ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Ноябрь 2018 **Выпуск 95. С. 79-101**

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
Москва, Россия
shamolin@rambler.ru

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ

Показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию. При этом силовые поля обладают переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные. В качестве примера детально разобран случай четырехмерного многообразия. Библиография: 16 назв.

В задачах динамики изучаются системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [**1, 2**]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2 и 3 см. [**3**]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные [**4, 5**].

1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы

Как известно, в случае n-мерного гладкого риманова многообразия M^n с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на

© М. В. Шамолин, 2018

касательном расслоении $T_*M^n\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\ldots,\dot\beta_{n-1};\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$, $\alpha=x^1$, $\beta_1=x^2$, …, $\beta_{n-1}=x^n$, $x=(x^1,\ldots,x^n)$, имеют вид (дифференцирование берется по натуральному параметру)

$$\ddot x^i+\sum_{j,k=1}^n\Gamma^i_{jk}(x)\dot x^j\dot x^k=0,\ \ i=1,\ldots,n. \tag{1.1}$$

Изучим структуру уравнений (1.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^n. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot x^i=\sum_{j=1}^n R^{ij}(x)z_j, \tag{1.2}$$

которую почти всюду можно обратить:

$$z_j=\sum_{i=1}^n T_{ji}(x)\dot x^i,$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i,j=1,\ldots,n$, — функции от $x^1,\ldots,x^n$, а также $RT=E$, где $R=(R^{ij})$, $T=(T_{ji})$. Назовем уравнения (1.2) ***новыми кинематическими соотношениями***, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^n.

Справедливы тождества

$$\begin{aligned}\dot z_j&=\sum_{i=1}^n\dot T_{ji}\dot x^i+\sum_{i=1}^n T_{ji}\ddot x^i,\\ \dot T_{ji}&=\sum_{k=1}^n T_{ji,k}\dot x^k,\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $T_{ji,k}=\partial T_{ji}/\partial x^k$, $j,i,k=1,\ldots,n$. Подставляя в (1.3) уравнения (1.1), имеем

$$\dot z_i=\sum_{j,k=1}^n T_{ij,k}\dot x^j\dot x^k-\sum_{j,p,q=1}^n T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot x^p\dot x^q, \tag{1.4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot x^i$, $i=1,\ldots,n$, надо подставить формулы (1.2). Другими словами, равенство (1.4) можно переписать в виде

$$\dot z_i+\sum_{j,k=1}^n Q_{ijk}\dot x^j\dot x^k|_{(1.2)}=0,$$

$$Q_{ijk}(x)=\sum_{s=1}^n T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x)-T_{ij,k}(x).$$

Непосредственно из формул (1.4) вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Система* (1.1) *в той области, где* det $R(x)\neq 0$, *эквивалентна составной системе* (1.2), (1.4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1.1) к эквивалентной системе уравнений (1.2), (1.4) зависит как от замены переменных (1.2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

2. Важный частный случай

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в виде

$$
\begin{aligned}
&\dot\alpha = -z_n,\\
&\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha),\\
&\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\\
&\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot\beta_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты $z_1,\ldots,z_n$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических **[6, 7, 8]** (в частности, на многомерных поверхностях вращения) с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности:

$$
\begin{aligned}
&\ddot\alpha + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3\\
&\quad + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ddot\beta_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}\\
&\quad + \ldots + 2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot\beta_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_{n-1} + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (2.1) уравнения (1.4) примут вид

$$
\begin{aligned}
\dot z_1 &= [2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)]z_1 z_n - [2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)]f_1(\alpha)z_1 z_{n-1}\\
&\quad - [2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)]f_2(\alpha)g_1(\beta_1)z_1 z_{n-2}\\
&\quad - \ldots - [2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})]f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})z_1 z_2,\\
\dot z_2 &= [2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)]z_2 z_n - [2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)]f_1(\alpha)z_2 z_{n-1}\\
&\quad - \ldots - [2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})]f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})z_2 z_3\\
&\quad - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$\dot z_{n-1} = [2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)]z_{n-1}z_n$$
$$- \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)z_{n-2}^2 - \ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})z_1^2,$$
$$\dot z_n = \Gamma^\alpha_{11}f_1^2(\alpha)z_{n-1}^2 + \Gamma^\alpha_{22}f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)z_2^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})z_1^2,$$

здесь $DQ(q) = d\ln|Q(q)|/dq$, и уравнения (2.2) почти всюду эквивалентны составной системе (2.1), (2.3) на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (2.1), (2.3) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно знать меньше, что будет показано ниже.

Предложение 2.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система* $n(n-1)/2$ *равенств*

$$\begin{aligned}
&2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha) \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha) + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,\\
&[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)]f_1^2(\alpha)\\
&\quad + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})]f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\\
&\quad + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

то система (2.1), (2.3) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_n,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 = C_1^2 = \text{const}\ . \tag{2.5}$$

На первый взгляд, вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (2.5) не “заслуживает” решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (2.4) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных). Можно даже доказывать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ системы (2.4) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (2.5) для системы (2.1), (2.3) уравнений геодезических (2.2). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (2.4) нам не потребуется. Тем не менее в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (2.1) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = \ldots = f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha), \tag{2.6}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (2.4):

$$\begin{aligned}
&2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) \equiv 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})g^2_{n-3}(\beta_1)h^2_{n-4}(\beta_2)\dots r^2_1(\beta_{n-3})$$
$$+\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\dots i^2_1(\beta_{n-2})\equiv 0.$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\dots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\dots,n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности через систему (2.7), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 2.2. *Если выполнены свойства* (2.6), (2.7), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)=\dots=\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha), \tag{2.8}$$

то система (2.1), (2.3) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_{n-1},\dots,z_1;\alpha)=\sqrt{z_1^2+\dots+z_{n-1}^2}\ \Phi_0(\alpha)=C_2=\mathrm{const}\,, \tag{2.9}$$

где

$$\Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Предложение 2.3. *Если выполнены условия предложения* 2.2, *а также*

$$g_1(\beta_1)=\dots=g_{n-2}(\beta_1)=g(\beta_1), \tag{2.10}$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)=\dots=\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1), \tag{2.11}$$

то система (2.1), (2.3) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_3(z_{n-2},\dots,z_1;\alpha,\beta_1)=\sqrt{z_1^2+\dots+z_{n-2}^2}\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)=C_3=\mathrm{const}\,, \tag{2.12}$$

где

$$\Psi_1(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 2.4. *Если выполнены условия предложений* 2.2, 2.3, …, *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{2.13}$$

то система (2.1), (2.3) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_n(z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})=z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\dots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=C_n=\mathrm{const}\,, \tag{2.14}$$

где

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=i(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\},\quad i(\beta_{n-2})=i_1(\beta_{n-2}).$$

Предложение 2.5. *Если выполнены условия предложений* 2.2, 2.3, …, 2.4, *то система* (2.1), (2.3) *имеет первый интеграл вида*

$$\Phi_{n+1}(z_{n-2},\dots,z_1;\alpha,\beta)=\beta_{n-1}\pm\int\limits_{\beta_{n-20}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n i(b)}{\sqrt{C^2_{n-1}\Phi^2_{n-2}(b)-C_n^2}}\,db=C_{n+1}=\mathrm{const}\ . \tag{2.15}$$

Набор первых интегралов (2.5), (2.9), (2.12), ..., (2.14), (2.15) является полным набором независимых первых интегралов системы (2.1), (2.3) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$, первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (2.15) не так прост. В принципе, (2.15) может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, функция (2.15) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (так как отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций функция (2.15) может быть трансцендентной (см. также [**9, 10**]).

3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы

Теперь несколько модифицируем систему (2.1), (2.3) при условиях (2.6)–(2.8), (2.10), (2.11), ..., (2.13), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (3.1). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha = -z_n,\\
&\dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_{n-1}^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2 + \ldots\\
&\quad + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\dot z_{n-1} = [2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)]z_{n-1}z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_{n-2}^2 - \ldots\\
&\quad - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot z_2 = [2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)]z_2z_n - [2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)]f(\alpha)z_2z_{n-1} - \ldots\\
&\quad - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})+Dr(\beta_{n-3})]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})z_2z_3\\
&\quad - \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\dot z_1 = [2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)]z_1z_n - [2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)]f_1(\alpha)z_1z_{n-1}\\
&\quad - [2\Gamma_3(\beta_2)+Dh(\beta_2)]f(\alpha)g(\beta_1)z_1z_{n-2} - \ldots\\
&\quad - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+Di(\beta_{n-2})]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})z_1z_2,\\
&\dot\beta_1 = z_{n-1}f(\alpha),\ \dot\beta_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1),\ \dot\beta_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot\beta_{n-1} = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}),
\end{aligned}\tag{3.1}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned}
&\ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot\beta_1 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot\beta_2 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ddot\beta_3 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 + \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot\beta_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ddot\beta_{n-2} + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_{n-2} + \ldots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta_{n-1}^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0.$$

Предложение 3.1. *Если выполнены условия предложения* 2.1, *то система* (3.1) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}\,, \quad F_1(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)db. \tag{3.2}$$

Предложение 3.2. *Если выполнены условия предложений* 2.2, 2.3, …, 2.4, *то система* (3.1) *имеет гладкие первые интегралы вида* (2.9), (2.12), …, (2.14).

Предложение 3.3. *Если выполнены условия предложения* 2.5, *то система* (3.1) *имеет первый интеграл вида* (2.15).

Набор первых интегралов (3.2), (2.9), (2.12), …, (2.14), (2.15) является полным набором независимых первых интегралов системы (3.1) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показано ниже).

Относительно гладкости первого интеграла (2.15) отметим, что, поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, функция (2.15) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций функция (2.15) может быть трансцендентной (см. также [**10**]).

4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы

Теперь усложним систему (3.1) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\begin{aligned}
&\dot{\alpha} = -z_n + b\delta(\alpha),\\
&\dot{z}_n = F(\alpha) + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_{n-1}^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2 + \ldots\\
&\quad + \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\dot{z}_{n-1} = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_{n-1}z_n - \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_{n-2}^2 - \ldots\\
&\quad - \Gamma_{n-1,n-1}^{1}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot{z}_2 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_2z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]f(\alpha)z_2z_{n-1} - \ldots - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\\
&\ + Dr(\beta_{n-3})]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})z_2z_3 - \Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})z_1^2,\\
&\dot{z}_1 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]z_1z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)]f_1(\alpha)z_1z_{n-1} - [2\Gamma_3(\beta_2)\\
&\quad + Dh(\beta_2)]f(\alpha)g(\beta_1)z_1z_{n-2} - \ldots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})]f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})z_1z_2,\\
&\dot{\beta}_1 = z_{n-1}f(\alpha),\ \dot{\beta}_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1),\ \dot{\beta}_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot{\beta}_{n-1} = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3$$

$$+ \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ddot{\beta}_{n-2} - b\dot{\beta}_{n-2}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2}$$

$$+ \ldots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} - b\dot{\beta}_{n-1}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0,$$

где $W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (4.1) порядка $2n$ при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv \ldots \equiv \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha). \tag{4.2}$$

Введем также (по аналогии с (2.7)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (2.4):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{4.3}$$

Для полного интегрирования системы (4.1) необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{gathered} w_n = z_n, \quad w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}, \quad w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1}, \\ w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad \ldots, \quad w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_2^{n-2}}} \end{gathered} \tag{4.4}$$

система (4.1) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_n + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_n = F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)w_{n-1}^2, \\ \dot{w}_{n-1} = [2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}]w_{n-1}w_n, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_s = \pm w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)\ldots[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \\ \dot{\beta}_s = \pm\dfrac{w_s w_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)\ldots, \quad s = 1,\ldots,n-2, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \pm\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \tag{4.7}$$

где в системе (4.6) символом "…" показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \ldots$, зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (4.5)–(4.7) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.5), по одному — для систем (4.6) (меняя в них независимые переменные; их $n-2$ штуки), и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (4.7) (т.е. всего $n+1$).

Теорема 4.1. *Пусть для некоторых $\varkappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства*

$$\begin{aligned} \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) &= \varkappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \\ F(\alpha) &= \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Тогда система (4.1) *при выполнении условий* (4.2), (4.3) *обладает полным набором* $(n+1)$ *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Для начала сопоставим системе третьего порядка (4.5) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_n}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha) w_{n-1}^2}{-w_n + b\delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} &= \frac{[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] w_{n-1} w_n}{-w_n + b\delta(\alpha)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Вводя однородные переменные $w_n = u_n \delta(\alpha)$, $w_{n-1} = u_{n-1}\delta(\alpha)$, приводим систему (4.9) к виду

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) \frac{du_n}{d\alpha} &= \frac{F_3(\alpha) + \Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha) u_{n-1}^2 + \delta'(\alpha) u_n^2 - b\delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \\ \delta(\alpha) \frac{du_{n-1}}{d\alpha} &= \frac{-\Gamma_n(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha) u_{n-1} u_n + \delta'(\alpha) u_{n-1} u_n - b\delta'(\alpha) u_n}{-u_n + b}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$F_3(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}.$$

После выполнения условий (4.8) система (4.10) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_n}{du_{n-1}} = \frac{\lambda + \varkappa u_{n-1}^2 + u_n^2 - bu_n}{(1-\varkappa) u_{n-1} u_n - bu_n}, \tag{4.11}$$

которое имеет вид уравнения Абеля [**11, 12**]. В частности, при $\varkappa = -1$ уравнение (4.11) имеет первый интеграл

$$\frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 - bu_n + \lambda}{u_{n-1}} = C_1 = \mathrm{const}\,, \tag{4.12}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\begin{aligned} \Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) &= G_1\Big(\frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\Big) \\ &= \frac{w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.5) при $\varkappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (4.12) при $u_{n-1} \neq 0$ следующим образом:

$$\Big(u_n - \frac{b}{2}\Big)^2 + \Big(u_{n-1} - \frac{C_1}{2}\Big)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{4.14}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{4.15}$$

и фазовое пространство системы (3.2) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (4.14).

Таким образом, в силу соотношения (4.12) первое уравнение системы (4.10) при $\varkappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)} \frac{du_n}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_n + u_4^2) - C_1 U_1(C_1, u_n)}{-u_n + b},$$

где

$$U_1(C_1, u_n) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (4.15). Тогда дополнительный первый интеграл для системы (4.5) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_2\Big(\delta(\alpha), \frac{w_n}{\delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\delta(\alpha)}\Big) = C_2 = \mathrm{const} \tag{4.16}$$

и при $\varkappa = -1$ он найдется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b-u_n)du_n}{2(\lambda - bu_n + u_n^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_n^2 - bu_n + \lambda)}\}/2}, \quad u_n = \frac{w_n}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (4.13). Правая часть равенства (4.13) выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (4.13), (4.16) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (4.6) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \mathrm{const}\,, \quad s = 1, \ldots, n-2, \tag{4.17}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \ldots, n-2$, см. (2.12), …, (2.14). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.7), находится по аналогии с (2.15):

$$\Theta_{n+1}(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-20}}^{\beta_n-2} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\, db = C_{n+1} = \mathrm{const}\,,$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно подставить соответствующие левые части равенства (4.17).

5. Замечания о структуре первых интегралов систем с диссипацией

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (4.5) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [**13**]–[**15**]. При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (3.2), (2.9). В силу (4.8)

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)db \cong w_n^2 + w_{n-1}^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{5.1}$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (4.3) и (4.8)

$$\Phi_2(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\; f(\alpha) \exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\}$$
$$\cong w_{n-1}\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}\,, \tag{5.2}$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (5.1), (5.2) (или (3.2), (2.9)) также является первым интегралом системы (4.5) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 - bw_n\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{5.3}$$

и (5.2) по отдельности не является первым интегралом системы (4.5). Однако отношение функций (5.3), (5.2) является первым интегралом системы (4.5) (при $\varkappa = -1$) при любом b.

Вообще гвооря, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [**10**].

6. Некоторые приложения

По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.1}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{6.2}$$

Случай (6.1) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного $(n+1)$-мерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [**13, 16**]. Случай (6.2) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на n-мерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на n-мерной сфере. В случае (6.1), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение $(n+1)$-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [**13**]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает также обобщенный $(n+1)$-мерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной, или системой с разгоняющими силами). Тем не менее в этом случае также можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

7. Важный пример: случай четырехмерного многообразия

Как известно, в случае четырехмерного гладкого риманова многообразия M^4 с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^4\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2, \dot\beta_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $\beta_3 = x^4$, $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot x^i + \sum_{j,k=1}^{4} \Gamma^i_{jk}(x)\dot x^j \dot x^k = 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \tag{7.1}$$

Изучим структуру уравнений (7.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^4. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot x^i = \sum_{j=1}^{4} R^{ij}(x) z_j, \tag{7.2}$$

которую почти всюду можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^{4} T_{ji}(x)\dot x^i,$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i, j = 1, \ldots, 4$, — функции от x^1, x^2, x^3, x^4, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$ и $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (7.2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^4.

Справедливы тождества

$$\dot z_j = \sum_{i=1}^{4} \dot T_{ji}\dot x^i + \sum_{i=1}^{4} T_{ji}\ddot x^i, \quad \dot T_{ji} = \sum_{k=1}^{4} T_{ji,k}\dot x^k, \tag{7.3}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, \ldots, 4.$$

Подставляя в (7.3) уравнения (7.1), имеем

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{4} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{4} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q, \tag{7.4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i,\ i = 1,\ldots,4$, надо подставить формулы (7.2).

Другими словами, равенство (7.4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{4} Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k|_{(7.2)} = 0,$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{4} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x).$$

Непосредственно из формул (7.2), (7.4) вытекает следующее утверждение.

Предложение 7.1. *Система* (7.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$*, эквивалентна составной системе* (7.2)*,* (7.4)*.*

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (7.1) к эквивалентной системе уравнений (7.2), (7.4) зависит как от замены переменных (7.2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

7.1. Достаточно общий случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{\alpha} = -z_4,\\
&\dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha),\\
&\dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1),\\
&\dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),
\end{aligned} \tag{7.5}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1,2,3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1,2$, $h(\beta_2)$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2, z_3, z_4 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических (в частности, на сфере, более общих поверхностях вращения):

$$\begin{aligned}
&\ddot{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0,
\end{aligned} \tag{7.6}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (7.5) уравнения (7.4) примут вид

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 = {}&\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_3\\
&- \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2,\\
\dot{z}_2 = {}&\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_2 z_3\\
&- \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2,
\end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)z_2^2 - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)z_1^2,$$

$$\dot z_4 = \Gamma^\alpha_{11}f_1^2(\alpha)z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22}f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)z_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)z_1^2,$$

и уравнения (7.6) почти всюду эквивалентны составной системе (7.5), (7.7) на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4,z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$.

Для полного интегрирования системы (7.5), (7.7) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно будет меньше, что будет показано ниже при изучении систем с диссипацией.

Предложение 7.2. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$\begin{gathered}
2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha) \equiv 0,\\
2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0,\\
\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0,\\
\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0,
\end{gathered}\tag{7.8}$$

то система (7.5), (7.7) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_4,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 = C_1^2 = \text{const}\ . \tag{7.9}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (7.9) в силу системы (7.5), (7.7) дает

$$\begin{aligned}
&\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha)\right]z_3^2z_4\\
&+\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\right]z_2^2z_4\\
&+\left[\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\right]z_2^2z_3\\
&+\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\right]z_1^2z_4\\
&+\left[\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\right]z_1^2z_3\\
&+\left[\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\right]z_1^2z_2 \equiv 0,
\end{aligned}$$

поскольку выполнены свойства (7.8). □

Мы применим подход, позволяющий с помощью решения системы (7.8) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией. Будем предполагать в уравнениях (7.5) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = f(\alpha), \tag{7.10}$$

при этом $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (7.8):

$$
\begin{gathered}
2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0,\\
2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2} + \Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)h^2(\beta_2) \equiv 0.
\end{gathered}
\tag{7.11}
$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ зависят от коэффициентов связности через систему (7.11), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 7.3. *Если выполнены* (7.10), (7.11), *при этом*

$$
\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) = \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta) = \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{7.12}
$$

то система (7.5), (7.7) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$
\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\ \Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}\,, \tag{7.13}
$$

где

$$
\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.
$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (7.13) в силу системы (7.5), (7.7) при условиях (7.10)–(7.12) дает

$$
\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \Phi_0'(\alpha)\right\}z_4\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}.
$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ и удовлетворяет обыкновенному уравнению

$$
\Phi_0'(\alpha) = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),
$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 7.4. *Если выполнены условия предложения* 7.3, *а также*

$$
g_1(\beta_1) = g_2(\beta_1) = g(\beta_1), \tag{7.14}
$$

при этом справедливы равенства

$$
\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) = \Gamma_{13}^3(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{7.15}
$$

то система (7.5), (7.7) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$
\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}\,, \tag{7.16}
$$

где

$$
\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.
$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (7.16) в силу системы (7.5), (7.7) при рассматриваемых условиях с точностью до ненулевого множителя дает

$$
\begin{gathered}
z_2z_4\Psi_1(\beta_1)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \Phi_0'(\alpha)\right]\\
+ z_2z_3f_1(\alpha)\Phi_0(\alpha)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) + \Psi_1'(\beta_1)\right].
\end{gathered}
$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ и удовлетворяют обыкновенным уравнениям

$$\Phi_0'(\alpha) = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

$$\Psi_1'(\beta_1) = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)$$

соответственно, что и доказывает предложение. □

Аналогично предложениям 7.3 и 7.4 доказываются следующие два утверждения.

Предложение 7.5. *Если выполнены условия предложений* 7.3, 7.4, *при этом*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) = \Gamma_3(\beta_2), \tag{7.17}$$

то система (7.5), (7.7) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_4(z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const}\,, \tag{7.18}$$

где

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}.$$

Предложение 7.6. *Если выполнены условия предложений* 7.3, 7.4, 7.5, *то система* (7.5), (7.7) *имеет первый интеграл вида*

$$\Phi_5(z_2,z_1;\alpha,\beta) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\frac{C_4h(b)}{\sqrt{C_3^2\Phi_2^2(b)-C_4^2}}\;db = C_5 = \mathrm{const}\,, \tag{7.19}$$

где, после взятия интеграла (7.19), *вместо постоянных* C_3, C_4 *можно подставить левые части равенств* (7.16), (7.18) *соответственно.*

Набор первых интегралов (7.9), (7.13), (7.16), (7.18), (7.19) является полным набором независимых первых интегралов системы (7.5), (7.7) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

В принципе, первый интеграла (7.19) может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, функция (7.19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Однако с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [**9, 10**]).

7.2. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы. Модифицируем систему (7.5), (7.7) при условиях (7.10)–(7.12), (7.14), (7.15), (7.17), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (7.20). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4,z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ примет вид

$$\dot\alpha = -z_4,$$

$$\dot z_4 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}f_1^2(\alpha)z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22}f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)z_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)z_1^2,$$

$$\dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)z_2^2 - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)z_1^2,$$

$$\dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1(\alpha)z_2z_3$$

$$
\begin{aligned}
&- \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)z_1^2,\\
&\dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1(\alpha)z_1z_3\\
&- \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]f_2(\alpha)g_1(\beta_1)z_1z_2,\\
&\dot\beta_1 = z_3 f(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_2 f(\alpha)g(\beta_1), \quad \dot\beta_3 = z_1 f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$
\begin{aligned}
&\ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
&\ddot\beta_1 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
&\ddot\beta_2 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
&\ddot\beta_3 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Предложение 7.7. *Если выполнены условия предложения* 7.2, *то система* (7.20) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$
\Phi_1(z_4,\ldots,z_1;\alpha) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}\,,
\tag{7.21}
$$

где

$$
F_1(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da.
$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (7.21) в силу системы (7.5), (7.7) дает

$$
\begin{aligned}
&2z_4F(\alpha) + \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha)\right]z_3^2z_4\\
&+ \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\right]z_2^2z_4\\
&+ \left[\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\right]z_2^2z_3\\
&+ \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\right]z_1^2z_4\\
&+ \left[\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\right]z_1^2z_3\\
&+ \left[\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\right]z_1^2z_2 - 2z_4F(\alpha) \equiv 0,
\end{aligned}
$$

поскольку выполнены свойства (7.8). □

Аналогично предложениям 7.3–7.6 могут быть доказаны два следующих утверждения.

Предложение 7.8. *Если выполнены условия предложений* 7.3, 7.4, 7.5, *то система* (7.20) *имеет три гладких первых интеграла вида* (7.13), (7.16), (7.18).

Предложение 7.9. *Если выполнены условия предложения* 7.6, *то система* (7.20) *имеет первый интеграл вида* (7.19).

Набор первых интегралов (7.21), (7.13), (7.16), (7.18), (7.19) является полным набором независимых первых интегралов системы (7.20) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, функция (7.19) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной.

7.3. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы. Усложним систему (7.20) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении системы

$$
\begin{aligned}
&\dot\alpha = -z_4 + b\delta(\alpha),\\
&\dot z_4 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma^\alpha_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2,\\
&\dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2\\
&\quad - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2,\\
&\dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_2 z_3\\
&\quad - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2,\\
&\dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_3\\
&\quad - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2,\\
&\dot\beta_1 = z_3 f(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \quad \dot\beta_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2),
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$
\begin{aligned}
&\ddot\alpha - b\dot\alpha\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
&\ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
&\ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,\\
&\ddot\beta_3 - b\dot\beta_3\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Перейдем к интегрированию искомой системы восьмого порядка (7.22) при условиях (7.10), (7.11), (7.14), а также при выполнении равенств

$$
\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) = \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \tag{7.23}
$$

Введем также (по аналогии с (7.11)) ограничение на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (7.8):

$$
2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{7.24}
$$

Для полного интегрирования системы (7.22) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$
w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}
$$

система (7.22) распадается следующим образом:

$$
\begin{cases}
\dot{\alpha} = -w_4 + b\delta(\alpha), \\
\dot{w}_4 = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2, \\
\dot{w}_3 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4,
\end{cases} \tag{7.25}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{w}_2 = \pm w_3\sqrt{1+w_2^2} f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\
\dot{\beta}_2 = \pm \dfrac{w_2 w_3}{\sqrt{1+w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1),
\end{cases} \tag{7.26}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{w}_1 = \pm w_3\sqrt{1+w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\
\dot{\beta}_1 = \pm \dfrac{w_1 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha),
\end{cases} \tag{7.27}
$$

$$
\dot{\beta}_3 = \pm \frac{w_3}{\sqrt{1+w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \tag{7.28}
$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (7.25)–(7.28) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (7.25), по одному — для систем (7.26) и (7.27) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (7.28) (т.е. всего *пять*).

Теорема 7.1. *Пусть для некоторых $\varkappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства*

$$
\Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) = \varkappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \;\; F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{7.29}
$$

Тогда система (7.22) *при выполнении условий* (7.10), (7.11), (7.14), (7.23), (7.24) *обладает полным набором* (*пятью*) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Схема доказательства. Для начала сопоставим системе третьего порядка (7.25) неавтономную систему второго порядка

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2}{-w_4 + b\delta(\alpha)}, \\
\frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4}{-w_3 + b\delta(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{7.30}
$$

Вводя однородные переменные $w_4 = u_4\delta(\alpha)$, $w_3 = u_3\delta(\alpha)$, приводим систему (7.30) к виду

$$
\delta(\alpha)\frac{du_4}{d\alpha} + \delta'(\alpha) u_4 = \frac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha)\delta^2(\alpha) u_3^2}{-u_4\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)},
$$

$$
\delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha} + \delta'(\alpha) u_3 = \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\delta^2(\alpha) u_3 u_4}{-u_4\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)},
$$

что почти всюду эквивалентно

$$
\begin{aligned}
\delta(\alpha)\frac{du_4}{d\alpha} &= \frac{F_3(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha) u_3^2 + \delta'(\alpha) u_4^2 - b\delta'(\alpha) u_4}{-u_4 + b}, \\
\delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha} &= \frac{-\Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha)\delta(\alpha) u_3 u_4 + \delta'(\alpha) u_3 u_4 - b\delta'(\alpha) u}{-u_4 + b},
\end{aligned} \tag{7.31}
$$

где

$$
F_3(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}.
$$

Ввиду (7.29) система (7.31) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_4}{du_3} = \frac{\lambda + \varkappa u_3^2 + u_4^2 - bu_4}{(1-\varkappa)u_3 u_4 - bu_3}, \tag{7.32}$$

которое имеет вид уравнения Абеля [**11**]. В частности, при $\varkappa = -1$ уравнение (7.32) имеет первый интеграл

$$\frac{u_4^2 + u_3^2 - bu_4 + \lambda}{u_3} = C_1 = \text{const}\,, \tag{7.33}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1\Big(\frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\Big) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}\ . \tag{7.34}$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (7.25) при $\varkappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (7.33) при $u_3 \neq 0$ следующим образом:

$$\Big(u_4 - \frac{b}{2}\Big)^2 + \Big(u_3 - \frac{C_1}{2}\Big)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{7.35}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{7.36}$$

и фазовое пространство системы (7.21) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (7.35).

Таким образом, в силу соотношения (7.33) первое уравнение системы (7.31) при $\varkappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)}\frac{du_4}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_4 + u_4^2) - C_1 U_1(C_1, u_4)}{-u_4 + b},$$

где

$$U_1(C_1, u_4) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - bu_4 + \lambda)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (7.36). Тогда дополнительный первый интеграл для системы (7.25) имеет структурный вид

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2\Big(\delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\Big) = C_2 = \text{const} \tag{7.37}$$

и при $\varkappa = -1$ находится из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_4)du_4}{2(\lambda - bu_4 + u_4^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - bu_4 + \lambda)}\}/2},$$

где

$$u_4 = \frac{w_4}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (7.34). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (7.34), (7.37) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (7.26) и (7.27) имеют вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}\,,\ s = 1, 2, \tag{7.38}$$

(см. (7.16), (7.18) по поводу $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$). Дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (7.28), находится по аналогии с (7.19):

$$\Theta_5(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}}\, db = C_5 = \text{const}\,,$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_3, C_4 можно подставить соответствующие левые части равенства (7.38). □

7.4. Замечание о структуре первых интегралов систем с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (7.25) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. При $b = 0$ она превращается в консервативную систему, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (7.21), (7.13). В силу (7.29)

$$\Phi_1(z_4, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da \cong w_4^2 + w_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{7.39}$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. В силу (7.24) и (7.29)

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\; f(\alpha) \exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\} \cong w_3\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}\,, \tag{7.40}$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (7.39), (7.40) (или (7.21), (7.13)) также является первым интегралом системы (7.25) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 - bw_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{7.41}$$

и (7.40) по отдельности не является первым интегралом системы (7.25). Однако отношение функций (7.41), (7.40) является первым интегралом системы (7.25) (при $\varkappa = -1$) при любом b.

8. О поверхностях вращения

Остановимся (для простоты рассмотрим случай $n = 2$) на применении только что рассмотренной методики для двумерных поверхностей вращения.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) задана поверхность вращения уравнением $\rho = \rho(z)$. Уравнения геодезических линий на данной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} &\ddot\alpha + \Gamma_1(\alpha)\dot\alpha^2 + \Gamma_2(\alpha)\dot\beta^2 = 0,\\ &\ddot\beta + \Gamma_3(\alpha)\dot\alpha\dot\beta = 0, \end{aligned} \tag{8.1}$$

где

$$\Gamma_1(\alpha) = \frac{\rho'(\alpha)\rho''(\alpha)}{1 + \rho'^2(\alpha)}, \quad \Gamma_2(\alpha) = \frac{\rho(\alpha)\rho'(\alpha)}{1 + \rho'^2(\alpha)}, \quad (\alpha) = 2\frac{\rho'(\alpha)}{\rho'(\alpha)}, \tag{8.2}$$

$\alpha = z$, $\beta = \varphi$. Введем новые кинематические соотношения $\dot\alpha = f_1(\alpha)z_2$, $\dot\beta = f_2(\alpha)z_1$, в результате чего система (8.1), (8.2) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &\dot\alpha = f_1(\alpha)z_2,\\ &\dot z_2 = -z_1^2\{-\Gamma_1(\alpha)f_1(\alpha) - f_1'(\alpha)\} + z_1^2\Big\{\frac{-\Gamma_2(\alpha)f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Big\},\\ &\dot z_1 = z_2z_1\Big\{-\Gamma_3(\alpha)f_1(\alpha) - f_2'(\alpha)\frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Big\}, \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$\dot\beta = f_2(\alpha)z_1, \tag{8.4}$$

где уравнение (8.4) отделяется в системе четвертого порядка (8.3), (8.4).

Достаточными условиями существования первого интеграла $\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = \mathrm{const}$ для системы (8.3), (8.4) является выполнение двух групп условий:

$$\begin{aligned} &\Gamma_1(\alpha)f_1(\alpha) + f_1'(\alpha) = 0,\\ &\frac{\Gamma_2(\alpha)f_2^3(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} + \Gamma_3(\alpha)f_2(\alpha) + f_2'(\alpha) = 0. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Уравнения (8.5) имеют решения

$$f_1(\alpha) = \frac{A_1}{\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}}, \quad f_2(\alpha) = \frac{A_1}{\rho(\alpha)\sqrt{A_2A_1^2\rho^2(\alpha)-1}}, \quad A_2 > 0, \quad A_1, A_2 \in \mathbf{R}. \tag{8.6}$$

Выбрав $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ в качестве решений (8.6), перепишем систему (8.3), (8.4) в виде

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_2\dfrac{A_1}{\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}}, \\ \dot z_2 = -z_1^2\Gamma(\alpha), \\ \dot z_1 = z_2z_1\Gamma(\alpha), \end{cases} \tag{8.7}$$

$$\dot\beta = z_1\frac{A_1}{\rho(\alpha)\sqrt{A_2A_1^2\rho^2(\alpha)-1}}, \tag{8.8}$$

где

$$\Gamma(\alpha) = \frac{A_1\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}(A_2A_1^2\rho^2(\alpha)-1)}.$$

Введем в систему (8.7), (8.8) консервативное силовое поле $F(\alpha)$ и диссипацию $g(\alpha)$, $b > 0$. Получим систему

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_2f_1(\alpha) + bg(\alpha), \\ \dot z_2 = F(\alpha) - z_1^2\Gamma(\alpha), \\ \dot z_1 = z_2z_1\Gamma(\alpha), \end{cases} \tag{8.9}$$

$$\dot\beta = z_1f_2(\alpha). \tag{8.10}$$

Для интегрирования системы (8.9), (8.10) сопоставим системе третьего порядка (8.9) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dz_2}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - \Gamma(\alpha)z_1^2}{z_2f_1(\alpha) + bg(\alpha)}, \\ \frac{dz_1}{d\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha)z_1z_2}{z_2f_1(\alpha) + bg(\alpha)}. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Вводя однородные переменные

$$z_k = u_k\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}, \quad k = 1, 2,$$

приводим систему (8.11) к виду

$$\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha} + \Big[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Big]'u_2 = \frac{F(\alpha) - \Gamma(\alpha)\Big[\dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Big]^2u_1^2}{-u_2g(\alpha) + bg(\alpha)},$$

$$\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\frac{du_1}{d\alpha} + \Big[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Big]'u_1 = \frac{\Gamma(\alpha)\Big[\dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Big]^2u_1u_2}{-u_2g(\alpha) + bg(\alpha)},$$

что почти всюду эквивалентно

$$\begin{aligned} \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha} &= \frac{F_3(\alpha) - \Gamma(\alpha)\frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)}u_1^2 - \Big[\dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Big]'u_2^2 - b\Big[\dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Big]'u_2}{u_2 + b}, \\ \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha)\frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)}u_1u_2 - \Big[\dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Big]'u_1u_2 - b\Big[\dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Big]'u_1}{u_2 + b}, \end{aligned} \tag{8.12}$$

где

$$F_3(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{g(\alpha)}.$$

Теперь для интегрирования системы (8.12) потребуем выполнения следующих двух условий.

1. Для некоторого $\varkappa \in \mathbf{R}$ выполняется равенство

$$\Gamma(\alpha)\frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)} = \varkappa\Big[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Big]'. \tag{8.13}$$

2. Для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ выполняется равенство

$$F_3(\alpha) = \lambda\Big[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Big]'. \tag{8.14}$$

Действительно, после выполнения условий (8.13) и (8.14) система (8.12) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - \varkappa u_1^2 - u_2^2 - bu_2}{(\varkappa - 1)u_1u_2 - bu_1}, \tag{8.15}$$

которое имеет вид уравнения Абеля [**11**]. В частности, при $\varkappa = -1$ уравнение (8.15) имеет первый интеграл

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 - bu_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}\,,$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(z_2, z_1; \alpha) = \frac{-z_2^2 f_1^2(\alpha) - z_1^2 f_1^2(\alpha) - bz_2 g(\alpha) f_1(\alpha) + \lambda g^2(\alpha)}{z_1 g(\alpha) f_1(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\ .$$

Аналогичным образом находятся два других первых интеграла. В частности, свойство (8.13) переписывается в виде

$$g(\alpha) = \frac{A_1A_3}{\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}}\Big|\frac{\rho^2(\alpha)}{A_2A_1^2\rho^2(\alpha) - 1}\Big|^{-1/2\varkappa} = C_1 = \mathrm{const}\,,$$

где $A_1 \neq 0,\ A_2 > 0,\ A_1, A_2, A_3, \varkappa \in \mathbf{R}$.

Литература

1. М. В. Шамолин, “Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле”, *Докл. РАН* **460**, No. 2, 165–169 (2015).
2. М. В. Шамолин, “Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле”, *Докл. РАН* **461**, No. 5, 533–536 (2015).
3. М. В. Шамолин, “Интегрируемые системы с диссипацией с двумя и тремя степеням свободы”. *Пробл. мат. анал.* **94**, 91–109 (2018).
4. М. В. Шамолин, “Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования”, *Докл. РАН* **470**, No. 3, 288–292 (2016).
5. М. В. Шамолин, “Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам”, *Докл. РАН* **471**, No,. 5, 547–551 (2016).
6. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, ВИНИТИ, М. (1985).
7. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М. (1979).
8. В. В. Козлов, “Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике”, *Усп. мат. наук* **38**, No. 1, 3–67 (1983).
9. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Мир, М. (1972).
10. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Наука, М. (1987).
11. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М. (1971).

12. С. А. Чаплыгин, “О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости”, В: *ПСС* Т. 1. Изд-во АН СССР, Л. (1933).
13. М. В. Шамолин, “Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования”, *Докл. РАН* **464**, No. 6, 688–692 (2015).
14. М. В. Шамолин, “Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к сфере”, *Пробл. мат. анал.* **86**, 139–151 (2016).
15. М. В. Шамолин, “Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере”, *Докл. РАН* **474**, No. 2, 177–181 (2017).
16. М. В. Шамолин, “Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере”, *Пробл. мат. анал.* **90**, 107–113 (2018).

Статья поступила в редакцию 16 августа 2018 г.