МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ООО «В-ТИМ»

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Материалы Международной конференции,
посвященной 110-летию со дня рождения
Льва Семеновича Понтрягина,
Москва, 12–14 декабря 2018 г.

OPTIMAL CONTROL AND DIFFERENTIAL GAMES

Materials of the International Conference
dedicated to the 110th anniversary
of Lev Semenovich Pontryagin,
Moscow, December 12–14, 2018

Москва – 2018

УДК 517.9
ББК 22.16
О62

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18–01–20101) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации

Ответственный редактор *К. О. Бесов*

О62 **Оптимальное управление и дифференциальные игры** : Материалы Международной конференции, посвященной 110-летиюсо дня рождения Льва Семеновича Понтрягина, Москва, 12–14 декабря 2018 г. / Отв. ред. К. О. Бесов. – Москва : Математический институт им. В. А. Стеклова РАН; МАКС Пресс, 2018. – 304 с.

ISBN 978-5-98419-082-4 (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
ISBN 978-5-317-05994-1 (МАКС Пресс)

ISBN 978-5-98419-082-4
ISBN 978-5-317-05994-1

and the jump conditions

$$\Delta\psi_x(t^i) = l'_{x^i(t_i)} = \alpha_i \Phi'_{x^i(t_i)} + \beta_i \Psi'_{x^i(t_i)}.$$

The stationarity conditions take the form

$$\begin{cases} \psi_x f_u - h\phi_u = 0 \quad \text{on } [t_0, T], \\ \psi_{y^i} g^i_{v^i} - \sigma^i \omega^i_{v^i} = 0 \quad \text{on } \Delta^i := [t_i, T], \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

while the energy conservation law takes the form

$$\psi_x f + \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{y^i} g^i = c \qquad \text{on } \Delta_i := [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, n+1.$$

An important modification of Problem A is Problem C with terminal cost related to the "widest" final distribution of payloads. Here, we get payload dynamics in the inertial form

$$\ddot{y}^i = g(y^i, \dot{y}^i, v^i)$$

and the quadratic cost

$$J_C = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n-1} \bigl(y^i(T) - y^j(T)\bigr)^2 \to \min.$$

References

1. *Denbow C.H.* A generalized form of the problem of Bolza // Contributions to the calculus of variations, 1933–1937. Chicago: Univ. Chicago Press, 1937. P. 449–484.
2. *Warga J.* The reduction of certain control problems to an "ordinary differential" type // SIAM Rev. 1968. V. 10, No. 2. P. 219–222.
3. *Dmitruk A.V., Kaganovich A.M.* Maximum principle for optimal control problems with intermediate constraints // Comput. Math. Model. 2011. V. 22, No. 2. P. 180–215.

Интегрируемые динамические системы с переменной диссипацией (Integrable variable dissipation dynamical systems)

М. В. Шамолин (M. V. Shamolin)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

В задачах динамики изучаются механические системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1].

В качестве класса изучаемых динамических систем рассмотрим следующую систему с гладкой правой частью с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении системы:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_n + b\delta(\alpha), \\ \dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z^2_{n-1} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_2^2 + \ldots \\ \qquad \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\ \dot z_{n-1} = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_{n-1} z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z^2_{n-2} - \ldots \\ \qquad \ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot z_2 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_2 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots \\ \qquad \ldots - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4}) z_2 z_3 - \\ \qquad - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\ \dot z_1 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_1 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} - \\ \qquad - [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots \\ \qquad \ldots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_{n-1} f(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1), \quad \dot\beta_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \quad \ldots \\ \ldots, \quad \dot\beta_{n-1} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \end{cases} \tag{1}$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \ddot\alpha - b\dot\alpha\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0, \\ \ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ddot\beta_{n-1} - b\dot\beta_{n-1}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1} + \ldots \\ \quad \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1} = 0, \quad W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha). \end{cases}$$

Параллельно выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пространства (см. также [1–3]).

Пусть справедливы равенства

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) \equiv \ldots \equiv \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha), \tag{2}$$

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{3}$$

После замены переменных

$$w_n = z_n, \qquad w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}, \qquad w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1},$$
$$w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \qquad \ldots, \qquad w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_2^{n-2}}},$$

система (1) распадается:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_n + b\delta(\alpha), \quad \dot{w}_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) w_{n-1}^2, \\ \dot{w}_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_{n-1} w_n, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_s = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2} f(\alpha) \ldots [2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \\ \dot{\beta}_s = \pm \dfrac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}} f(\alpha) \ldots, \quad s = 1, \ldots, n-2, \end{cases} \tag{5}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \pm \frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \ldots i(\beta_{n-2}), \tag{6}$$

где в системе (5) многоточием показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s. Для полной интегрируемости системы (4)–(6) достаточно указать два независимых интеграла системы (4), по одному — для систем (5) (меняя независимые переменные; их количество равно $n-2$) и интеграл, "привязывающий" уравнение (6) (т.е. всего $n+1$ интегралов).

Теорема. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \qquad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}.$$

Тогда система (1) *при выполнении условий* (2), (3) *обладает полным набором* $(n+1)$ *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Так, при $\kappa = -1$ интегралы следующие:

$$\Theta_1(w;\alpha) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1,$$

$$\Theta_2(w;\alpha) = G\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2,$$

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2}, \qquad s = 1, \ldots, n-2,$$

$$\Theta_{n+1}(w;\alpha,\beta) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\, db = C_{n+1}.$$

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является или собственно диссипативной, или системой с разгоняющими силами). Тем не менее и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости систем со знакопеременной диссипацией в явном виде (см. также [4, 5]).

Список литературы

1. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // ДАН. 2015. Т. 464, №6. С. 688–692.
2. *Шамолин М.В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования // ДАН. 2016. Т. 470, №3. С. 288–292.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // ДАН. 2016. Т. 471, №5. С. 547–551.
4. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // ДАН. 2017. Т. 474, №2. С. 177–181.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 475, №5. С. 519–523.

Structurally stable properties of control systems

Shiva Shankar

Chennai Mathematical Institute, Chennai (Madras), India

sshankar@cmi.ac.in

We study properties of control systems that are stable with respect to perturbations. These ideas go back to the notion of structural stability of autonomous systems due to Andronov and Pontryagin. In contrast, control systems usually admit inputs, and are therefore non-autonomous.

We study linear systems defined by partial differential or difference equations. These are systems defined over the ring $A = \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ of partial differential operators, or the ring $B = \mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n, \sigma_n^{-1}]$ of Laurent polynomials, respectively. More precisely:

(i) Let $P \subset A^k$ be an A-submodule, and suppose it is generated by $p_1, \dots, p_\ell$. Let $p_i = (p_{i1}(\partial), \dots, p_{ik}(\partial))$, and let $P(\partial)$ be the $\ell \times k$ matrix whose rows are the p_i. Let $\mathcal{C}^\infty$ be the space of smooth functions on $\mathbb{R}^n$. Then

$$P(\partial)\colon (\mathcal{C}^\infty)^k \to (\mathcal{C}^\infty)^\ell, \qquad f \mapsto P(\partial) f \tag{1}$$

is an A-module map. The *distributed system* $\mathcal{B}(P)$ defined by P is the kernel $\{f \mid P(\partial) f = 0\}$ of the above map (it does not depend on the choice of generators for P which defined the matrix $P(\partial)$; indeed, $\mathcal{B}(P) \simeq \mathsf{Hom}_A(A^k/P, \mathcal{C}^\infty)$).

Remark. More generally, we can replace $\mathcal{C}^\infty$ by any A-submodule $\mathcal{F}$ of the space $\mathcal{D}'$ of distributions on $\mathbb{R}^n$, and study the system $\mathsf{Hom}_A(A^k/P, \mathcal{F})$. Examples include the spaces $\mathcal{S}'$ of tempered distributions, $\mathcal{S}$ of rapidly decreasing functions, the inverse limit $\overleftarrow{\mathcal{H}}$ of the Sobolev spaces, etc. The answers to the questions we address