Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Российский университет дружбы народов
Российский фонд фундаментальных исследований
Математический Фонд Крыма

Посвящается 100-летнему юбилею образования Таврического университета в Крыму

Сборник материалов международной конференции

КРОМШ-2018

XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам

Секции 1 - 3

Секция 1. Общая теория операторов
Секция 2. Спектральная теория операторов
Секция 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения и динамические системы

Симферополь
«Полипринт»
2018

УДК 517.9:519.2
С 23

Печатается по решению Организационного комитета XXIX Крымской Осенней Математической Школы-симпозиума по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2018).

Ответственный за выпуск:

Копачевский Николай Дмитриевич, председатель Организационного комитета КРОМШ-2018, д.ф.-м.н., профессор.

Ответственный редактор:

Войтицкий Виктор Иванович, к.ф.-м.н., доцент.

С 23 Сборник материалов международной конференции “XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральными эволюционным задачам” (КРОМШ-2017). Секции 1–3. – Симферополь: Полипринт, 2018. – 156 с.

ISBN 978-5-6041133-7-0

В сборнике представлены материалы работ участников международной конференции “Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2018)”, посвященных различным направлениям исследований в области математического и функционального анализа, численного анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей, оптимального управления, теории игр, математического моделирования, дискретной математики и методики преподавания.

В книге сохранена авторская редакция статей, выполнено лишь частичное техническое редактирование; в связи с этим редакционная коллегия не несет ответственности за возможные неточности.

Материал, представленный в сборнике, может быть полезен научным сотрудникам, работникам высшего образования, аспирантами студентам. .

УДК 517.9:519.2

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-20062 Г).

ISBN 978-5-6041133-7-0

К истории физико-математического факультета Таврического университета (1918-1925 гг.)

14 октября 2018 года исполняется ровно 100 лет со дня торжественного открытия первого высшего учебного заведения в Крыму — Таврического университета. Физико-математический факультет появился в Крыму еще в мае 1918 года как филиал Киевского университета Святого Владимира. С осени того же года факультет стал подразделением Таврического университета.

С момента открытия в университете работали известные математики, представлявшие ведущие математические школы того времени. Руководителем инициативной группы по созданию филиала в Крыму был *Дмитрий Александрович Граве* (1863 - 1939), академик УАН, почетный член АН СССР, основатель отечественной алгебраической школы.

В 1918 - 1922 годах большой вклад в развитие физико-математического факультета внес *Николай Митрофанович Крылов* (1879 - 1955), академик АН УССР, член ряда иностранных математических обществ. Созданный по его инициативе Математический кабинет (с февраля 1919 г.) способствовал научным исследованиям и образовательной деятельности в области математики. Это было первое в России учреждение подобного рода, послужившее прообразом научно-исследовательских институтов. В июне 1919 года Совет Таврического университета принял постановление об учреждении Математического общества, которое существовало до 1926 года.

В 1918 - 1921 годах на факультете работал *Матвей Александрович Тихомандрицкий*, известный специалист в области эллиптических функций. В 1920 - 1921 годах на факультете преподавал *Владимир Иванович Смирнов*, академик АН СССР, Герой социалистического труда, автор широко известного пятитомного Курса высшей математики, переведенного на 8 языков и изданного в 10 странах.

С 1921 по 1925 год физико-математический факультет был учебным подразделением Крымского университета имени М.В. Фрунзе. В эти годы на факультете работали такие известные математики как *Михаил Людвигович Франк* (отец нобелевского лауреата по физике И.М. Франка), *Лев Александрович Вишневский* (в 1918 - 1952 годах декан факультета), *Николай Сергеевич Кошляков* (член-корреспондент АН СССР, член Лондонского математического общества), *Николай Михайлович Герсеванов* (член-корреспондент АН СССР).

С 1925 года факультет стал подразделением Крымского государственного педагогического института. С августа 2014 года Таврический университет носит название Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского.

Оргкомитет Крымской Осенней Математической Школы-симпозиума посвящает конференцию 2018 года столетнему юбилею Таврического университета.

УДК: 517+531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СО МНОГИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ

Шамолин М. В.

Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Россия, Москва)

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля обладают переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE DYNAMICAL SYSTEMS WITH MANY DEGREES OF FREEDOM WITH DISSIPATION

Shamolin M. V.

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University (Russian Federation, Moscow)

In this study, we show the integrability of certain classes of dynamic systems on the tangent bundle to a multidimensional manifold. In this case, the force fields have variable dissipation and generalize the cases considered previously.

Keywords: dynamical system, dissipation, integrability, transcendental first integral.

В задачах динамики изучаются механические системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. Выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Рассмотрим некоторый класс систем с диссипацией. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы с гладкой правой частью:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dot\alpha = -z_n + b\delta(\alpha),\\
\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_{n-1}^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_2^2 + \ldots\\
\ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\dot z_{n-1} = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_{n-1} z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_{n-2}^2 - \ldots\\
\ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \ldots,\\
\dot z_2 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_2 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]\, f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots\\
\ldots - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})]\, f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4}) z_2 z_3 -\\
- \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\dot z_1 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\, z_1 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]\, f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} -\\
- [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)]\, f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots\\
\ldots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]\, f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) z_1 z_2,\\
\dot\beta_1 = z_{n-1} f(\alpha),\ \dot\beta_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1),\ \dot\beta_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \ldots,\\
\dot\beta_{n-1} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}),
\end{array}\right. \qquad (1)$$

которая почти всюду эквивалентна

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \ldots, \\ \ddot{\beta}_{n-2} - b\dot{\beta}_{n-2}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots \\ \ldots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_{n-1} - b\dot{\beta}_{n-1}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots \\ \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0, \; W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha). \end{cases}$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (1) порядка $2n$ при выполнении равенств

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha), \tag{2}$$

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{3}$$

Для полного интегрирования системы (1) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$w_n = z_n, \; w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}, \; w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1}, \; w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}, \; \ldots, \; w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_2^{n-2}}},$$

система (1) распадается следующим образом:

$$\dot{\alpha} = -w_n + b\delta(\alpha), \; \dot{w}_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2, \; \dot{w}_{n-1} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]w_{n-1}w_n, \tag{4}$$

$$\dot{w}_s = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)\ldots\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)\right], \dot{\beta}_s = \pm\frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)\ldots, s = 1,\ldots,n-2, \tag{5}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \pm\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{6}$$

где в системе (5) символом "$\ldots$" показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (4)–(6) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4), по одному — для систем (5) (меняя в них независимые переменные; их $n-2$ штуки), и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6) (т.е. всего $n+1$).

Теорема 1. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \; F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{7}$$

Тогда система (1) при выполнении условий (2), (3) обладает полным набором $(n+1)$ независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

В частности, при $\kappa = -1$ система (4) имеет следующий первый интеграл:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1};\alpha) = G_1\left(\frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}.$$

Дополнительный первый интеграл для системы (4) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1};\alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}$$

и при $\kappa = -1$ он найдется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int\frac{(b-u_n)du_n}{2(\lambda - bu_n + u_n^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\}/2}, \; u_n = \frac{w_n}{\delta(\alpha)}.$$

Первые интегралы для систем (5) имеют вид

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \mathrm{const}, \; s = 1,\ldots,n-2,$$

где $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \ldots, n-2$, — некоторые гладкие функции. А дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6), имеет вид

$$\Theta_{n+1}(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\, db = C_{n+1} = \text{const}.$$

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (4) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [1, 2]. При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами. В силу (7)

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + 2 \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)db \cong w_n^2 + w_{n-1}^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{8}$$

где "$\cong$" означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом, в силу (3) и (7)

$$\Phi_2(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\; f(\alpha) \exp\left\{ 2 \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db \right\} \cong w_{n-1}\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{9}$$

где "$\cong$" означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (8), (9) также является первым интегралом системы (4) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{10}$$

и (9) по отдельности не является первым интегралом системы (4). Однако отношение функций (10), (9) является первым интегралом системы (4) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{11}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha \sin\alpha}. \tag{12}$$

Случай (11) формирует системы, соответствующие движению динамически симметричного $(n+1)$-мерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле [3]. Случай (12) формирует системы, соответствующие движению материальной точки на n-мерной сфере также в неконсервативном поле. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на n-мерной сфере. В случае (11), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение $(n+1)$-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [4]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает обобщенный $(n+1)$-мерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [5]. Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной, или системой с разгоняющими силами). И в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Список литературы

[1] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела / М. В. Шамолин. – М.: Экзамен, 2007. – 352 с.

[2] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения / М. В. Шамолин // Фундам. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14, вып. 3. – С. 3–237.

[3] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем / В. В. Трофимов // Фундам. и прикл. матем. – 2010. – Т. 16, вып. 4. – С. 3–229.

[4] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / М. В. Шамолин // Итоги науки и техники. Сер. "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". – 2013. – Т. 125. – С. 3–254.

[5] Шамолин М.В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения / М. В. Шамолин // Фундам. и прикл. матем. – 2015. – Т. 20, вып. 4. – С. 3–231.