} = \big(f(\mathfrak{D}_\mathfrak{c})\big)_{[A_i]} = \{\mathfrak{c}\},$$
3) $\mathfrak{D}_\mathfrak{c} \cap \mathfrak{D}_\mathfrak{d} \neq \varnothing \iff f(\mathfrak{D}_\mathfrak{c}) \cap f(\mathfrak{D}_\mathfrak{d}) \neq \varnothing \iff \mathfrak{c} = \mathfrak{d}$ *для всех* $\mathfrak{c}, \mathfrak{d} \in \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \setminus \mathfrak{C}_r(A)$,

Определение 4. Динамическая система агрегирования $S = (f, \mathcal{A}) \in V_r(A)$ *сохраняет* множество предпочтений $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ относительно жребия $J \in \mathcal{J}_r(A)$, если

1) функция адаптации $\mathcal{A}$ сохраняет множество $\mathfrak{D}$,
2) функция агрегирования f сохраняет каждое из множеств $\mathfrak{C} \in \mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J)$, т. е.
$$\mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J) \subseteq \operatorname{Inv}(f).$$

Динамическая система агрегирования S *сохраняет* множество предпочтений $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ относительно множества жребиев $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_r(A)$, если она сохраняет множество $\mathfrak{D}$ относительно каждого жребия $J \in \mathcal{J}$.

Предложение 4. *Если динамическая система агрегирования* S сохраняет *множество предпочтений* $\mathfrak{D}$ *относительно жребия* $J = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$, *то поток* $\Pi_S(\mathfrak{D}, J) = \big(\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J), \mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J)\big)$ *«тривиализуется»*:

1) $\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) = \bigcup\limits_{k \leqslant m} \mathfrak{D}_{[A_k]}$,
2) *если* $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}_{[A_k]}$ *и* $k < m$, *то* $\mathfrak{D}_\mathfrak{c} = \{\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}_{[A_{k+1}]} \colon \mathfrak{d}_{[A_k]} = \mathfrak{c}\}$.

Доказательство. Легко, индукцией по i $(0 \leqslant i < m)$. $\square$

Предложение 5. *Пусть дан жребий* $J = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\} \in \mathcal{J}_r(A)$, *и пусть функции* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ *адаптации* r*-предпочтений на множестве* A *сохраняют множество* $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$. *Тогда для любой локальной функции* f *агрегирования* r*-предпочтений на множестве* A *динамическая система агрегирования* $S_1 = (f, \mathcal{A}_1)$ *сохраняет множество* $\mathfrak{D}$ *относительно жребия* J *тогда и только тогда, когда динамическая система агрегирования* $S_2 = (f, \mathcal{A}_2)$ *сохраняет множество* $\mathfrak{D}$ *относительно жребия* $\mathcal{J}$.

Доказательство. Пусть динамическая система агрегирования $S_1 = (f, \mathcal{A}_1)$ сохраняет множество $\mathfrak{D}$ относительно жребия J. Для каждого номера $i \in \{1, 2\}$ рассмотрим потоки

$$\Pi_{S_i}(\mathfrak{D}, J) = \big(\mathfrak{C}_{S_i}(\mathfrak{D}, J), \mathbb{F}_{S_i}(\mathfrak{D}, J)\big).$$

Обозначим

$$\mathbb{F}_{S_i}(\mathfrak{D}, J) = \{\mathfrak{D}^i_{\mathfrak{c}}\}, \quad \mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_{S_i}(\mathfrak{D}, J) \setminus \mathfrak{C}_r(A).$$

Далее с использованием предложения 4 индукцией по i $(0 \leqslant i < m)$ без труда доказывается конъюнкция трех утверждений:

a) $\mathfrak{C}_{S_1}(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_r(A_i) = \mathfrak{C}_{S_2}(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_r(A_i)$,

b) $\mathfrak{D}^1_{\mathfrak{c}} = \mathfrak{D}^2_{\mathfrak{c}}$ для каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_{S_1}(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_r(A_i)$,

c) f сохраняет множество $\mathfrak{D}^2_{\mathfrak{c}}$ для каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_{S_2}(\mathfrak{D}, J) \cap \cap\, \mathfrak{C}_r(A_i)$.

Очевидно, этого достаточно для доказательства предложения 5. $\square$

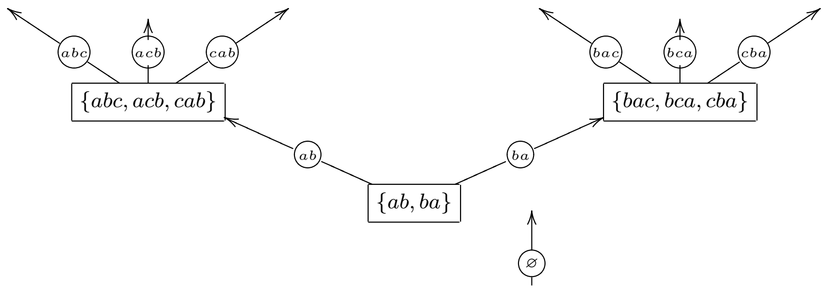
Определение 5. Локальная функция f агрегирования r-предпочтений на множестве A *динамически сохраняет* множество предпочтений $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ относительно множества жребиев $\mathcal{J} \in \mathcal{J}_r(A)$, если динамическая система агрегирования $(f, \mathcal{A})$ сохраняет множество $\mathfrak{D}$ относительно множества $\mathcal{J}$ для некоторой (любой) функции адаптации $\mathcal{A}$ r-предпочтений на множестве A, которая сохраняет множество $\mathfrak{D}$. Множество всех локальных функций агрегирования r-предпочтений на множестве A, которые динамически сохраняют множество $\mathfrak{D}$ относительно множества $\mathcal{J}$ обозначается символом $\mathrm{Pol}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$.

Пример 2. Поток $\Pi_S(\mathfrak{D}, J) = \big(\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J), \mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J)\big)$ удобно представлять в виде древовидной схемы, вершины которой взаимно-однозначно соответствуют множествам $\mathfrak{E} \in \mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J)$ (и помечены именами этих множеств), а дуги функциям $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J)$ (и помечены именами этих функций). Дуга $\mathfrak{c}$ исходит из вершины $\mathfrak{E}$, если $\mathfrak{c} \in f(\mathfrak{E})$ (по пункту 3 предложения 3 такое множество $\mathfrak{E}$ определено однозначно), и заходит в вершину $\mathfrak{D}_{\mathfrak{c}}$. У дуги $\mathfrak{c} = \varnothing$ нет начальной вершины, а у дуг $\mathfrak{d} \in \mathfrak{C}_r(A)$ нет конечных вершин.

Пусть $A = \{a, b, c\}$ и ∂ есть функция агрегирования по правилу большинства:

$$\hat{\partial}(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ z, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ниже представлена схема для потока функции $\Pi_S(\mathfrak{D}, J)$ для динамической системы агрегирования $S = (\partial, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ есть произвольная функция адаптации, сохраняющая множество $\mathfrak{R}_2(A)$, из множества $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}_2(\{a, b, c\})$ по жребию $J = \{\varnothing, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$. Мы используем тривиальное наблюдение о том, что функция большинства динамически сохраняет множество $\mathfrak{R}_2(\{a, b, c\})$ относительно жребия J (и даже относительно множества жребиев $\{J_\sigma : \sigma$ есть перестановка множества $A\}$). Для краткости любой линейный порядок $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ мы записываем в виде последовательности $x_1 x_2 \ldots x_k$.



Предложение 6. *Пусть даны симметричное множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ и симметричное множество $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_r(A)$, а локальная функция*

$$f : \big(\mathfrak{C}_r(A)\big)^n \to \mathfrak{C}_r(A)$$

динамически сохраняет множество $\mathfrak{D}$ относительно множества $\mathcal{J}$. Тогда множество $\bigcup\limits_{J \in \mathcal{J}} \mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J)$ симметрично.

§ 2. МЕТОД КЛОНОВ И ОСНОВНАЯ СТРУКТУРНАЯ ТЕОРЕМА

Метод клонов в теории коллективного выбора был по существу предложен С. Шелахом в [1] и развит авторами в [2, 7]. В основе метода клонов лежит тот факт, что множество функций агрегирования, сохраняющих некоторое множество (или класс множеств) предпочтений, замкнуто относительно композиции и содержит все проекции («диктаторские» функции агрегирования), т. е. является клоном. Это наблюдение позволяет применять в математической теории коллективного выбора развитую технику теории замкнутых классов дискретных функций.

Напомним, что консервативной n-местной r-функцией на множестве A называется любая функция

$$g\colon A^n_{\leqslant r} \to A,$$

удовлетворяющая условию

$$(\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n_{\leqslant r}) \bigvee_{1\leqslant i\leqslant n} (g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i).$$

Множество всех n-арных консервативных r-функций на множестве A обозначается символом $\mathcal{K}^n_r(A)$. Объединение $\bigcup\limits_{n<\omega} \mathcal{K}^n_r(A)$ обозначается $\mathcal{K}_r(A)$.

Для каждых натуральных чисел $1 \leqslant i \leqslant n$ функция e^n_i, заданная равенствами

$$e^n_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$$

называется (n-местной i-ой) *r-проекцией* на множестве A. Очевидно, $e^n_i \in \mathcal{K}^n_r(A)$. Функция агрегирования, соответствующая r-проекции, называется *диктаторской функцией* (или *диктаторским правилом*) агрегирования.

Пусть

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{K}^m_r(A).$$

Легко проверить, что для каждого натурального числа n и каждой последовательности $\mathbf{x}$ из множества $A^m_{\leqslant r}$ последовательность

$$\big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})\big)$$

принадлежит множеству $A^m_{\leqslant r}$. Поэтому для любой функции $f \in \mathcal{K}^n_r(A)$ и функций

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{K}^m_r(A)$$

равенства

$$h(\mathbf{x}) = f\big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})\big),$$

$\mathbf{x} \in A^m_{\leqslant r}$, корректно определяют функцию $h \in \mathcal{K}^m_r(A)$. Функция h называется *композицией* функций f и $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и обозначается символом $f(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Консервативным r-*клоном* на множестве A называется любое множество $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_r(A)$, которое содержит все проекции и замкнуто относительно композиции.

Для каждой r-функции $f \in \mathcal{K}_r^n(A)$ и перестановки σ множества A символом f_σ обозначим функцию на множестве $A^n_{\leqslant r}$, которая определена равенствами

$$f_\sigma(\mathbf{x}) = \sigma^{-1} f(\sigma \mathbf{x})$$

для всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n_{\leqslant r}$, где $\sigma x = \big(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n)\big)$. Легко проверить, что функция f_σ определена корректно и принадлежит множеству $\mathcal{K}_r^n(A)$. Клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_r(A)$ называется *симметричным*, если

$$f \in \mathcal{F} \Rightarrow f_\sigma \in \mathcal{F}$$

для всех функций $f \in K_r(A)$ и перестановок σ множества A.

Теорема 1. *Пусть дано непустое множество A, натуральное число r, $1 \leqslant r \leqslant |A|$, и множество $\mathbb{D} \subseteq \bigcup\limits_{B \subseteq A} \mathcal{P}\big(\mathfrak{C}_r(B)\big)$. Тогда*

1) *множество $\mathcal{F}(\mathbb{D})$ всех консервативных r-функций $f \in \mathcal{K}_r(A)$, которые сохраняют каждое из множество $\mathfrak{D} \in \mathbb{D}$, есть консервативный r-клон,*
2) *если множество $\mathbb{D}$ симметрично, то клон $\mathcal{F}(\mathbb{D})$ симметричный.*

Следствие 1. *Для каждого множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ и множества $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_r(A)$ множество $\mathcal{F} = \mathrm{Pol}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$ есть консервативный r-клон. Если при этом множества $\mathfrak{D}$ и $\mathcal{J}$ симметричны, то клон $\mathcal{F}$ симметричный.*

Нашей ближайшей целью является показать, что при $r = 2$ для любых симметричных множеств $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ и $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_r(A)$ клон $\mathcal{F} = \mathrm{Pol}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$ имеет довольно простую структуру. Более точно, мы покажем, что с точки зрения сохранения функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A)$ множество всех клонов $\mathcal{F} = \mathrm{Pol}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$ (по всем симметричным множествам $\mathfrak{D}$ и $\mathcal{J}$) распадается на конечное число классов, каждый из которых имеет достаточно эффективное описание. Это описание позволяет явно предъявить клон $\mathrm{Pol}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$ для случая $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}_2(A)$. Исчерпывающее описание симметричных консервативных клонов и их инвариантных множеств см. в [7] и [3].

Для каждого множества $B \subseteq A$ множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$ будем называть *тривиальным*, если существует такое множество $Q \subseteq [B]^r$ и функция $\mathfrak{d} \colon Q \to B$, что

$$\mathfrak{D} = \big\{\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(B) \colon \mathfrak{c} \restriction Q = \mathfrak{d}\big\}.$$

Например, любое одноэлементное множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$ тривиально. Кроме того, пустое множество и множество $\mathfrak{C}_r(B)$ тривиальны; никакие множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$, кроме этих двух не могут быть симметричными и тривиальными одновременно.

Предложение 7. *Каждая локальная функция агрегирования*

$$f\colon \big(\mathfrak{C}_r(A)\big)^n \to \to C_r(A)$$

сохраняет любое тривиальное множество

$$\mathfrak{D} \in \bigcup_{B\subseteq A} \mathscr{P}\big(\mathfrak{C}_r(B)\big).$$

Множество $\mathbb{D} \subseteq \bigcup\limits_{B\subseteq A} \mathscr{P}\big(\mathfrak{C}_r(B)\big)$ будем называть *тривиальным*, если оно состоит только из тривиальных множеств $\mathfrak{D}$.

Функция большинства $\partial \in \mathcal{K}_2^3(A)$ на произвольном множестве A определена в Примере 2. Ее также можно задать тождеством

$$\partial(x,x,y) = \partial(x,y,x) = \partial(y,x,x) = x.$$

Функцию $\ell \in \mathcal{K}_2^3(A)$ определим тождеством

$$\ell(x,x,y) = \ell(x,y,x) = \ell(y,x,x) = y.$$

Если $|A| = 3$, 2-функцию $f \in \mathcal{K}_2(A)$ (произвольной арности) будем называть *четной*, если $f_\sigma = f$ для любой четной перестановки σ множества A.

Если $|A| = 4$, 2-функцию $f \in \mathcal{K}_2(A)$ (произвольной арности) будем называть *клейновской*, если $f_\sigma = f$ для любой перестановки σ множества A из четверной группы Клейна.

Пример 3. На следующей таблице представлены четная функция $ev \in \mathcal{K}_2^2(\{a,b,c\})$ и клейновская функция $kl \in \mathcal{K}_2^2(\{a,b,c,d\})$.

ev	a	b	c
a	a	b	a
b	b	b	c
c	a	c	c

kl	a	b	c	d
a	a	b	c	a
b	a	b	b	d
c	a	c	c	d
d	d	b	c	d

Теорема 2 (о структуре консервативных симметричных 2-клонов с конечным носителем). *Пусть даны конечное множество A, $|A| \geqslant 2$, натуральное число r, $2 \leqslant r \leqslant |A|$, и симметричный консервативный 2-клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_2(A)$. Тогда выполнено одно из следующих условий.*

1. *Клон $\mathcal{F}$ состоит только из проекций и, следовательно, сохраняет любое множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$, $B \subseteq A$.*
2. *Клон $\mathcal{F}$ порожден функцией ∂ и, следовательно, сохраняет те и только те множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$, $B \subseteq A$, которые сохраняет функция ∂.*
3. *Клон $\mathcal{F}$ порожден функцией ℓ и, следовательно, сохраняет те и только те множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$, $B \subseteq A$, которые сохраняет функция ℓ.*
4. *Клон $\mathcal{F}$ порожден функциями ∂ и ℓ и, следовательно, сохраняет те и только те множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$, $B \subseteq A$, которые сохраняет каждая из функций ∂ и ℓ.*
5. *Клон $\mathcal{F}$ сохраняет только тривиальные множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(B)$, $B \subseteq A$.*
6. *$|A| = 3$, и клон $\mathcal{F}$ содержит функцию ev.*
7. *$|A| = 4$, и клон $\mathcal{F}$ содержит функцию kl.*

Следствие 2 (теорема о редукции для инвариантных множеств предпочтений). *Пусть даны множество A, $|A| \geqslant 5$, и нетривиальное симметричное множество*

$$\mathbb{D} \subseteq \bigcup_{B \subseteq A} \mathscr{P}\big(\mathfrak{C}_r(B)\big).$$

Пусть $f\colon \big(\mathfrak{C}_2(A)\big)^n \to \mathfrak{C}_2(A)$ есть недиктаторская функция агрегирования и $\mathbb{D} \subseteq \mathrm{Inv}(f)$. Тогда

$$\mathbb{D} \subseteq \mathrm{Inv}(\partial) \quad \textit{или} \quad \mathbb{D} \subseteq \mathrm{Inv}(\ell).$$

Замечание 5. Более тонкий анализ структуры симметричных консервативных 2-клонов* показывает, что каждому из условий 5—7 теоремы 2 удовлетворяет, вообще говоря, более одного симметричного консервативного r-клона. Однако, для целей настоящей статьи достаточна вышеприведенная чуть более грубая классификация.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathcal{F}$ есть симметричный консервативный клон на множестве A. Вначале исследуем множество бинарных 2-функций $f \in \mathcal{F}$.

Для каждой пары последовательностей $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A_2^2 \times A_2^2$ следующим образом определим последовательность $\mathrm{t}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in 2 \cup 2^2 \cup \{2\}$, которую будем называть *типом* пары $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Пусть $\mathbf{a} = a_0 a_1$ и $\mathbf{b} = b_0 b_1$. Тогда

*См. [7].

для всех $i, j \in \{0,1\}$

$$\mathrm{t}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_0 = b_0 \text{ и } a_1 = b_1, \\ 1, & \text{если } a_0 = b_1 \text{ и } a_1 = b_0, \\ ij, & \text{если } a_i = b_j \text{ и } a_{1-i} \neq b_{1-j}, \\ 2, & \text{если } \operatorname{ran}\mathbf{a} \cap \operatorname{ran}\mathbf{b} = \varnothing. \end{cases}$$

Очевидно, тип определен для каждой пары $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in A_2^2 \times A_2^2$.

Для каждого номера $i \in \{0,1\}$ обозначим символом $\rhd_i$ бинарное отношение на множестве A_2^2, которое определяется формулой

$$\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \iff \big((\forall f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}_2^2(A)\big)\, f(\mathbf{a}) = a_i \implies f(\mathbf{b}) = b_i\big)$$

для всех $\mathbf{a} = a_0a_1, \mathbf{b} = b_0b_1 \in A_2^2$. Для каждой последовательности $\mathbf{a} = a_0a_1 \in A_2^2$ символом $\bar{\mathbf{a}}$ обозначим последовательность a_1a_0.

Лемма 1. *Отношение $\rhd_i$ рефлексивно и транзитивно. Кроме того, для каждого номера $i \in \{0,1\}$, последовательностей $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}',\mathbf{b}' \in A_2^2$ и перестановки σ множества A*

1) $\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \implies \sigma\mathbf{a} \rhd_i \sigma\mathbf{b}$,
2) $\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \implies \bar{\mathbf{a}} \rhd_{1-i} \bar{\mathbf{b}}$,
3) $\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \implies \mathbf{b} \rhd_{1-i} \mathbf{a}$,
4) $t(\mathbf{a},\mathbf{b}) = t(\mathbf{a}',\mathbf{b}') \implies (\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \implies \mathbf{a}' \rhd_i \mathbf{b}')$.

Доказательство. Сводится к формальной проверке. Пункт 4 немедленно следует из пункта 1. □

Лемма 2. *Возможны только следующие случаи.*

1. $(\forall\, i < 2)\,(\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in A_2^2)\ \mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y}$,
2. $(\forall\, i < 2)\,(\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in A_2^2)\ \mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y} \leftrightarrow \mathrm{t}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$,
3. $(\forall i < 2)\,(\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in A_2^2)\, \mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y} \leftrightarrow \mathrm{t}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \{0,1\}$,
4. $|A| = 4 \wedge (\forall\, i < 2)\,(\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in A_2^2)\, \mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y} \leftrightarrow \mathrm{t}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \{0,1,2\}$,
5. $|A| = 3 \wedge (\forall\, i < 2)\,(\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in A_2^2)\, \mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y} \leftrightarrow \mathrm{t}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \{0,01,10\}$.

Доказательство. Пусть i — произвольный номер из $\{0,1\}$. Пусть отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая (а значит, по пункту 4 леммы 1 любая) пара $\mathbf{a},\mathbf{b} \in A_2^2$ типа 00. Пусть $\mathbf{a} = a_0a_1$ и $\mathbf{b} = a_0b_1$. Тогда имеем:

a) $a_0a_1 \rhd_i a_0b_1$ (условие),
b) $a_0b_1 \rhd_{1-i} a_0a_1$ из (a) по пункту 2 леммы 1,
c) $b_1a_0 \rhd_i a_1a_0$ из (b) по пункту 3 леммы 1,

d) $a_0b_1 \rhd_i a_1b_1$ из (c) по пункту 4 леммы 1,

e) $a_0a_1 \rhd_i a_1b_1$ из (a) и (c) по транзитивности,

f) $a_1b_1 \rhd_i b_1a_0$ из (e) по пункту 4 леммы 1,

g) $a_0a_1 \rhd_i b_1a_0$ из (a) и (f) по транзитивности,

h) $a_0b_1 \rhd_i a_1a_0$ из (g) по пункту 4 леммы 1,

i) $a_0a_1 \rhd_i a_1a_0$ из (a) и (h) по транзитивности.

Заметим, что последовательности из пунктов c), e), g), i) имеют тип 11, 10, 01 и 1. Вспомнив про рефлексивность отношения $\rhd_i$ и пункт 4 леммы 1, имеем

$$\mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y} \text{ для всех таких } (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ что } t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 2.$$

Если $|A| = 3$, все доказано. Если $|A| \geqslant 4$, выберем $c \in A \setminus \{a_0, a_1, b_1\}$ и продолжаем.

j) $a_0b_1 \rhd_i b_1c$ из e) по пункту 4 леммы 1,

k) $a_0a_1 \rhd_i b_1c$ из a) и j) по транзитивности.

Последовательности из пункта k) имеют тип 2. Значит, в рассмотренной ситуации реализуется случай 1.

Если отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая пара типа 11, рассуждения аналогичны. Далее будем считать, что ни одна пара типа 00 или 11 отношению $\rhd_i$ не принадлежит.

Пусть отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая (а значит, любая) пара $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2^2$ типа 01. Пусть $\mathbf{a} = a_0a_1$ и $\mathbf{b} = a_1b_1$. Тогда имеем:

a′) $a_0a_1 \rhd_i a_1b_1$ (условие),

b′) $a_1b_1 \rhd_i b_1a_0$ из (a') по пункту 4 леммы 1,

c′) $a_0a_1 \rhd_i b_1a_0$ из (a') и (b') по транзитивности.

Значит, $\mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y}$ для всех пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ типа 10.

Если $\mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y}$ для некоторой пары $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ типа 1, то имеем:

d′) $a_1a_0 \rhd_i a_0a_1$ (предположение),

e′) $a_1a_0 \rhd_i a_1b_1$ из (a') и (d') по транзитивности.

Значит, отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая пара типа 00; противоречие.

Таким образом, отношению $\rhd_i$ принадлежат все пары типа 0, 01, 10 и не принадлежат пары типа 1, 00, 11. Если $|A| = 3$ реализуется случай 5. Если $|A| \geqslant 4$, выберем $c \in A \setminus \{a_0, a_1, b_1\}$ и продолжаем.

f′) $a_1b_1 \rhd_i b_1c$ из (a') по пункту 4 леммы 1,

g′) $a_0a_1 \rhd_i b_1c$ из (a') и (f') по транзитивности,

h′) $b_1c \rhd_i a_1a_0$ из (g') по пункту 4 леммы 1,

i′) $a_0a_1 \rhd_i a_1a_0$ из (a') и (h') по транзитивности.

Пара из пункта i′) имеет тип 1, противоречие.

Если отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая пара типа 10, рассуждения аналогичны. Далее будем считать, что отношение $\rhd_i$ содержит только пары типов 0, 1, 2.

Пусть отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая (а значит, любая) пара $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2^2$ типа 2. Пусть $\mathbf{a} = a_0a_1$ и $\mathbf{b} = b_0b_1$. Тогда имеем:

a″) $a_0a_1 \rhd_i b_0b_1$ (условие),

b″) $b_0b_1 \rhd_i a_1a_0$ из a″) по пункту 4 леммы 1,

c″) $a_0a_1 \rhd_i a_1a_0$ из a″) и b″) по транзитивности.

Пара из пункта c″) имеет тип 1. Если $|A| = 4$, имеем случай 4. Если $|A| \geqslant 5$, выберем $c \in A \setminus \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ и продолжим.

d″) $b_0b_1 \rhd_i ca_0$ из a″) по пункту 4 леммы 1,

e″) $a_0a_1 \rhd_i ca_0$ из a″) и d″) по транзитивности.

Пара из пункта e″) имеет тип 01, противоречие.

Далее будем считать, что отношение $\rhd_i$ содержит только пары типов 0, 1. Отсюда по пункту 4 леммы 1 следует, что имеет место один из случаев 2, 3. □

Теперь рассмотрим каждый из случаев 1—5 леммы 1. Если имеет место случаи 2 или 3, то 2-клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет следующему условию:

Δ^2: Для любых пар $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2^2$, $\operatorname{ran}\mathbf{a} \neq \operatorname{ran}\mathbf{b}$, и любых элементов $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$ существует функция $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}_2^2(A)$, для которой

$$f(\mathbf{a}) = a,\ f(\mathbf{b}) = b \text{ и } f(x, x) = x \text{ для всех } x \in A.$$

Функции $f\colon A^n \to A$ с условием $f(x, x, \ldots, x) = x$ будем называть *идемпотентными*.

Лемма 3. *Пусть консервативный 2-клон $\mathcal{F}$ на конечном множестве A удовлетворяет условию Δ^2. Тогда клон $\mathcal{F}$ сохраняет только тривиальные множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(B)$, $B \subseteq A$ (т. е. выполнено условие* 5 *теоремы* 2).

Доказательство. Пусть $B \subseteq A$ и консервативный 2-клон $\mathcal{F}$ с условием Δ^2 сохраняет нетривиальное множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(B)$. Пусть Q_0 есть максимальное по включению подмножество множество $[B]^2$ с условием

$$\mathfrak{c} \restriction Q_0 = \mathfrak{d} \restriction Q_0$$

для всех $\mathfrak{c}, \mathfrak{d} \in \mathfrak{D}$. Обозначим символом $\mathfrak{c}_0$ функцию $\mathfrak{c} \restriction Q_0$, где $\mathfrak{c}$ — произвольная функция из множества $\mathfrak{D}$.

Заметим, что из нетривиальности множества $\mathfrak{D}$ следует, что мощность $[B]^2 \setminus Q_0$ не меньше 2.

Индукцией по мощности множества Q, $Q_0 \subseteq Q \subseteq [B]^2$, покажем, что для любого множества Q множество $\mathfrak{D}$ содержит все функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(B)$, для которых

$$\mathfrak{c} \restriction Q_0 = \mathfrak{c}_0.$$

Тем самым мы придем к противоречию с нетривиальностью множества $\mathfrak{D}$ при $Q = [B]^2$.

База индукции ($Q = Q_0$) очевидна. Предположим, что утверждение верно для всех множеств Q, $Q_0 \subseteq Q \subseteq [B]^2$, мощности k, $|Q_0| \leqslant k < |[B]^2|$, и докажем его для произвольного множества Q', $Q_0 \subseteq Q' \subseteq [B]^2$, мощности $k+1$. Пусть $\mathfrak{d}$ — произвольная функция из $\mathfrak{C}_2(A)$ с условием $\mathfrak{d} \restriction Q_0 = \mathfrak{c}_0$. Надо показать, что множество $\mathfrak{D}$ содержит функцию $\mathfrak{d}'$, для которой

$$\mathfrak{d}' \restriction Q' = \mathfrak{d} \restriction Q'$$

Если $|Q'| = 1$, то $Q_0 = \varnothing$, и утверждение выполнено по определению множества Q_0. Будем далее считать, что $|Q'| \geqslant 2$ Выберем произвольные различные двухэлементые множества $p, q \in Q'$. Обозначим $\mathfrak{d}(p) = a$ и $\mathfrak{d}(q) = b$. Пусть $\{c\} = p \setminus q$ и $\{d\} = q \setminus p$. Таким образом, $\{a, c\} \neq \{b, d\}$.

По предположению индукции множество $\mathfrak{D}$ содержит функции $\mathfrak{d}_{p,a}$, $\mathfrak{d}_{p,c}$, $\mathfrak{d}_{q,b}$ и $\mathfrak{d}_{q,d}$, которые

1) совпадают с функцией $\mathfrak{d}$ на множестве $Q \setminus \{p, q\}$,
2) удовлетворяют равенствам $\mathfrak{d}_{p,a}(p) = a$, $\mathfrak{d}_{p,c}(p) = c$, $\mathfrak{d}_{q,b}(q) = b$, $\mathfrak{d}_{q,d}(q) = d$.

По условию Δ^2 2-клон $\mathcal{F}$ содержит идемпотентные функции функции f_1, f_2 и f_3, для которых

1) $f_1\big(a, \mathfrak{d}_{q,d}(p)\big) = a$ и $f_1(\mathfrak{d}_{p,a}(q), d) = d$;
2) $f_2\big(c, \mathfrak{d}_{q,b}(p)\big) = c$ и $f_2(\mathfrak{d}_{p,c}(q), b) = b$,
3) $f_3(a, c) = a$ и $f_3(d, b) = b$.

Рассмотрим функцию $\mathfrak{d}' = f_3\big(f_1(\mathfrak{d}_{p,a}, \mathfrak{d}_{q,d}), f_2(\mathfrak{d}_{p,c}, \mathfrak{d}_{q,b})\big)$. Эта функция принадлежит множеству $\mathfrak{D}$, поскольку 2-клон $\mathcal{F}$ сохраняет множество $\mathfrak{D}$. Функция d' совпадает с функцией $\mathfrak{d}$ на множестве $Q' \setminus \{p, q\}$ поскольку все функции f_1, f_2, f_3 идемпотентны. Наконец,

$$\mathfrak{d}'(p) = f_3\Big(f_1\big(a, \mathfrak{d}_{q,d}(p)\big),\ f_2\big(c, \mathfrak{d}_{q,b}(p)\big)\Big) = f_3(a, c) = a = \mathfrak{d}(p),$$

$$\mathfrak{d}'(q) = f_3\big(f_1(\mathfrak{d}_{p,a}(q), d), f_2(\mathfrak{d}_{p,c}(q), b)\big) = f_3(d, b) = b = \mathfrak{d}(q). \qquad \square$$

Пусть теперь имеет место случай 1 леммы 2. Тогда все функции двухместные функции $f \in \mathcal{F}$ есть проекции.

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{F}$ есть консервативный 2-клон на произвольном множестве A и все функции двухместные функции $f \in \mathcal{F}$ есть проекции. Тогда для любой последовательности $\mathbf{a} = a_1a_2\dots a_n \in A_2^n$ и функции $\sigma\colon A \to A$ выполнено*

$$f(\sigma\mathbf{a}) = \sigma\bigl(f(\mathbf{a})\bigr).$$

Доказательство. Сначала заметим, что утверждение леммы верно для произвольной 2-проекции f. Пусть, далее, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ есть некоторая последовательность всех различных элементов из $\operatorname{ran}\mathbf{a}$. Положим $\tau = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}$. Рассмотрим функцию

$$f' = f\bigl(e^n_{\tau(1)}, e^n_{\tau(2)}, \dots, e^n_{\tau(n)}\bigr).$$

Очевидно, $f' \in \mathcal{F}$. Кроме того, функция f' двухместная. Поэтому из условия леммы следует, что f' есть проекция. Тогда имеем

$$\sigma\bigl(f(\mathbf{a})\bigr) = \sigma\bigl(f'(\mathbf{b})\bigr) = f'(\sigma\mathbf{b}) = f\bigl(e^t_{\tau(1)}(\sigma\mathbf{b}), e^t_{\tau(2)}(\sigma\mathbf{b}), \dots, e^t_{\tau(n)}(\sigma\mathbf{b})\bigr) = \\ = f\Bigl(\sigma\bigl(b_{\tau(1)}\bigr), \sigma\bigl(b_{\tau(2)}\bigr), \dots, \sigma\bigl(b_{\tau(n)}\bigr)\Bigr) = f(\sigma\mathbf{b}\tau) = f(\sigma\mathbf{a}). \qquad \square$$

Легко проверить, что для любого множества $B \subseteq A$ множество

$$\mathcal{F}_B \rightleftharpoons \bigcup_{n<\omega} \{f \restriction B^n \colon f \in \mathcal{F}\}$$

есть консервативный 2-клон на множестве B. Без ограничения общности будем считать, что множество A содержит подмножество $E_2 = \{0, 1\}$. Тогда 2-клон $\mathcal{F}_{E_2}$ есть постовский класс, содержащийся в классе T_{01} (т. е. состоящий из функций, сохраняющих $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$). Обозначим этот постовский класс символом P.

Рассмотрим функцию $\sigma\colon A \to A$, для которой $\sigma(0) = 1$ и $\sigma(1) = 0$. Тогда из леммы 4 следует, что каждая функция $g \in \mathrm{P}$ самодвойственная. Используя классификацию постовских классов (см. [8—10]), заключаем, что P есть один из классов $\mathrm{O}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{L}_4$, где O_1 есть класс всех проекций, D_2 есть класс, порожденный функцией ∂ на множестве E_2, L_2 есть класс, порожденный функцией ℓ на множестве E_2, D_1 есть класс, порожденный функциями ∂ и ℓ на множестве E_2.

Вновь используя лемму 4, приходим к одному из случаев 1—4 теоремы 2.

Остается рассмотреть случаи 4 и 5 леммы 2.

Непосредственной проверкой легко установить, что в случае 5 каждая двухместная функция $f \in \mathcal{F}$ является четной. Кроме того, каждая двухместная четная функция $f \in \mathcal{F}$ однозначно определяется своими значениями на произвольной паре $(p, \bar{p}) \in A_2^2 \times A_2^2$. Поэтому существует всего четыре четные двухместные функции: две проекции, ev и ev_σ, где σ есть произвольная транспозиция на множестве A. Значит, если 2-клон $\mathcal{F}$ состоит не только из проекций, то имеет место условие 6 теоремы 2.

Аналогично, в случае 4 легко установить, что каждая двухместная 2-функция $f \in \mathcal{F}$ является клейновской. Кроме того, легко проверить, что для каждой двухместной клейновской 2-функции f выполнено: f есть проекция или существуют три различных элемента $u, v, w \in A$, для которых

$$f(u,v) = v,\ f(v,w) = w \text{ и } f(u,w) = u.$$

Тогда для подходящей перестановки σ множества A имеем $f_\sigma = kl$, что влечет условие 7 теоремы 2. $\square$

Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$ назовем *широким*, если для каждого множества $B \subsetneq A$ и функции $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}_{[B]}$ множество $\mathfrak{D}$ содержит по крайней мере две различные функции $\mathfrak{c}'$ и $\mathfrak{c}''$, для которых $\mathfrak{c}'_{[B]} = \mathfrak{c}''_{[B]} = \mathfrak{d}$.

Например, множество $\mathfrak{R}_2(A)$ широкое. Пример нешироокого симметричного множества $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$ доставляет множество всех функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ «с победителем»:

$$\mathfrak{c} \in \mathfrak{D} \iff (\exists\, a \in A)\big(\forall\, x \in A \setminus \{a\}\big)\, \mathfrak{c}\big(\{x, a\}\big) = a.$$

Следствие 3. *Пусть даны непустое нетривиальное широкое симметричное множество 2-предпочтений $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$ и непустое симметричное множество жребиев $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_2(A)$. Тогда клон $\mathcal{F} = \mathrm{Pol}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$ удовлетворяет хотя бы одному из условий 1—4 или 6—7 теоремы 2.*

Доказательство. Выберем жребий $J = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\} \in \mathcal{J}$, функцию адаптации $\mathcal{A}$, которая сохраняет множество $\mathfrak{D}$, и функцию агрегирования $f \in \mathcal{F}$. Рассмотрим поток $\Pi_S(\mathfrak{D}, J) = \big(\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J), \mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J)\big)$, где $S = (f, \mathcal{A})$. Достаточно доказать, что в условиях следствия 3 множество $\mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J)$ нетривиально.

Пусть $\mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J) = \{\mathfrak{D}_\mathfrak{c}\}$, $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \setminus \mathfrak{C}_2(A)$. Предположим, что множество $\mathbb{F}_S(\mathfrak{D}, J)$ тривиально. Индукцией по i, $0 \leqslant i \leqslant m$, покажем, что для любого номера i

а) $\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_2(A_i) = \mathfrak{C}_2(A_i)$,

b) если $i < m$ и $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_2(A_i)$, то

$$\mathfrak{D}_\mathfrak{c} = \{\mathfrak{d} \in \mathfrak{C}_2(A_{i+1})\colon \mathfrak{C}_{[A_i]} = \mathfrak{c}\}.$$

Действительно, a) $\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_2(A_0) = \{\varnothing\} = \mathfrak{C}_2(A_0)$ и b) $\mathfrak{D}_\varnothing = \mathfrak{D}_{[A_1]} = \mathfrak{C}_2(A_1)$, поскольку множество $\mathfrak{D}$ непусто и симметрично. База индукции доказана.

Пусть утверждение верно для $i = l < m$. Пусть $\mathfrak{c}$ есть произвольная функция из $\mathfrak{C}_2(A_{l+1})$. Обозначим $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}_{[A_l]}$. По предположению индукции, $\mathfrak{d} \in \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J)$ и $\mathfrak{D}_\mathfrak{d} = \{\mathfrak{e} \in \mathfrak{C}_2(A_{l+1})\colon \mathfrak{C}_{[A_l]} = \mathfrak{d}\}$. Значит, $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}_\mathfrak{d} = f(\mathfrak{D}_\mathfrak{d}) \subseteq \mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_2(A_{l+1})$.

Далее, пусть $l + 1 < m$. Предположим, что множество $\mathfrak{D}_\mathfrak{c}$ тривиально, т. е. существует такие множество $Q \subseteq [A_{l+2}]^2$ и функция $\mathfrak{e}\colon Q \to A_{l+1}$, что $\mathfrak{D}_\mathfrak{c} = \{\mathfrak{f} \in \mathfrak{C}_r(A_{l+2})\colon \mathfrak{f} \restriction Q = \mathfrak{e}\}$. С другой стороны, по предложению 4 имеем $\mathfrak{D}_\mathfrak{c} = \{\mathfrak{f} \in \mathfrak{D}_{[A_{l+2}]}\colon \mathfrak{f}_{[A_{l+1}]} = \mathfrak{c}\}$. Поскольку множество $\mathfrak{D}$ широкое, имеем $Q = [A_{l+1}]^2$ и $\mathfrak{e} = \mathfrak{c}$. Это доказывает шаг индукции.

Теперь поскольку $\mathfrak{C}_S(\mathfrak{D}, J) \cap \mathfrak{C}_2(A) = \mathfrak{D}$ (см. предложение 4), имеем $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2(A)$, противоречие с нетривиальностью множества $\mathfrak{D}$. $\square$

Теперь мы готовы описать все функции агрегирования 2-предпочтений f, которые динамически сохраняют множество $\mathfrak{R}_2(A)$ рациональных 2-предпочтений относительно произвольного симметричного множества жребиев $\mathcal{J}$. Полученный результат в некотором смысле противоположен теореме Эрроу о невозможности и даже теореме Кондорсе, поскольку в существенных случаях такие функции f это в точности все функции, порожденные функцией большинства.

Жребий $J = (A_0, A_1, \ldots, A_m)$ назовем *максимальным*, если $|A_1| = 2$ и $|A_{k+1} \setminus A_k| = 1$ для всех k, $1 \leqslant k \leqslant m - 1$. Обозначим символом $\mathcal{J}_{\max}(A)$ множество всех максимальных жребиев на множестве A. Очевидно, множество $\mathcal{J}_{\max}$ симметрично.

Теорема 3 (о невозможности и возможности для динамических систем агрегирования рациональных предпочтений). *Пусть дано конечное множество A, $|A| \geqslant 3$, и симметричное непустое множество жребиев $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_r(A)$. Тогда*

1) *если $\mathcal{J} \neq \mathcal{J}_{\max}(A)$, то не существует недиктаторских функций агрегирования, которые динамически сохраняют множество $\mathfrak{R}_2(A)$ относительно $\mathcal{J}$;*
2) *если $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\max}(A)$, то для каждой локальной функции агрегирования 2-предпочтений f следующие условия эквивалентны:*

   a) *f динамически сохраняет множество $\mathfrak{R}_2(A)$ относительно $\mathcal{J}$,*

b) *f принадлежит 2-клону $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_2(A)$, порожденному функцией большинства ∂.*

Доказательство. Первый пункт мгновенно следует из теоремы Эрроу [11], поскольку для каждого жребия $J = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ если $|A_{i+1} \setminus A_i| \geqslant 2$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, то из условия $f \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{R}_2(A), J)$ следует, что f сохраняет множество всех рациональных 2-предпочтений на множестве $(A_{i+1} \setminus A_i) \cup \{a\}$, где $a \in A_i$.

Второй пункт в силу следствия 3 сводится к простой проверке того факта, что каждое множество $\{c \in \mathfrak{R}_2(B) \colon \mathfrak{c}_{[B]} = \mathfrak{d}\}$, где $C \subseteq B \subseteq A$, $|B \setminus C| = 1$ и $\mathfrak{d} \in \mathfrak{R}_2(C)$, сохраняется функцией ∂ и не сохраняется ни одной из функций ℓ, ev и kl. □

§ 3. НЕЛОКАЛЬНОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ, ОСНОВАННОЕ НА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ АГРЕГИРОВАНИЯ

В предыдущей главе мы сконцентрировались на возможности сохранения локальной функцией агрегирования f множества r-предпочтений $\mathfrak{D}$ при динамической агрегировании в предположении, что на каждом шаге профиль «выборщиков» формируется заново. Теперь мы рассмотрим динамическое агрегирование, при котором динамический профиль участников остается неизменным. В отличие от результатов предыдущей главы, здесь становится существенной функция адаптации $\mathcal{A}$.

Определение 6. Пусть дана функция адаптации $\mathcal{A}$ r-предпочтений на множестве A, локальная функция агрегирования

$$f \colon \big(\mathfrak{C}_r(A)\big)^n \to \mathfrak{C}_r(A)$$

и жребий

$$J = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\} \in \mathcal{J}_r(A).$$

Пусть

$$\mathbf{c} = (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n) \in \big(\mathfrak{C}_r(A)\big)^n.$$

Следующим образом определим последовательности

$$(\mathfrak{d}^k)_{0\leqslant k\leqslant m} \in \mathfrak{C}_r(A)_{[A_0]} \times \mathfrak{C}_r(A)_{[A_1]} \times \ldots \times \mathfrak{C}_r(A)_{[A_m]},$$
$$(\mathbf{c}^k)_{1\leqslant k\leqslant m} \in \big(\mathfrak{C}_r(A)_{[A_1]}\big)^n \times \big(\mathfrak{C}_r(A)_{[A_2]}\big)^n \times \ldots \times \big(\mathfrak{C}_r(A)_{[A_m]}\big)^n :$$

1) $\mathfrak{d}_k = f(\mathbf{c}_k)$ для всех k, $1 \leqslant k \leqslant m$,
2) $\mathbf{c}_{k+1} = \big(\mathcal{A}(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_k), \mathcal{A}(\mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_k), \ldots, \mathcal{A}(\mathfrak{c}_n, \mathfrak{d}_k)\big)_{[A_{k+1}]}$ для всех k, $1 \leqslant$ $\leqslant k \leqslant m-1$

(последовательности $(\mathfrak{d}^k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ и $(\mathbf{c}^k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ определены однозначно, поскольку $\mathfrak{d}_0 = \varnothing$).

Функцию $\mathfrak{d}_m$ будем называть *результатом последовательного агрегирования по правилу f на n-ке $\mathbf{c}$ относительно жребия J и функции адаптации $\mathcal{A}$*. При фиксированном жребии J и функции адаптации $\mathcal{A}$ по каждой функции агрегирования f определим функцию агрегирования $f_{J,\mathcal{A}}\colon (\mathfrak{C}_r(A))^n \to \mathfrak{C}_r(A)$, которая каждой n-ке $\mathbf{c} \in (\mathfrak{C}_r(A))^n$ ставит в соответствие результат последовательного агрегирования по правилу f на n-ке $\mathbf{c}$ относительно жребия J и функции адаптации $\mathcal{A}$.

Предложение 8. *Пусть локальная функция агрегирования $f\big(\mathfrak{C}_r(A)\big)^n \to \mathfrak{C}_r(A)$ динамически сохраняет множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ относительно множества $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_r(A)$. Тогда для каждого жребия $J \in \mathcal{J}$ и функции адаптации $\mathcal{A}$, которая сохраняет множество $\mathfrak{D}$, функция $f_{J,\mathcal{A}}$ сохраняет множество $\mathfrak{D}$. В частности, для каждой 2-функции f, порожденной функцией большинства ∂, жребия $J \in \mathcal{J}_{\max}(A)$ и функции адаптации $\mathcal{A}$, которая сохраняет множество $\mathfrak{R}_2(A)$, функция $f_{J,\mathcal{A}}$ сохраняет множество $\mathfrak{R}_2(A)$.*

Замечание 6. Функция $f_{J,\mathcal{A}}$, вообще говоря, не локальна.

Возникает естественный вопрос: для данной функции $f \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{D}, \mathcal{J})$ можно ли выбрать функцию адаптации $\mathcal{A}$ так, чтобы функция $f_{J,\mathcal{A}}$ давала, в некотором смысле, справедливый результат для каждой n-ки $\mathbf{c} \in \mathfrak{D}^n$? Следующая теорема отчасти отвечает на этот вопрос для случая $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}_2(A)$.

Каждая локальная 2-функция агрегирования $f\colon A^n_{\leqslant 2} \to A$ однозначно задается множеством *локальных решающих коалиций* $C^f_{a,b} \subseteq$ $\subseteq \mathscr{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$, $a, b \in A$, $a \neq b$:

$$f(\mathbf{a}) = a \iff \{i\colon a_i = a\} \in C^f_{\operatorname{ran} a}$$

для каждой последовательности $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n_2$ и альтернативы $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$. Если коалиции $C^f_{a,b}$ не зависят от пары альтернатив (a, b), функция f называется *нейтральной*. Для всех нейтральных функций f вместо $C^f_{a,b}$ мы будем записывать просто C^f. Легко проверить, что все 2-функции f, порожденных правилом большинства ∂, нейтральны.

Для каждого профиля

$$\mathbf{c} = (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n) \in \big(\mathfrak{C}_2(A)\big)^n$$

топ-элементом профиля $\mathbf{c}$ относительно локальной нейтральной функции агрегирования f назовем такой элемент $a \in A$, что для каждого элемента $x \in A \setminus \{a\}$

$$\{i\colon \mathfrak{c}_i(\{x,a\}) = a\} \in C^f.$$

Теорема 4. *Существует функция адаптации 2-предпочтений $\mathcal{A}$, такая, что*

1) *$\mathcal{A}$ сохраняет множество $\mathfrak{R}_2(A)$,*
2) *для каждой 2-функции f, порожденной правилом большинства ∂, жребия $J \in \mathcal{J}_{\max}(A)$, профиля*

$$\mathbf{c} = (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n) \in \big(\mathfrak{R}_2(A)\big)^n$$

и элемента $a \in A$, если элемент a есть топ-элемент профиля $\mathbf{c}$ относительно функции f, то a есть максимальный элемент относительно линейного порядка, соответствующего предпочтениям $f_{\mathcal{A},J}(\mathbf{c})$.

Доказательство. Вместо функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{R}_2(A)$ будем говорить о соответствующих линейных порядках $P_{\mathfrak{c}}$. Линейный порядок

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_k$$

будем записывать в виде последовательности $x_1 x_2 \ldots x_k$.

Для каждого множества $B \subseteq A$, элемента $a \in A \setminus B$, линейного порядка $\prec_B$ на множестве B и линейного порядка $\prec_A$ на множестве $B \cup \{a\}$ положим:

1) $T(\prec_B, \prec_A, a) = \big\{b \in B\colon (\exists\, c \in B)\ b \preceq_B c \prec_A a\big\}$,
2) $\prec_B \oplus_a \prec_A =$
$$= \prec_B \cup \{(x,a)\colon x \in T(\prec_B, \prec_A, a)\} \cup \{(a,x)\colon x \in B \setminus T(\prec_B, \prec_A, a)\}$$

(здесь $b \preceq_B c$ означает $b \prec_B c \vee b = c$). Очевидно, $\prec_B \oplus_a \prec_A$ есть линейный порядок на множестве $B \cup \{a\}$.

Далее, пусть $\prec_{A\setminus B} = a_1 a_2 \ldots a_k$ есть ограничение линейного порядка $\prec_A$ на множество $A \setminus B$. Положим

1) $\prec_0 = \prec_B$,
2) $\prec_{i+1} = \prec_i \oplus_{a_{i+1}} \prec_A$ для всех $i,\ 0 \leqslant i \leqslant k-1$,
3) $\mathcal{A}(\prec_B, \prec_A) = \prec_k$

   (здесь мы отождествляем рациональные предпочтения и соответствующие линейные порядки).

Продолжим как угодно функцию адаптации $\mathcal{A}$ на множество нерациональных предпочтений и покажем, что она обладает требуемыми свойствами.

Будем использовать обозначения из определения 6. Индукцией по k, $1 \leqslant k \leqslant m$, легко доказать, что, если a — топ-элемент профиля $\mathbf{c}$ относительно функции f и $a \in A_k$, то a — максимальный элемент относительно порядка, соответствующего предпочтениям $\mathfrak{d}_k$. Случай $k = m$ доказывает теорему 4. □

Замечание 7. Из теоремы 4 следует, что если профиль $\mathbf{c}$ имеет победителя по Кондорсе $a \in A^*$, то a есть максимальный элемент линейного порядка $P_{\mathfrak{c}}$, где $\mathfrak{c} = \partial^n_{\mathcal{A},J}(\mathbf{c})$, ∂^n есть n-местная функция большинства (n нечетно), J — любой максимальный жребий, а функция $\mathcal{A}$ описана в доказательстве теоремы 4. При этом, однако, не обязательно выполнено равенство

$$\partial^n(\mathbf{c}) = \partial^n_{\mathcal{A},J}(\mathbf{c}).$$

Пример 4. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$ и профиль $\mathbf{c}$ состоит из рациональных предпочтений $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3$, которые соответствуют порядкам $P_{\mathfrak{c}_1} = cadb$, $P_{\mathfrak{c}_2} = bdac$ и $P_{\mathfrak{c}_3} = dabc$. Легко проверить, что предпочтения $\mathfrak{d} = \partial(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3)$ рациональны и соответствуют порядку $P_{\mathfrak{d}} = dabc$.

Рассмотрим жребий $J = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где $A_0 = \varnothing$, $A_1 = \{b, c\}$, $A_2 = \{a, b, c\}$, $A_3 = \{a, b, c, d\}$. Вычисления из определения 6 занесены в следующую таблицу (вместо рациональных функций агрегирования записаны соответствующие линейные порядки).

k	A_k	$\mathcal{A}(\mathfrak{d}_k, \mathfrak{c}_1)$	$\mathcal{A}(\mathfrak{d}_k, \mathfrak{c}_2)$	$\mathcal{A}(\mathfrak{d}_k, \mathfrak{c}_3)$	$\mathfrak{c}^k_1$	$\mathfrak{c}^k_2$	$\mathfrak{c}^k_3$	$\mathfrak{d}^{k+1}$
0	$\varnothing$	$cadb$	$bdac$	$dabc$	cb	bc	bc	bc
1	$\{b, c\}$	$bcad$	$bdac$	$dabc$	bca	bac	abc	bac
2	$\{a, b, c\}$	$bacd$	$bdac$	$dbac$	$bacd$	$bdac$	$dbac$	$bdac$

Таким образом, предпочтения $\partial_{\mathcal{A},J}(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3)$ соответствуют порядку $bdac$, т. е. $\partial_{\mathcal{A},J}(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3) \neq \partial(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shelah S.* On the Arrow property // Adv. Appl. Math. 2005. V. 34. P. 217—251.
2. *Polyakov N., Shamolin M.* On a generalization of Arrow's impossibility theorem. Dokl. Math. 2014. V. 89, N 3. P. 290—292.

*См. [12].

3. *Polyakov N.* Functional Galois connections and a classification of symmetric conservative clones with a finite carrier: Preprint. 2018.
4. *Aizerman M., Aleskerov F.* Voting operators in the space of choice functions // Math. Soc. Sci. 1986. V. 11, N 3. P. 201—242,
5. *Aleskerov F. T.* Arrovian Aggregation Models. New York: Springer, 1999.
6. *Aleskerov F. T.* Local aggregation models // Automat. Remote Control. 2000. N 10. P. 3—26.
7. *Поляков Н. Л., Шамолин М. В.* О замкнутых симметричных классах функций, сохраняющих любой одноместный предикат // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2013. № 6 (107). С. 61—73.
8. *Post E.* Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. Princeton Univ., 1942. (Ann. Math. Stud., Vol. 5).
9. *Марченков С. С.* Функциональные системы с операцией суперпозиции. ФИЗМАТЛИТ, 2004.
10. *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Berlin: Springer, 2006.
11. *Arrow K.* Social Choice and Individual Values. Yale Univ. Press, 1963.
12. *Brandt F., Conitzer V., Endriss U. et al.* Handbook of Computational Social Choice. Cambridge Univ. Press, 2016.