ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Сентябрь 2018 **Выпуск 94. С. 91-**

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
Москва, Россия
shamolin@rambler.ru

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ

Показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к двумерным и трехмерным многообразиям (систем с двумя и тремя степенями свободы). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные. Библиография: 16 назв.

1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к двумерному многообразию

1.1. Общие обозначения. Рассмотрим гладкое двумерное риманово многообразие M^2 с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x=(x^1,x^2)$ на многообразии порождает аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим также касательное расслоение

$$T_*M^2\{z_2,z_1;x^1,x^2\},$$

где $z=(z_2,z_1)$ — координаты в касательном пространстве. Если $z_i=\dot x^i, i=1,2$, то уравнения геодезических линий на нем примут вид

$$\ddot x^i+\Gamma^i_{11}(x)(\dot x^1)^2+2\Gamma^i_{12}(x)(\dot x^1)(\dot x^2)+\Gamma^i_{22}(x)(\dot x^2)^2=0,\ i=1,2. \tag{1.1}$$

1.2. Специальные обозначения. Обозначим для наглядности в случае двумерного многообразия координаты (x^1,x^2) через (α,β). Тогда уравнения (1.1) на касательном расслоении $T_*M^2\{\dot\alpha,\dot\beta;\alpha,\beta\}$ примут вид

$$\begin{aligned}&\ddot\alpha+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta+\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2=0,\\&\ddot\beta+\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta+\Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2=0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Пример 1.1. В случае сферических координат (α,β), когда метрика на двумерной сфере индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего трехмерного пространства, уравнения (1.2) примут вид

$$\begin{aligned}&\ddot\alpha-\dot\beta^2\sin\alpha\cos\alpha=0,\\&\ddot\beta+2\dot\alpha\dot\beta\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=0,\end{aligned} \tag{1.3}$$

т.е. ненулевые коэффициенты связности равны

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha,\ \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Пример 1.2. В случае сферических координат (α,β), но когда метрика на двумерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии группы симметрий (см. также [**1, 2, 3**]), уравнения (1.2) примут вид

$$\begin{gathered} \ddot\alpha - \dot\beta^2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \\ \ddot\beta + \dot\alpha\dot\beta\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = 0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

т.е. ненулевые коэффициенты связности равны

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha}.$$

1.3. Замены координат касательного пространства. Исследуем структуру уравнений (1.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^2. Рассмотрим замену координат касательного пространства:

$$\begin{cases} \dot\alpha = R_1 z_1 + R_2 z_2, \\ \dot\beta = R_3 z_1 + R_4 z_2, \end{cases} \tag{1.5}$$

которую можно обратить:

$$\begin{cases} z_1 = T_1\dot\alpha + T_2\dot\beta, \\ z_2 = T_3\dot\alpha + T_4\dot\beta, \end{cases} \tag{1.6}$$

при этом R_k, T_k, $k = 1,\ldots,4$, — функции от α, β, а также $RT = E$, где

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}.$$

Назовем также уравнения (1.5) (или (1.6)) новыми кинематическими соотношениями, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^2. Справедливы тождества

$$\begin{gathered} \dot z_1 = T_{1\alpha}\dot\alpha^2 + T_{1\beta}\dot\alpha\dot\beta + T_{2\alpha}\dot\alpha\dot\beta + T_{2\beta}\dot\beta^2 + T_1\ddot\alpha + T_2\ddot\beta, \\ \dot z_2 = T_{3\alpha}\dot\alpha^2 + T_{3\beta}\dot\alpha\dot\beta + T_{4\alpha}\dot\alpha\dot\beta + T_{4\beta}\dot\beta^2 + T_3\ddot\alpha + T_4\ddot\beta, \end{gathered} \tag{1.7}$$

где

$$T_{k\alpha} = \frac{\partial T_k}{\partial\alpha},\ T_{k\beta} = \frac{\partial T_k}{\partial\beta},\ k = 1,\ldots,4.$$

Подставляя в (1.7) уравнения (1.2), имеем

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= \dot\alpha^2\{T_{1\alpha} - T_1\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} - T_2\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}\} + \dot\alpha\dot\beta\{T_{1\beta} \\ &\quad + T_{2\alpha} - 2T_1\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} - 2T_2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\} + \dot\beta^2\{T_{2\beta} - T_1\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} - T_2\Gamma^{\beta}_{\beta\beta}\}, \\ \dot z_2 &= \dot\alpha^2\{T_{3\alpha} - T_3\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} - T_4\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}\} \\ &\quad + \dot\alpha\dot\beta\{T_{3\beta} + T_{4\alpha} - 2T_3\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} - 2T_4\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\} + \dot\beta^2\{T_{4\beta} - T_3\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} - T_4\Gamma^{\beta}_{\beta\beta}\}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

при этом в последней системе вместо $\dot\alpha, \dot\beta$ надо подставить формулы (1.5), и правые части соотношений (1.8) будут квадратичными формами по z_1, z_2. Непосредственно из формул (1.8) следует следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Система* (1.2) *в той области, где* $\det R(\alpha,\beta) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (1.5), (1.8).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1.2) к эквивалентной системе уравнений (1.5), (1.8) зависит как от замены переменных (1.5) (или (1.6)) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности Γ^i_{jk}.

В частности, для примеров 1.1 и 1.2 получаем в явном виде следующие следствия.

Следствие 1.1. *В случае сферических координат* (α,β), *когда метрика на двумерной сфере индуцирована евклидовой метрикой трехмерного пространства (см. также пример* 1.1), *система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.3), *примет вид*

$$\dot\alpha=-z_2,\quad \dot z_2=-z_1^2\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha},\quad \dot z_1=z_1z_2\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha},\quad \dot\beta=z_1\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha},\tag{1.9}$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.9) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Следствие 1.2. *В случае сферических координат* (α,β), *но когда метрика на двумерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля (см.* [**4, 5, 6**], *а также пример* 1.2), *система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.4), *примет вид*

$$\dot\alpha=-z_2,\quad \dot z_2=-z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \dot z_1=z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \dot\beta=z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\tag{1.10}$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.10) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

1.4. Полный список первых интегралов для уравнений геодезических. Рассмотрим достаточно общий случай задания кинематических соотношений в виде

$$\begin{aligned}\dot\alpha&=-z_2,\\ \dot\beta&=z_1f(\alpha),\end{aligned}\tag{1.11}$$

где $f(\alpha)$ — достаточно гладкая функция. Тогда справедливо утверждение, которое доказывается прямым вычислением.

Предложение 1.2. *В случае* (1.11) *уравнения* (1.8) *примут вид*

$$\begin{aligned}\dot z_1&=-\frac{1}{f(\alpha)}\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)z_2^2+\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2-f(\alpha)\Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta)z_1^2,\\ \dot z_2&=\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)z_2^2-2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)f(\alpha)z_1z_2+f^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)z_1^2.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Таким образом, уравнения геодезических (1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений почти всюду эквивалентны составной системе (1.11), (1.12) на многообразии $T_*M^2\{z_2,z_1;\alpha,\beta\}$.

Для полного интегрирования системы (1.11), (1.12) четвертого порядка необходимо знать, вообще говоря, три независимых первых интеграла.

Имеем следующее очевидное утверждение.

Следствие 1.3. *Если выполнены следующие свойства*

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\equiv0,\tag{1.13}$$

то система, эквивалентная уравнениям геодезических (1.2), *может быть приведена к виду*

$$\begin{aligned}\dot\alpha&=-z_2,\\ \dot z_2&=\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_1^2,\\ \dot z_1&=\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2,\\ \dot\beta&=z_1f(\alpha).\end{aligned}\tag{1.14}$$

Предложение 1.3. *Если всюду справедливо равенство*

$$\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)+2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\equiv0,\tag{1.15}$$

то система (1.14) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_2,z_1)=z_1^2+z_2^2=C_1^2=\mathrm{const}\,.\tag{1.16}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.16) в силу системы (1.14) дает

$$2\Big[\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)+2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]z_1^2z_2\equiv 0,$$

поскольку выполнено свойство (1.15). □

Предложение 1.4. *Если функция* $\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ *является функцией лишь* α,

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{1.17}$$

то система (1.14) *имеет первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_1;\alpha)=z_1\Phi_0(\alpha)=C_2=\mathrm{const}, \tag{1.18}$$

$$\Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(b)db\right\}.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.18) в силу системы (1.14) дает

$$\Big\{\Big[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]\Phi_0(\alpha)-\Phi_0'(\alpha)\Big\}z_1z_2.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ и удовлетворяет обыкновенному уравнению

$$\Phi_0'(\alpha)=\Big[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение.

Замечание 1.1. Если выполнено свойство (1.17) и функция $\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также является функцией лишь α:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha), \tag{1.19}$$

то в системе (1.14) выделяется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на $\dot\beta$ отделяется) :

$$\begin{aligned}&\dot\alpha=-z_2,\\&\dot z_2=\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)z_1^2,\\&\dot z_1=\Big[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]z_1z_2,\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\dot\beta=z_1f(\alpha). \tag{1.21}$$

В частности, если выполнены свойства (1.15), (1.17), то такая независимая подсистема (1.20) выделяется.

Предложение 1.5. *Если выполнены условия* (1.15), (1.17), *то система* (1.20), (1.21) *имеет первый интеграл вида*

$$\Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta)=\beta\pm\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2f(b)}{\sqrt{C_1^2\Phi_0^2(b)-C_2^2}}\,db=C_3=\mathrm{const}, \tag{1.22}$$

где, после взятия интеграла (1.22), *вместо постоянных* C_1,C_2 *можно подставить левые части равенств* (1.16), (1.18) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия (1.15), (1.17), то выполнены условия предложений 1.3 и 1.4, а значит система (1.20), (1.21) обладает двумя первыми интегралами (1.16) и (1.18).

Далее, рассмотрим два уровня C_1 и C_2 первых интегралов (1.16) и (1.18) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \pm \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 \Phi_0^2(\alpha) - C_2^2}}. \tag{1.23}$$

Но угол β будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (1.20), (1.21):

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{z_1}{z_2} f(\alpha).$$

Используя в этом уравнении равенство (1.23), получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.3, 1.4 и 1.5 является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия* (1.15), (1.17), *то система* (1.20), (1.21) *обладает полным набором* (*тремя*) *независимых первых интегралов вида* (1.16), (1.18), (1.22).

2. Уравнения движения на касательном расслоении к двумерному многообразию в потенциальном силовом поле

2.1. Приведенная система. Теперь несколько модифицируем систему (1.14). При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (2.1) (в отличие от системы (1.14)). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha = -z_2,\\
&\dot z_2 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_1^2,\\
&\dot z_1 = \Big[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big] z_1 z_2,\\
&\dot\beta = z_1 f(\alpha).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Замечание 2.1. Система (2.1) почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{aligned}
&\ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0,\\
&\ddot\beta + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2. Полный список первых интегралов для системы в потенциальном силовом поле.

Предложение 2.1. *Если всюду справедливо равенство* (1.15), *то система* (2.1) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad F_1(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)\,db. \tag{2.3}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (2.3) в силу системы (2.1) дает

$$2z_2F(\alpha) + 2\Big[\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big] z_1^2 z_2 - 2z_2F(\alpha) \equiv 0,$$

поскольку выполнено свойство (1.15). □

Предложение 2.2. *Если функция* $\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ *является функцией лишь* α (*условие* (1.17)), *то система* (2.1) *имеет первый интеграл вида*

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1 \Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \qquad (2.4)\\
&\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\Big\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(b)\,db\Big\}.
\end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.4.

Очевидно следующее утверждение.

Замечание 2.2. Если выполнено свойство (1.17) и функция $\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также является функцией лишь α (условие (1.19)), то в системе (2.1) выделяется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на $\dot\beta$ отделяется)

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha = -z_2,\\
&\dot z_2 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) z_1^2,\\
&\dot z_1 = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\dot\beta = z_1 f(\alpha). \tag{2.6}$$

В частности, если выполнены свойства (1.15), (1.17), то такая независимая подсистема (2.5) выделяется.

Предложение 2.3. *Если выполнены условия* (1.15), (1.17), *то система* (2.5), (2.6) *имеет первый интеграл вида*

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \beta \pm \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f(b)}{\sqrt{\Phi_0^2(b)(C_1 - F_1(b)) - C_2^2}}\, da = C_3 = \mathrm{const}, \tag{2.7}$$

где, после взятия интеграла (2.7), *вместо постоянных* C_1, C_2 *можно подставить левые части равенств* (2.3), (2.4) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия (1.15), (1.17), то выполнены условия предложений 2.1 и 2.2, а значит система (2.5), (2.6) обладает двумя первыми интегралами (2.3) и (2.4). Далее, рассмотрим два уровня C_1 и C_2 первых интегралов (2.3) и (2.4) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \pm \frac{C_2}{\sqrt{\Phi_0^2(\alpha)(C_1 - F_1(\alpha)) - C_2^2}}. \tag{2.8}$$

Но угол β будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (1.20), (1.21):

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{z_1}{z_2} f(\alpha).$$

Используя в этом уравнении равенство (2.8), получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 2.1, 2.2 и 2.3 является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* (1.15), (1.17), *то система* (2.5), (2.6) *обладает полным набором* (*тремя*) *независимых первых интегралов вида* (2.3), (2.4), (2.7).

3. Уравнения движения на касательном расслоении к двумерному многообразию в силовом поле с диссипацией

3.1. Приведенная система. Теперь несколько модифицируем систему (2.1). При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $bg(\alpha), b > 0$, в первом уравнении системы (3.1) (в отличие от системы (2.1)). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha = -z_2 + bg(\alpha),\\
&\dot z_2 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_1^2,\\
&\dot z_1 = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2,\\
&\dot\beta = z_1 f(\alpha).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Система (3.1) почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{aligned}&\ddot{\alpha}-bg'(\alpha)\dot{\alpha}+F(\alpha)+\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2=0,\\&\ddot{\beta}-bg(\alpha)\Big[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]\dot{\beta}+2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}=0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

3.2. Полный список первых интегралов для системы с диссипацией. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы четвертого порядка (3.1) при выполнении свойств (1.15), (1.17). Тогда система (3.1) допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка:

$$\begin{aligned}&\dot{\alpha}=-z_2+bg(\alpha),\\&\dot{z}_2=F(\alpha)+\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)z_1^2,\\&\dot{z}_1=\Big[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]z_1z_2,\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\dot{\beta}=z_1f(\alpha).\tag{3.4}$$

Для начала сопоставим системе третьего порядка (3.3) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}&\frac{dz_2}{d\alpha}=\frac{F(\alpha)+\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)z_1^2}{-z_2+bg(\alpha)},\\&\frac{dz_1}{d\alpha}=\frac{\Big[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]z_1z_2}{-z_2+bg(\alpha)}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_k=u_kg(\alpha),\ \ k=1,2,\tag{3.6}$$

приводим систему (3.5) к виду

$$\begin{aligned}&g(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha}+g'(\alpha)u_2=\frac{F(\alpha)+\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)g^2(\alpha)u_1^2}{-u_2g(\alpha)+bg(\alpha)},\\&g(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha}+g'(\alpha)u_1=\frac{\Big[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]g^2(\alpha)u_1u_2}{-u_2g(\alpha)+bg(\alpha)},\end{aligned}\tag{3.7}$$

что, учитывая (1.15), почти всюду эквивалентно

$$\begin{aligned}&g(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha}=\frac{F_3(\alpha)+\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)g(\alpha)u_1^2+g'(\alpha)u_2^2-bg'(\alpha)u_2}{-u_2+b},\\&g(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha}=\frac{-\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)g(\alpha)u_1u_2+g'(\alpha)u_1u_2-bg'(\alpha)u_1}{-u_2+b},\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$F_3(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{g(\alpha)}.$$

Для интегрирования системы (3.8) потребуем выполнения следующих двух условий.

1) Для некоторого $\varkappa\in\mathbf{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)=\varkappa\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}.\tag{3.9}$$

2) Для некоторого $\lambda\in\mathbf{R}$ должно выполняться равенство

$$F_3(\alpha)=\lambda g'(\alpha).\tag{3.10}$$

Условия (3.9) и (3.10) можно переписать соответственно как

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha) = \varkappa\frac{d}{d\alpha}\ln|g(\alpha)|, \tag{3.11}$$

$$F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{g^2(\alpha)}{2}. \tag{3.12}$$

Действительно, после выполнения условий (3.9) и (3.10) (или (3.11) и (3.12)) система (3.8) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda + \varkappa u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{(1-\varkappa)u_1u_2 - bu_1}. \tag{3.13}$$

Уравнение (3.13) имеет вид уравнения Абеля [**7, 8**]. В частности, при $\varkappa = -1$ оно имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{3.14}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(z_2, z_1; \alpha) = \frac{z_2^2 + z_1^2 - bz_2g(\alpha) + \lambda g^2(\alpha)}{z_1g(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{3.15}$$

Замечание 3.2. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.3) (как часть системы (3.3), (3.4)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [**9, 10**]. При этом она превращается в систему консервативную при $b = 0$:

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= -z_2, \\ \dot z_2 &= F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)z_1^2, \\ \dot z_1 &= \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Система (3.16) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (2.3), (2.4). Преобразуем их. В силу (3.10) (или (3.12))

$$\Phi_1(z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da = z_1^2 + z_2^2 + \lambda\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{db}g^2(b)db \cong z_1^2 + z_2^2 + \lambda g^2(\alpha), \tag{3.17}$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью до аддитивной постоянной.

Далее, в силу (1.15)

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)db\right\} = z_1f(\alpha)\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(b)f^2(b) + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right]db\right\}$$

$$\cong z_1\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(b)f^2(b)db\right\},$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Теперь в силу (3.9) (или (3.11)) последняя величина при $\varkappa = -1$ перепишется в виде

$$z_1\exp\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{db}\ln|g(b)|db\right\} \cong z_1g(\alpha) \tag{3.18}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.17), (3.18) (или (2.3), (2.4)) также является первым интегралом системы (3.16). Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$z_2^2 + z_1^2 - bz_2g(\alpha) + \lambda g^2(\alpha) \tag{3.19}$$

и (3.18) по отдельности не является первым интегралом системы (3.3). Однако отношение функций (3.19), (3.18) является первым интегралом системы (3.3) (при $\varkappa = -1$) при любом b.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.3) при $\varkappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.14) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{3.20}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{3.21}$$

и фазовое пространство системы (3.3) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.20). Таким образом, в силу соотношения (3.14) первое уравнение системы (3.8) при условиях (3.9) и (3.10) и при $\varkappa = -1$ примет вид

$$\frac{g(\alpha)}{g'(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \tag{3.22}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + \lambda)}\}, \tag{3.23}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.21). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.3) примет вид

$$\int \frac{dg(\alpha)}{g(\alpha)} = \int \frac{(b - u_2)du_2}{2(\lambda - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + \lambda)}\}/2}. \tag{3.24}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |g(\alpha)|. \tag{3.25}$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4\lambda, \tag{3.26}$$

то правая часть равенства (3.24) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \mp \frac{b}{2} I_1, \tag{3.27}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{3.28}$$

При вычислении интеграла (3.28) возможны три случая.

Случай 1: $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right|$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right| + \mathrm{const}\,. \tag{3.29}$$

Случай 2: $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}\,. \tag{3.30}$$

Случай 3: $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}\,. \tag{3.31}$$

Возвращаясь к переменной
$$r_1 = \frac{z_2}{g(\alpha)} - \frac{b}{2}, \tag{3.32}$$
имеем окончательный вид для величины I_1:

Случай 1: $b > 2$.
$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right|$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| + \mathrm{const}\,. \tag{3.33}$$

Случай 2: $b < 2$.
$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}\,. \tag{3.34}$$

Случай 3: $b = 2$.
$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}\,. \tag{3.35}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.3) при $\varkappa = -1$ — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 3.3. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.14).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:
$$\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = G\Big(g(\alpha), \frac{z_2}{g(\alpha)}, \frac{z_1}{g(\alpha)}\Big) = C_2 = \mathrm{const} \tag{3.36}$$
или, другими словами,
$$\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = g(\alpha) \exp\left\{\int_{\alpha_0}^{\alpha} A(u_2; C_1)\, du_2\right\} = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.37}$$
где
$$A(u_2; C_1) = \frac{u_2 - b}{2(\lambda - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + \lambda)}\}/2}.$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (3.3), (3.4) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.3). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, "привязывающий" уравнение (3.4).

Поскольку
$$g(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} = \frac{u_1((1-\varkappa)u_2 - b)g'(\alpha)}{b - u_2},\ \ g(\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{u_1 g(\alpha) f(\alpha)}{b - u_2}, \tag{3.38}$$
имеем
$$\frac{du_1}{d\beta} = [(1-\varkappa)u_2 - b]\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)f(\alpha)}. \tag{3.39}$$
Из последнего равенства можно найти дополнительный первый интеграл рассматриваемой системы (см. ниже аналогичные исследования для систем с тремя степенями свободы).

Теорема 3.1. *Пусть для некоторых* $\varkappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются свойства* (3.9) *и* (3.10) (*или* (3.11) *и* (3.12)). *Тогда система* (3.1) *при условиях* (1.15), (1.17) *обладает тремя независимыми, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.*

Для доказательства теоремы отметим, что вывод двух искомых первых интегралов (3.15) и (3.36) (или (3.37)) приведен выше. А вывод первого интеграла, "привязывающего" уравнение на β, аналогичен выводу подобного интеграла для систем с тремя степенями свободы.

4. Предварительные сведения для систем с тремя степенями свободы

В задачах динамики систем с тремя степенями свободы пространствами положений являются трехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение четырехмерного твердого тела-маятника (обобщенного сферического маятника) в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [**11, 12**]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [**8, 13, 14**].

Известен также класс задач о движении точки по трехмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства. В ряде случаев в системах с переменной диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [**15**].

В дальнейшем показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией [**9**] и обобщают ранее рассмотренные.

5. Уравнения геодезических на касательном расслоении к трехмерному многообразию

Как известно, в случае трехмерного риманова многообразия M^3 с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^3\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{3} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.1}$$

Изучим структуру уравнений (5.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^3. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{3} R^{ij}(x)z_j, \tag{5.2}$$

которую можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^{3} T_{ji}(x)\dot{x}^i,$$

при этом $R^{ij}, T_{ji}, i, j = 1, 2, 3,$ — функции от x^1, x^2, x^3, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (5.2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^3. Справедливы тождества

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{3} \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{3} T_{ji}\ddot{x}^i, \ \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{3} T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{5.3}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, 2, 3.$$

Подставляя в (5.3) уравнения (5.1), имеем:

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{3} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{3} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q, \tag{5.4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, 2, 3$, надо подставить формулы (5.2).

Другими словами, равенство (5.4) можно переписать в виде

$$\dot z_i + \sum_{j,k=1}^{3} Q_{ijk}\dot x^j \dot x^k|_{(5.2)} = 0, \tag{5.5}$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{3} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{5.6}$$

Непосредственно из формул (5.2), (5.4) получаем следующее утверждение.

Предложение 5.1. *Система* (5.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (5.2), (5.4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (5.1) к эквивалентной системе уравнений (5.2), (5.4) зависит как от замены переменных (5.2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

6. Достаточно общий случай

Рассмотрим достаточно общий случай задания кинематических соотношений

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= -z_3,\\ \dot\beta_1 &= z_2 f_1(\alpha),\\ \dot\beta_2 &= z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2, z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [**2, 4**] (в частности, на поверхностях вращения):

$$\begin{aligned} &\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,\\ &\ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,\\ &\ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0, \end{aligned} \tag{6.2}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (6.1) уравнения (5.4) примут вид

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_2,\\ \dot z_2 &= \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) z_1^2,\\ \dot z_3 &= \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) z_2^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \end{aligned} \tag{6.3}$$

и уравнения (6.2) почти всюду эквивалентны составной системе (6.1), (6.3) на многообразии $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Для полного интегрирования системы (6.1), (6.3) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов.

Предложение 6.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$\begin{aligned} &2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0,\\ &2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0,\\ &\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0, \end{aligned} \tag{6.4}$$

то система (6.1), (6.3) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \text{const}\,. \tag{6.5}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (6.5) в силу системы (6.1), (6.3) дает

$$\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha)\Big] z_2^2 z_3 + \Big[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}$$

$$+ \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1)\Big] z_1^2 z_3 + \Big[\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1)\Big] z_1^2 z_2 \equiv 0,$$

поскольку выполнены свойства (6.4). □

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы (6.4) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (6.5) для системы (6.1), (6.3) уравнений геодезических (6.2). Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для систем при отсутствии силового поля, или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (6.4) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (6.1) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha), \tag{6.6}$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из (6.4):

$$2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) \equiv 0. \tag{6.7}$$

Таким образом, функцию $g(\beta_1)$ будем брать в зависимости от коэффициентов связности, а вот ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 6.2. *Если выполнены свойства* (6.6), (6.7), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{6.8}$$

то система (6.1), (6.3) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\; \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{6.9}$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\}. \tag{6.10}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (6.9) в силу системы (6.1), (6.3) при условиях (6.6)–(6.8) дает

$$\Big\{\Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]\Phi_0(\alpha) - \Phi_0'(\alpha)\Big\} z_3 \sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному уравнению

$$\Phi_0'(\alpha) = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 6.3. *Если выполнено свойство* (6.6), *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{6.11}$$

а также второе равенство из (6.8) ($\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha)$), *то система* (6.1), (6.3) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_3(z_1; \alpha, \beta_1) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Phi(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \tag{6.12}$$

$$\Phi(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (6.12) в силу системы (6.1), (6.3) при рассматриваемых условиях дает

$$z_1 z_3 \Phi(\beta_1) \Big[\Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \Big] \Phi_0(\alpha) - \Phi_0'(\alpha) \Big]$$
$$+ z_1 z_2 f_1(\alpha) \Phi_0(\alpha) \Big[- \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \Big] \Phi(\beta_1) + \Phi'(\beta_1) \Big].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Phi(\beta_1)$ и удовлетворяют обыкновенным уравнениям

$$\Phi_0'(\alpha) = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \Big] \Phi_0(\alpha), \;\; \Phi'(\beta_1) = \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \Big] \Phi(\beta_1)$$

соответственно, что и доказывает предложение. □

Аналогично предложению 1.5 доказывается следующее утверждение.

Предложение 6.4. *Если выполнены условия* (6.6), (6.7), (6.8), (6.11), *то система* (6.1), (6.3) *имеет первый интеграл вида*

$$\Phi_4(z_2, z_1; \beta) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Phi^2(b) - C_3^2}} \, db = C_4 = \mathrm{const}, \tag{6.13}$$

где, после взятия интеграла (6.13), *вместо постоянных* C_2, C_3 *можно подставить левые части равенств* (6.9), (6.12) *соответственно.*

При вышеперечисленных условиях система (6.1), (6.3) обладает полным набором (четырьмя) независимых первых интегралов вида (6.5), (6.9), (6.12), (6.13).

7. Уравнения движения на касательном расслоении к трехмерному многообразию в потенциальном силовом поле

Теперь несколько модифицируем систему (6.1), (6.3) при условиях (6.6), (6.7), (6.8), (6.11), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (7.1). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_* M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha = -z_3, \\
&\dot z_3 = F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) f^2(\alpha) z_2^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \\
&\dot z_2 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \Big] z_2 z_3 - \Gamma_{22}^1(\beta_1) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \\
&\dot z_1 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \Big] z_1 z_3 - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \Big] f(\alpha) z_1 z_2, \\
&\dot\beta_1 = z_2 f(\alpha), \\
&\dot\beta_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1),
\end{aligned} \tag{7.1}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned}
&\ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot\beta_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot\beta_2^2 = 0, \\
&\ddot\beta_1 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot\alpha \dot\beta_1 + \Gamma_{22}^1(\beta_1) \dot\beta_2^2 = 0, \\
&\ddot\beta_2 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot\alpha \dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot\beta_1 \dot\beta_2 = 0.
\end{aligned}$$

Предложение 7.1. *Если выполнены условия предложения* 6.1, *то система* (7.1) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad F_1(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da. \tag{7.2}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (7.2) в силу системы (7.1) дает

$$2z_3F(\alpha) + \Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha)\Big]z_2^2z_3$$
$$+ \Big[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Big]z_1^2z_3$$
$$+ \Big[\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Big]z_1^2z_2 - 2z_3F(\alpha) \equiv 0,$$

поскольку выполнены свойства (6.4). □

Аналогично предложениям 6.2, 6.3 и 6.4 могут быть доказаны два следующих утверждения.

Предложение 7.2. *Если выполнены условия предложений* 6.2, 6.3, *то система* (7.1) *имеет два гладких первых интеграла вида* (6.9), (6.12).

Предложение 7.3. *Если выполнены условия предложения* 6.4, *то система* (7.1) *имеет первый интеграл вида*

$$\Phi_4(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{\Phi^2(b)(C_2 - F_1(b)) - C_3^2}}\, db = C_4 = \mathrm{const}\,. \tag{7.3}$$

При вышеперечисленных условиях система (7.1) обладает полным набором (четырьмя) независимых первых интегралов вида (7.2), (6.9), (6.12), (7.3).

8. Уравнения движения на касательном расслоении к трехмерному многообразию в силовом поле с диссипацией

Теперь усложним систему (7.1) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении системы

$$\begin{aligned}
\dot\alpha &= -z_3 + b\delta(\alpha),\\
\dot z_3 &= F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_2^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2,\\
\dot z_2 &= \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]z_2z_3 - \Gamma^1_{22}(\beta_1)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2,\\
\dot z_1 &= \Big[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\Big]z_1z_3 - \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\Big(\alpha)z_1z_2,\\
\dot\beta_1 &= z_2f(\alpha),\\
\dot\beta_2 &= z_1f(\alpha)g(\beta_1),
\end{aligned} \tag{8.1}$$

которая почти всюду эквивалентна

$$\ddot\alpha - b\dot\alpha\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,$$
$$\ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\beta_1)\dot\beta_2^2 = 0,$$
$$\ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0,$$

здесь $W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + d\ln|f(\alpha)|/d\alpha$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (8.1) при условии (6.7), а также при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)=\Gamma_3(\alpha). \tag{8.2}$$

Введем также (по аналогии с (6.7)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (6.4):

$$2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}+\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\equiv 0. \tag{8.3}$$

Для полного ее интегрирования необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1,z_2\to z,z_*,\quad z=\sqrt{z_1^2+z_2^2},\quad z_*=\frac{z_2}{z_1},$$

система (8.1) распадается следующим образом:

$$\begin{cases}\dot\alpha=-z_3+b\delta(\alpha),\\ \dot z_3=F(\alpha)+\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)z^2,\\ \dot z=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]zz_3,\end{cases} \tag{8.4}$$

$$\begin{cases}\dot z_*=\pm z\sqrt{1+z_*^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right],\\ \dot\beta_1=\pm\dfrac{zz_*}{\sqrt{1+z_*^2}}f(\alpha),\end{cases} \tag{8.5}$$

$$\dot\beta_2=\pm\frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}}f(\alpha)g(\beta_1). \tag{8.6}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (8.4)–(8.6) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (8.4), один — системы (8.5), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (8.6) (т.е. всего четыре).

Теорема 8.1. *Пусть для некоторых $\varkappa,\lambda\in\mathbf{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)=\varkappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|,\ \ F(\alpha)=\lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{8.7}$$

Тогда система (8.1) *при выполнении равенств* (6.7), (8.2), (8.3) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Схема доказательства. Для начала сопоставим системе третьего порядка (8.4) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dz_3}{d\alpha}&=\frac{F(\alpha)+\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)z^2}{-z_3+bg(\alpha)},\\ \frac{dz}{d\alpha}&=\frac{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]zz_3}{-z_3+bg(\alpha)}.\end{aligned} \tag{8.8}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_3=u_3\delta(\alpha),\ \ z=u\delta(\alpha), \tag{8.9}$$

приводим систему (8.8) к виду

$$\begin{aligned}\delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha}+\delta'(\alpha)u_3&=\frac{F(\alpha)+\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u^2}{-u_3\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)},\\ \delta(\alpha)\frac{du}{d\alpha}+\delta'(\alpha)u&=\frac{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\delta^2(\alpha)uu_3}{-u_3\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)},\end{aligned} \tag{8.10}$$

что, учитывая (8.3), почти всюду эквивалентно

$$\begin{aligned}\delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha} &= \frac{F_3(\alpha)+\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u^2+\delta'(\alpha)u_3^2-b\delta'(\alpha)u_3}{-u_3+b},\\ \delta(\alpha)\frac{du}{d\alpha} &= \frac{-\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)uu_3+\delta'(\alpha)uu_3-b\delta'(\alpha)u}{-u_3+b},\end{aligned}\tag{8.11}$$

где

$$F_3(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}.$$

А после выполнения условий (8.7) система (8.11) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_3}{du}=\frac{\lambda+\varkappa u^2+u_3^2-bu_3}{(1-\varkappa)uu_3-bu}.\tag{8.12}$$

Уравнение (8.12) имеет вид уравнения Абеля [**7**]. В частности, при $\varkappa=-1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_3^2+u^2-bu_3+\lambda}{u}=C_1=\mathrm{const},\tag{8.13}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(z_3,z;\alpha)=G_1\left(\frac{z_3}{\delta(\alpha)},\frac{z}{\delta(\alpha)}\right)=\frac{z_3^2+z^2-bz_3\delta(\alpha)+\lambda\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)}=C_1=\mathrm{const}\,.\tag{8.14}$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (8.4) при $\varkappa=-1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (8.13) при $u\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_3-\frac{b}{2}\right)^2+\left(u-\frac{C_1}{2}\right)^2=\frac{b^2+C_1^2}{4}-\lambda.\tag{8.15}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2+C_1^2-4\lambda\geqslant 0,\tag{8.16}$$

и фазовое пространство системы (8.4) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (8.15).

Таким образом, в силу соотношения (8.13) первое уравнение системы (8.11) при условиях (8.3) и при $\varkappa=-1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)}\frac{du_3}{d\alpha}=\frac{2(\lambda-bu_3+u_3^2)-C_1U_1(C_1,u_3)}{-u_3+b},\tag{8.17}$$

где

$$U_1(C_1,u_3)=\frac{1}{2}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_3^2-bu_3+\lambda)}\},\tag{8.18}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (8.16).

Тогда дополнительный первый интеграл для системы (8.4) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_3,z;\alpha)=G_2\left(\delta(\alpha),\frac{z_3}{\delta(\alpha)},\frac{z}{\delta(\alpha)}\right)=C_2=\mathrm{const}\tag{8.19}$$

и при $\varkappa=-1$ он найдется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)|=\int\frac{(b-u_3)du_3}{2(\lambda-bu_3+u_3^2)-C_1\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_3^2-bu_3+\lambda)}\}/2},$$

где

$$u_3=\frac{z_3}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 необходимо подставить левую часть равенства (8.14). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (8.14), (8.19) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первый интеграл для системы (8.5) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*;\beta_1) = \frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \mathrm{const}, \tag{8.20}$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (6.12). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (8.6), находится по аналогии с (6.13):

$$\Theta_4(z_*;\beta) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3^2\Phi^2(b)-1}}\,db = C_4 = \mathrm{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо C_3 необходимо подставить левую часть равенства (8.20). □

9. Строение первых интегралов для систем с диссипацией

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (8.4) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [**9**]. При этом при $b=0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (7.2), (6.9). В силу (8.7)

$$\Phi_1(z_3,z_2,z_1;\alpha) = z_1^2+z_2^2+z_3^2+2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da \cong z^2+z_3^2+\lambda\delta^2(\alpha), \tag{9.1}$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (8.3) и (8.7)

$$\Phi_2(z_2,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\; f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} \cong z\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{9.2}$$

где “$\cong$” означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной. Очевидно, что отношение двух первых интегралов (9.1), (9.2) (или (7.2), (6.9)) также является первым интегралом системы (8.4) при $b=0$. Но при $b\neq 0$ каждая из функций

$$z^2+z_3^2-bz_3\delta(\alpha)+\lambda\delta^2(\alpha) \tag{9.3}$$

и (9.2) по отдельности не является первым интегралом системы (8.4). Однако отношение функций (9.3), (9.2) является первым интегралом системы (8.4) (при $\varkappa=-1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [**3, 6**].

10. Заключение

По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{10.1}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{10.2}$$

Случай (10.1) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. Случай (10.2) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на трехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [**9**]. В частности, при $\delta(\alpha)\equiv F(\alpha)\equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на трехмерной сфере. В случае (10.1), если

$$\delta(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos\alpha},$$

то система описывает пространственное движение четырехмерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [**16, 9, 15**]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает также обобщенный четырехмерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [**7, 8**].

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

Литература

1. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, ВИНИТИ, М. (1985).
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Мир, М. (1972).
3. М. В. Шамолин, “Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде”, *Докл. РАН* **375**, No. 3, 343–346 (2000).
4. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М. (1979).
5. В. В. Козлов, “Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике”, *Усп. мат. наук* **38**, No. 1, 3–67 (1983).
6. М. В. Шамолин, “Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования”, *Докл. РАН* **444**, No. 5, 506–509 (2012).
7. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М. (1971).
8. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, Наука, М. (1987).
9. М. В. Шамолин, “Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования”, *Докл. РАН* **442**, No. 4, 479–481 (2012).
10. М. В. Шамолин, “Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил”, *Итоги науки и техники. Сер. “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”* **125**, 5–254 (2013).
11. М. В. Шамолин, “Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле”, *Докл. РАН* **453**, No. 1, 46–49 (2013).
12. М. В. Шамолин, “Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения”, *Фундам. прикл. мат.* **20**, No. 4, 3–231 (2015).
13. М. В. Шамолин, “Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования”, *Докл. РАН* **464**, No. 6, 688–692 (2015).
14. М. В. Шамолин, “Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к сфере”, *Пробл. мат. анал.* **86**, 139–151 (2016).
15. М. В. Шамолин, “Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере”, *Пробл. мат. анал.* **90**, 107–113 (2018).
16. С. А. Чаплыгин, “О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости”, В: *ПСС* Т. 1. Изд-во АН СССР, Л. (1933).

Статья поступила в редакцию 14 мая 2018 г.