М. В. Шамолин, Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2018, том 150, 119–129

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 150 (2018). С. 119–129

УДК 517.933

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2018 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе показана интегрируемость классов динамических систем на касательных расслоениях к четырехмерным многообразиям (систем с четырьмя степенями свободы). При этом силовые поля обладают переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные. Работа продолжает аналогичные исследования, проведенные ранее, для систем на касательных расслоениях многообразий размерности 2 и 3.

Ключевые слова: многомерная динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

AMS Subject Classification: 70G60

Во многих задачах динамики возникают системы с пространством положений, являющимся четырехмерным гладким многообразием. Их фазовыми пространствами естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Например, изучение пятимерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий (см. [11,14,15]). В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают диссипацией переменного знака, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по гладкой четырехмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пространства. В ряде случаев в системах с силовым полем с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Необходимо отметить, что полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (ср. с [1–3, 6]).

В предлагаемой работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к гладкому четырехмерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2 и 3 см. [12,13,19]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы. Как известно, в случае четырехмерного гладкого риманова многообразия M^4 с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^4\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2, \dot\beta_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{4} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00848-а).

где $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $\beta_3 = x^4$, $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$.

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^4. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{4} R^{ij}(x) z_j, \tag{2}$$

которую почти всюду можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^{4} T_{ji}(x)\dot{x}^i;$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i, j = 1, \ldots, 4$, — функции от x^1, x^2, x^3, x^4, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^4.

Справедливы следующие тождества:

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{4} \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{4} T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{4} T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{3}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad i, j, k = 1, \ldots, 4.$$

Подставляя в (3) уравнения (1), имеем

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{4} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{4} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q; \tag{4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, \ldots, 4$, надо подставить формулы (2).

Другими словами, равенство (4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{4} Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k\big|_{(2)} = 0, \tag{5}$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{4} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{6}$$

Предложение 1. *Система* (1) *в области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (2), (4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (4) зависит как от замены переменных (2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

2. Достаточно общий случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = -z_4, \quad \dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \tag{7}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2, z_3, z_4 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие классы уравнений геодезических (в частности, на сфере, более общих поверхностях вращения):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^{3}_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^{3}_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0, \end{cases} \tag{8}$$

(см. [3,4,7]); остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (7) уравнения (4) примут вид

$$\dot{z}_1 = \left[2\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma^{3}_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ - \left[2\Gamma^{3}_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2,$$

$$\dot{z}_2 = \left[2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ - \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \tag{9}$$

$$\dot{z}_3 = \left[2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ - \Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2,$$

$$\dot{z}_4 = \Gamma^{\alpha}_{11} f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma^{\alpha}_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2,$$

и уравнения (8) почти всюду эквивалентны составной системе (7), (9) на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Для полного интегрирования системы (7), (9) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно будет меньше, что будет показано во второй половине статьи при изучении систем с диссипацией.

Предложение 2. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$\begin{cases} 2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma^{3}_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma^{3}_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[2\Gamma^{3}_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \end{cases} \tag{10}$$

то система (7), (9) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_4, \ldots, z_1) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 = C_1^2 = \mathrm{const}\,. \tag{11}$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (11) «не заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (10) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных, вырождающиеся в обыкновенные). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (10) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ системы (10) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (11) для системы (7), (9) уравнений геодезических (8). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (10) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (7) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = f(\alpha); \tag{12}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (10):

$$\begin{cases} 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2} + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)h^2(\beta_2) \equiv 0. \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ зависят от коэффициентов связности в силу системы (13), а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут приведены ниже.

Предложение 3. *Если выполнены свойства* (12), (13) *и при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{14}$$

то система (7), (9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\begin{gathered} \Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ \Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}. \end{gathered} \tag{15}$$

Предложение 4. *Если выполнены условия предложения* 3, *условие*

$$g_1(\beta_1) = g_2(\beta_1) = g(\beta_1) \tag{16}$$

и при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{17}$$

то система (7), (9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered} \Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \\ \Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \end{gathered} \tag{18}$$

Предложение 5. *Если выполнены условия предложений* 3, 4 *и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) = \Gamma_3(\beta_2), \tag{19}$$

то система (7), (9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_4(z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const},$$
$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}. \tag{20}$$

Предложение 6. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, 5, *то система* (7), (9) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_5(z_2,z_1;\alpha,\beta) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\frac{C_4h(b)}{\sqrt{C_3^2\Phi_2^2(b)-C_4^2}}\,db = C_5 = \mathrm{const}, \tag{21}$$

где после взятия интеграла (21) *вместо постоянных* C_3 *и* C_4 *нужно подставить левые части равенств* (18) *и* (20) *соответственно.*

Набор первых интегралов (11), (15), (18), (20), (21) является полным набором независимых первых интегралов системы (7), (9) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (21) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (21) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [5, 10]).

3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы. Теперь, несколько модифицировав систему (7), (9) при условиях (12)–(14), (16), (17), (19), получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (22). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4,z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ примет вид

$$\dot\alpha = -z_4, \tag{22a}$$
$$\dot z_4 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}f_1^2(\alpha)z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22}f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)z_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)z_1^2, \tag{22b}$$

$$\dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)z_2^2 - \\ - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)z_1^2, \tag{22c}$$

$$\dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1(\alpha)z_2z_3 - \\ - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)z_1^2, \tag{22d}$$

$$\dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1(\alpha)z_1z_3 - \\ - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]f_2(\alpha)g_1(\beta_1)z_1z_2, \tag{22e}$$

$$\dot\beta_1 = z_3f(\alpha), \tag{22f}$$
$$\dot\beta_2 = z_2f(\alpha)g(\beta_1), \tag{22g}$$

$$\dot\beta_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \tag{22h}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Предложение 7. *Если выполнены условия предложения* 2, *то система* (22) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_4,\ldots,z_1;\alpha) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad F_1(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da. \tag{23}$$

Предложение 8. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, 5, *то система* (22) *имеет три гладких первых интеграла вида* (15), (18), (20).

Предложение 9. *Если выполнены условия предложения* 6, *то система* (22) *имеет первый интеграл вида* (21).

Набор первых интегралов (23), (15), (18), (20), (21) является полным набором независимых первых интегралов системы (22) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (21) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (21) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [10]).

4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы. Теперь, усложнив систему (22), получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\dot\alpha = -z_4 + b\delta(\alpha), \tag{24a}$$

$$\dot z_4 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma^\alpha_{33} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \tag{24b}$$

$$\dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \tag{24c}$$

$$\dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \tag{24d}$$

$$\dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ - \left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \tag{24e}$$

$$\dot\beta_1 = z_3 f(\alpha), \tag{24f}$$

$$\dot{\beta}_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \tag{24g}$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \tag{24h}$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0. \end{cases}$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (24) при условиях (12), (13), (16), а также при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) = \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \tag{25}$$

Введем по аналогии с (13) ограничение на функцию $f(\alpha)$, состоящее в том, что она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (10):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{26}$$

Для полного интегрирования системы (24) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}},$$

система (24) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)w_3^2, \\ \dot{w}_3 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4, \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2 = \pm w_3\sqrt{1+w_2^2}f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm\dfrac{w_2 w_3}{\sqrt{1+w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1), \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \pm w_3\sqrt{1+w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm\dfrac{w_1 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}f(\alpha), \end{cases} \tag{29}$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm\frac{w_3}{\sqrt{1+w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \tag{30}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (27)–(30) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (27), по одному — для систем (28) и (29) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (30) (т.е. всего *пять*).

Теорема 1. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{31}$$

Тогда система (24) *при выполнении условий* (12), (13), (16), (25), (26) *обладает полным набором* (*пятью*) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (27) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) w_3^2}{-w_4 + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_3}{d\alpha} = \dfrac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] w_3 w_4}{-w_3 + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{32}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_4 \delta(\alpha), \quad w_3 = u_3 \delta(\alpha), \tag{33}$$

приводим систему (32) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha) \dfrac{du_4}{d\alpha} + \delta'(\alpha) u_4 = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) \delta^2(\alpha) u_3^2}{-u_4 \delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha) \dfrac{du_3}{d\alpha} + \delta'(\alpha) u_3 = \dfrac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] \delta^2(\alpha) u_3 u_4}{-u_4 \delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \tag{34}$$

что почти всюду эквивалентно системе

$$\begin{cases} \delta(\alpha) \dfrac{du_4}{d\alpha} = \dfrac{F_3(\alpha) + \Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u_3^2 + \delta'(\alpha) u_4^2 - b\delta'(\alpha) u_4}{-u_4 + b}, \\ \delta(\alpha) \dfrac{du_3}{d\alpha} = \dfrac{-\Gamma_4(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u_3 u_4 + \delta'(\alpha) u_3 u_4 - b\delta'(\alpha) u}{-u_4 + b}, \end{cases} \tag{35}$$

где $F_3(\alpha) = F(\alpha)/\delta(\alpha)$.

А после выполнения условий (31) система (35) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_4}{du_3} = \frac{\lambda + \kappa u_3^2 + u_4^2 - b u_4}{(1-\kappa) u_3 u_4 - b u_3}. \tag{36}$$

Уравнение (36) имеет вид уравнения Абеля (см. [5]). В частности, при $\kappa = -1$ оно обладает первым интегралом

$$\frac{u_4^2 + u_3^2 - b u_4 + \lambda}{u_3} = C_1 = \text{const}, \tag{37}$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1\left(\frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - b w_4 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha)}{w_3 \delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}\,. \tag{38}$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядкаЁ(27) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (37) при $u_3 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_4 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_3 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{39}$$

Ясно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{40}$$

и фазовое пространство системы (23) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (39).

Таким образом, в силу соотношения (37) первое уравнение системы (35) при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)} \frac{du_4}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - b u_4 + u_4^2) - C_1 U_1(C_1, u_4)}{-u_4 + b}, \tag{41}$$

где

$$U_1(C_1, u_4) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - b u_4 + \lambda)}\right\}; \tag{42}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (40).

Тогда дополнительный первый интеграл для системы (27) имеет вид

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}; \tag{43}$$

при $\kappa = -1$ он находится из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b-u_4)du_4}{2(\lambda - bu_4 + u_4^2) - C_1\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - bu_4 + \lambda)}\right\}/2},$$

где $u_4 = w_4/\delta(\alpha)$. При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 необходимо подставить левую часть равенства (38). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (38), (43) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (28) и (29) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2; \tag{44}$$

вид функций $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, определен в (18), (20). Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (30), находится по аналогии с (21):

$$\Theta_5(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const};$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_3, C_4 необходимо подставить соответствующие левые части равенства (44).

5. Замечание о структуре первых интегралов систем с диссипацией. Если α — 2π-периодическая координата, то система (27) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [16–18]). Более того, при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (23), (15). В силу (31)

$$\Phi_1(z_4, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da \cong w_4^2 + w_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{45}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (26) и (31)

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\; f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} \simeq w_3\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{46}$$

где $\simeq$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (45), (46) (или (23), (15)) также является первым интегралом системы (27) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 - bw_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{47}$$

и (46) по отдельности первым интегралом системы (27) не является, в то время как отношение функций (47), (46) является первым интегралом системы (27) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [10]).

6. Заключение. По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$\text{(a)} \quad f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \text{(b)} \quad f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{48}$$

В случае (48)(a) имеем класс систем, соответствующих движению динамически симметричного пятимерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [16–18]). Случай (**??**) соответствует классу систем, описывающих движение материальной точки на четырехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на четырехмерной сфере. В случае (48), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает пространственное движение пятимерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [8, 9, 11]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает также обобщенный пятимерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [16–18]).

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым *нетривиальным* случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

Автор выражает искреннюю благодарность академику В. В. Козлову за поддержку при обсуждении полученных результатов, а также проф. А. В. Михалеву за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
2. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на so(4)// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
3. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа// Докл. АН СССР. — 1984. — *219*, № 2. — С. 228–237.
4. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
6. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
7. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
8. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
9. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
10. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
11. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
12. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
13. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
14. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНИТИ, 2013. — *125*. — С. 5–254.

15. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
16. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле// Докл. РАН. — 2015. — *460*, № 2. — С. 165–169.
17. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
18. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
19. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 547–551.

М. В. Шамолин
Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`