ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2018, том 482, № 5, с. 527–533

МЕХАНИКА

УДК 531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ МНОГОМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2018 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 17.04.2018 г.

Поступило 19.04.2018 г.

Показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

DOI: 10.31857/S086956520003039-5

ВВЕДЕНИЕ

В задачах динамики изучаются механические системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений – многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2, 3, и 4 см. [3–5]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные (см. также [6]).

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
E-mail: shamolin@rambler.ru

1. УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРИ ЗАМЕНЕ КООРДИНАТ И ИХ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Как известно, в случае n-мерного гладкого риманова многообразия M^n с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $TM^n\{\alpha^{\bullet}, \beta_1^{\bullet}, \ldots, \beta_{n-1}^{\bullet}; \alpha, \ldots, \beta_{n-1}\}$ $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\ldots$, $\beta_{n-1} = x^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$x^{i\bullet\bullet} + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(x) x^{j\bullet} x^{k\bullet} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n. \quad (1)$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении TM^n. Рассмотрим замену координат касательного пространства:

$$x^{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} R^{ij} z_j, \quad (2)$$

которую можно обратить: $z_j = \sum_{i=1}^{n} T_{ji} x^{i\bullet}$, при этом R^{ij}, T_{ji}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, – функции от x, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. соотношениями на касательном расслоении TM^n.

Справедливы равенства:

$$z_i^\bullet = \sum_{j,k=1}^{n} T_{ij,k} x^{j\bullet} x^{k\bullet} - \sum_{j,p,q=1}^{n} T_{ij} \Gamma_{pq}^{j} x^{p\bullet} x^{q\bullet}, \qquad (3)$$

где $T_{ji,k} = \dfrac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}$, $j, i, k = 1, 2, ..., n$, при этом в последней системе вместо $x^{i\bullet}$, $i = 1, 2, ..., n$, надо подставить формулы (2).

Предложение 1. *Система* (1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (2), (3).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (3) зависит как от замены переменных (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma_{jk}^{i}(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{gathered}\alpha^\bullet = -z_n,\ \beta_1^\bullet = z_{n-1} f_1(\alpha),\ \beta_2^\bullet = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1),\\ \beta_3^\bullet = z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2),\ \ldots, \\ \beta_{n-1}^\bullet = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \cdots i_1(\beta_{n-2}),\end{gathered} \qquad (4)$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, ..., n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2, ..., n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, 2, ..., n-3$, ..., $i_1(\beta_{n-2})$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, ..., z_n в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [7, 8] (в частности, на многомерных поверхностях вращения) с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности:

$$\begin{gathered}\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_1^\bullet + \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \ldots\\
\ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_2^\bullet + 2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_2^\bullet +\\
+\Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{2}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_3^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 3}^{3}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_3^\bullet + 2\Gamma_{13}^{3}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_3^\bullet +\\
+ 2\Gamma_{23}^{3}(\alpha,\beta)\beta_2^\bullet\beta_3^\bullet +\\
+\Gamma_{44}^{3}(\alpha,\beta)\beta_4^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{3}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\ldots\\
\beta_{n-2}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha,n-2}^{n-2}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + 2\Gamma_{1,n-2}^{n-2}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + \ldots\\
\ldots + 2\Gamma_{n-3,n-2}^{n-2}(\alpha,\beta)\beta_{n-3}^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_{n-1}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)\alpha^\bullet\beta_{n-1}^\bullet + 2\Gamma_{1,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)\beta_1^\bullet\beta_{n-1}^\bullet + \ldots\\
\ldots + 2\Gamma_{n-2,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-2}^\bullet\beta_{n-1}^\bullet = 0,\end{gathered} \qquad (5)$$

В случае (4) уравнения (3) примут вид

$$\begin{gathered}z_1^\bullet = \left[2\Gamma_{\alpha,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] z_1 z_n -\\
-\left[2\Gamma_{1,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} -\\
-\left[2\Gamma_{2,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma_{n-2,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right]\times\\
\times f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \ldots r_1(\beta_{n-3}) z_1 z_2,\\
z_2^\bullet = \left[2\Gamma_{\alpha,n-2}^{n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] z_2 z_n -\\
-\left[2\Gamma_{1,n-2}^{n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] f_1(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots\\
\ldots - \left[2\Gamma_{n-3,n-2}^{n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right]\times\\
\times f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \ldots s_1(\beta_{n-4}) z_2 z_3 -\\
-\Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta) \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \ldots\\
\ldots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\ldots\\
z_{n-1}^\bullet = \left[2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] z_{n-1} z_n -\\
-\Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_{n-2}^2 - \cdots\\
\cdots - \Gamma_{n-1,n-1}^{1}(\alpha,\beta) \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots\\
\cdots i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
z_n^\bullet = \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) z_{n-1}^2 +\\
+\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \cdots\\
\cdots + \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \cdots\\
\cdots i_1^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\end{gathered} \qquad (6)$$

здесь $DQ(q) = \dfrac{d \ln|Q(q)|}{dq}$, и уравнения (5) почти всюду эквивалентны составной системе (4), (6) на многообразии $TM^n\{z_n, \ldots, z_1;\ \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (4), (6) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов.

Предложение 2. *Если всюду на своей области определения справедлива система* $n(n-1)/2$ *равенств*

$$\begin{gathered}2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0,\ \ldots,\\
2\Gamma_{\alpha,n-1}^{n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha) +\\
+\Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,\\
\left[2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\right] f_1^2(\alpha) +\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\equiv 0, \ \ldots, \\
\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\right]f_1^2(\alpha)+ \\
+\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)\cdots i_1^2(\beta_{n-2})\equiv 0, \ \ldots, \\
\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\right]f_{n-2}^2(\alpha)\cdots r_1^2(\beta_{n-3})+ \\
+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)\cdots i_1^2(\beta_{n-2})\equiv 0,
\end{gathered} \tag{7}
$$

то система (4), (6) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$
\Phi_1(z_n, \ \ldots, \ z_1)=z_1^2+\ldots+z_n^2=C_1^2=\text{ const}. \tag{8}
$$

Можно доказывать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, ..., n - 1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2, ..., n - 2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, 2, ..., n - 3, ...,$ $i_1(\beta_{n-2})$ системы (7) для наличия аналитического интеграла (8) для системы (4), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (7) нам не потребуется. Тем не менее в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (4) выполнение условий

$$
f_1(\alpha)\equiv\ldots\equiv f_{n-1}(\alpha)=f(\alpha), \tag{9}
$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2, ..., n - 2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, 2, ..., n - 3, ...,$ $i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять $(n - 1)(n - 2)/2$ преобразованным уравнениям из (7):

$$
\begin{gathered}
2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1)\equiv 0, \ \ldots, \\
2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)+\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g_{n-2}^2(\beta_1)\cdots \\
\cdots i_1^2(\beta_{n-2})\equiv 0, \ \ldots, \\
2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})g_{n-3}^2(\beta_1)\cdots r_1^2(\beta_{n-3})+ \\
+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g_{n-2}^2(\beta_1)\cdots i_1^2(\beta_{n-2})\equiv 0.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2, ..., n - 2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, 2, ..., n - 3, ...,$ $i_1(\beta_{n-2})$ пока зависят от коэффициентов связности, а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3. *Если выполнены свойства* (9), (10), *при этом справедливы равенства*

$$
\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\equiv\ldots\equiv\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha), \tag{11}
$$

то система (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$
\begin{gathered}
\Phi_2(z_{n-1}, \ \ldots, \ z_1;\alpha)= \\
=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}\,\Phi_0(\alpha)=C_2=\text{const},
\end{gathered} \tag{12}
$$

$$
\Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.
$$

Предложение 4. *Если выполнены условия предложения 3, а также*

$$
g_1(\beta_1)\equiv\ldots\equiv g_{n-2}(\beta_1)=g(\beta_1), \tag{13}
$$

при этом справедливы равенства

$$
\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\equiv\ldots\equiv\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1), \tag{14}
$$

то система (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$
\begin{gathered}
\Phi_3(z_{n-2}, \ \ldots, \ z_1; \ \alpha, \ \beta_1)= \\
=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)=C_3=\text{const},
\end{gathered} \tag{15}
$$

$$
\Psi_1(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.
$$

Далее применяем по индукции изложенные выше рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 5. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, ..., *при этом справедливо равенство*

$$
\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{16}
$$

то система (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$
\begin{gathered}
\Phi_n(z_1; \ \alpha, \ \beta_1, \ \ldots, \ \beta_{n-2})= \\
=z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\cdots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=C_n=\text{const},
\end{gathered} \tag{17}
$$

$$
\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=i_1(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}}\Gamma_{n-1}(b)db\right\}.
$$

Предложение 6. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, ..., 5, *то система* (4), (6) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$
\begin{gathered}
\Phi_{n+1}(z_{n-2}, \ \ldots, \ z_1; \ \alpha, \ \beta)= \\
=\beta_{n-1}\pm\int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n i_1(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b)-C_n^2}}db=C_{n+1}=\text{const}.
\end{gathered} \tag{18}
$$

Набор первых интегралов (8), (12), (15)–(18) является полным набором независимых первых интегралов системы (4), (6) при перечисленных выше условиях (то, что полный набор состоит из $n + 1$, а не из $2n - 1$ первых интегралов, будет показано ниже).

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ И ИХ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теперь несколько модифицируем систему (4), (6) при условиях (9)–(11), (13)–(16), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (19) при $b = 0$, которая на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\begin{gathered}
\alpha^\bullet = -z_n + b\delta(\alpha),\\
z_n^\bullet = F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_{n-1}^2 +\\
+\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_2^2 + \cdots\\
\cdots + \Gamma_{n-1,n-1}^\alpha(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\cdots\\
\cdots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
z_{n-1}^\bullet = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_{n-1} z_n -\\
-\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_{n-2}^2 - \cdots\\
\cdots - \Gamma_{n-1,n-1}^1(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\cdots\\
\cdots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
\cdots\\
z_2^\bullet = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_2 z_n -\\
-\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \cdots\\
\cdots - \left[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})\right] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots\\
\cdots s(\beta_{n-4}) z_2 z_3 - \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\cdots\\
\cdots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) z_1^2,\\
z_1^\bullet = \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_1 z_n -\\
-\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] f(\alpha) z_1 z_{n-1} -\\
-\left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \cdots\\
\cdots - \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})\right] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\cdots\\
\cdots r(\beta_{n-3}) z_1 z_2,\\
\beta_1^\bullet = z_{n-1} f(\alpha),\ \beta_2^\bullet = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1),\ \beta_3^\bullet =\\
= z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \ldots,\\
\beta_{n-1}^\bullet = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\cdots i(\beta_{n-2}),
\end{gathered} \tag{19}$$

и она при $b = 0$ почти всюду эквивалентна системе (5), первое уравнение которой будет иметь вид

$$\alpha^{\bullet\bullet} + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)\,\beta_1^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^\alpha(\alpha,\beta)\,\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0.$$

Предложение 7. *Если выполнены условия предложения* 2, *то система* (19) *при* $b = 0$ *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1, \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const},$$

$$F_1(\alpha) = 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da. \tag{20}$$

Предложение 8. *Если выполнены условия предложений* 3, 4–5, *то система* (19) *при* $b = 0$ *имеет гладкие первые интеграы вида* (12), (15)–(17).

Предложение 9. *Если выполнены условия предложения* 6, *то система* (19) *при* $b = 0$ *имеет первый интеграл вида* (18).

Набор первых интегралов (20), (12), (15)–(18) является полным набором независимых первых интегралов системы (19) (при $b = 0$) при перечисленных выше условиях (то, что полный набор состоит из $n + 1$, а не из $2n - 1$ первых интегралов, будет показано ниже).

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ И ИХ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теперь рассмотрим систему (19) при $b \neq 0$. При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении системы (19), которая почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - b\alpha^\bullet\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \ldots\\
\ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^\alpha(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_1^{\bullet\bullet} - b\beta_1^\bullet\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^\bullet\beta_1^\bullet +\\
+\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^1(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_2^{\bullet\bullet} - b\beta_2^\bullet\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^\bullet\beta_2^\bullet +\\
+2\Gamma_2(\alpha)\beta_1^\bullet\beta_2^\bullet + \Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} + \ldots\\
\ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^2(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_3^{\bullet\bullet} - b\beta_3^\bullet\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^\bullet\beta_3^\bullet +\\
+2\Gamma_2(\alpha)\beta_1^\bullet\beta_3^\bullet + 2\Gamma_3(\alpha)\beta_2^\bullet\beta_3^\bullet +\\
+\Gamma_{44}^3(\alpha,\beta)\beta_4^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^3(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\cdots\\
\beta_{n-2}^{\bullet\bullet} - b\beta_{n-2}^\bullet\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^\bullet\beta_{n-2}^\bullet +\\
+2\Gamma_2(\alpha)\beta_1^\bullet\beta_{n-2}^\bullet + \ldots + 2\Gamma_{n-2}(\alpha,\beta)\beta_{n-3}^\bullet\beta_{n-2}^\bullet +\\
+\Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_{n-1}^{\bullet\bullet} - b\beta_{n-1}^\bullet\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^\bullet\beta_{n-1}^\bullet +\\
+2\Gamma_2(\alpha)\beta_1^\bullet\beta_{n-1}^\bullet + \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\alpha)\beta_{n-2}^\bullet\beta_{n-1}^\bullet = 0,\\
W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha).
\end{gathered}$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (19) порядка $2n$ при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) \equiv$$
$$\equiv \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \cdots = \Gamma_n(\alpha). \qquad (21)$$

Введём также (по аналогии с (10)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (7):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \qquad (22)$$

Для полного интегрирования системы (19) необходимо знать, вообще говоря, $2n - 1$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$w_1 = z_{n-1} / \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}, \ \ldots,$$

$$w_{n-3} = z_3 / \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \ w_{n-2} = z_2 / z_1,$$

$$w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}, \ w_n = z_n,$$

система (19) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet} &= -w_n + b\delta(\alpha), \\ w_n^{\bullet} &= F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) w_{n-1}^2, \\ w_{n-1}^{\bullet} &= \left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] w_{n-1} w_n; \end{aligned} \qquad (23)$$

$$\begin{aligned} w_s^{\bullet} &= (\pm) w_{n-1} \sqrt{1 + w_s^2} f(\alpha) \cdots \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)\right], \\ \beta_s^{\bullet} &= (\pm) \frac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1 + w_s^2}} f(\alpha) \cdots, \ s = 1, 2, \ldots, n-2, \end{aligned} \qquad (24)$$

$$\beta_{n-1}^{\bullet} = (\pm) \frac{w_{n-1}}{\sqrt{1 + w_{n-2}^2}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \cdots i(\beta_{n-2}), \qquad (25)$$

где в системе (24) символом ... показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ – одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (23)–(25) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (23), по одному — для систем (24) (меняя в них независимые переменные; их $n - 2$), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (25) (т.е. всего $n + 1$).

Теорема. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \qquad (26)$$

Тогда система (19) *при выполнении условий* (21), (22) *обладает полным набором* (n + 1) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, при $\kappa = -1$ явный вид одного из интегралов для системы (23) таков:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1\left(\frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) =$$
$$= \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - b w_n \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \qquad (27)$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (23) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) =$$
$$= G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const} \qquad (28)$$

и, например, при $\kappa = -1$ найдется из квадратуры

$$\ln|\delta(\alpha)| =$$
$$= \int \frac{(b - u_n) du_n}{2(\lambda - b u_n + u_n^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b u_n + u_n^2)}\}/2},$$

где $u_n = w_n / \delta(\alpha)$. Его правая часть выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (27), (28) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (24) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} =$$
$$= \text{const}, \ s = 1, 2, \ldots, n-2, \qquad (29)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2, \ldots, n - 2$, см. (15)–(17). А дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (25), находится по аналогии с (18):

$$\Theta_{n+1}(w_2, w_1; \alpha, \beta) =$$
$$= \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db = C_{n+1} = \text{const}.$$

4. ЗАМЕЧАНИЕ О СТРУКТУРЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α – периодическая координата, то система (23) становится динамической системой с переменной диссипацией (с нулевым средним) [1–5]. При $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (20), (12). В силу (26)

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)\,da \cong$$
$$\cong w_n^2 + w_{n-1}^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{30}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (22) и (26)

$$\Phi_2(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) =$$
$$= \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\, f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} \cong$$
$$\cong w_{n-1}\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{31}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (30), (31) (или (20), (12)) также является первым интегралом системы (23) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{32}$$

и (31) по отдельности не является первым интегралом системы (23). Однако отношение функций (32), (31) является первым интегралом системы (23) ($\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. также [9, 10]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{33}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{34}$$

Случай (33) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного $(n + 1)$-мерного твёрдого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил [1, 2]. Случай (34) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на n-мерной сфере также в неконсервативном поле сил. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на n-мерной сфере. В случае (33), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение $(n + 1)$-мерного твёрдого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [1, 2]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает также обобщенный $(n + 1)$-мерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является или собственно диссипативной, или системой с разгоняющими силами). Тем не менее и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости систем со знакопеременной диссипацией в явном виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15-01-00848-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // ДАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.
2. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // ДАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 542–545.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.
4. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 168–172.

5. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
6. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67.
7. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
8. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа // ДАН. 1984. Т. 219. № 2. С. 228–237.
9. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
10. *Шамолин М.В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.