М. В. Шамолин, Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2018, том 150, 110–118

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 150 (2018). С. 110–118

УДК 517.933

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2018 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям (систем с тремя степенями свободы). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

AMS Subject Classification: 70G60

В задачах динамики систем с тремя степенями свободы пространствами положений являются трехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение четырехмерного твердого тела-маятника (обобщенного сферического маятника) в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий (см. [15,17]). В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [12, 17]).

Известен также класс задач о движении точки по трехмерной поверхности; при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего четырехмерного пространства. В ряде случаев в системах с переменной диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (см. [14, 15, 18]).

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией (см. [12, 15, 17]) и обобщают ранее рассмотренные.

1. Уравнения геодезических при замене координат.

Как известно, в случае трехмерного риманова многообразия M^3 с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(x)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^3\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, имеют следующий вид (дифференцирование выполняется по натуральному параметру):

$$\ddot x^i + \sum_{j,k=1}^{3} \Gamma^i_{jk}(x) \dot x^j \dot x^k = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00848-а).

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^3. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{3} R^{ij}(x) z_j, \tag{2}$$

которую можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^{3} T_{ji}(x)\dot{x}^i,$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i, j = 1, 2, 3,$ — функции от x^1, x^2, x^3, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^3.

Справедливы тождества

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{3} \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{3} T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{3} T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{3}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, 2, 3.$$

Подставляя в (3) уравнения (1), имеем:

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{3} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{3} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q; \tag{4}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, 2, 3$, нужно подставить формулы (2).

Другими словами, равенство (4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{3} Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k\Big|_{(2)} = 0, \tag{5}$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{3} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{6}$$

Предложение 1. *Система* (1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (2), (4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (4) зависит как от замены переменных (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

2. Достаточно общий случай. Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_3, \\ \dot{\beta}_1 &= z_2 f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \end{aligned} \tag{7}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2, z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (в частности, на поверхностях вращения):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 = 0, \end{cases} \tag{8}$$

(см. [1, 2]), т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (7) уравнения (4) примут вид

$$
\begin{aligned}
\dot z_1 &= \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_2,\\
\dot z_2 &= \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) z_1^2,\\
\dot z_3 &= \Gamma^\alpha_{11} f_1^2(\alpha) z_2^2 + \Gamma^\alpha_{22} f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

и уравнения (8) почти всюду эквивалентны составной системе (7), (9) на многообразии $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Для полного интегрирования системы (7), (9) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов.

Предложение 2. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$
\begin{cases}
2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0,\\
2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0,\\
\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0,
\end{cases}
\tag{10}
$$

то система (7), (9) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$
\Phi_1(z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \mathrm{const}\,. \tag{11}
$$

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы (10) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (11) для системы (7), (9) уравнений геодезических (8). Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для систем при отсутствии силового поля, или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (10) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (7) выполнение условий

$$
f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha); \tag{12}
$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из (10):

$$
2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) \equiv 0. \tag{13}
$$

Таким образом, функцию $g(\beta_1)$ будем брать в зависимости от коэффициентов связности, а вот ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3. *Если выполнены свойства* (12), (13), *при этом справедливы равенства*

$$
\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{14}
$$

то система (7), (9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$
\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\ \Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{15}
$$

где

$$
\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)\,db\right\}.
$$

Предложение 4. *Если выполнено свойство* (12), *при этом справедливо равенство*

$$
\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{16}
$$

а также второе равенство из (14) ($\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha)$), *то система* (7), (9) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_1;\alpha,\beta_1)=z_1\Phi_0(\alpha)\Phi(\beta_1)=C_3=\mathrm{const}, \tag{17}$$

где

$$\Phi(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Предложение 5. *Если выполнены условия* (12), (13), (14), (16), *то система* (7), (9) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_4(z_2,z_1;\beta)=\beta_2\pm\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b)-C_3^2}}\,db=C_4=\mathrm{const}, \tag{18}$$

где после взятия интеграла (18) *вместо постоянных* C_2, C_3 *нужно подставить соответственно левые части равенств* (15), (17).

При вышеперечисленных условиях система (7), (9) обладает полным набором (четырьмя) независимых первых интегралов вида (11), (15), (17), (18).

3. Уравнения движения на касательном расслоении к трехмерному многообразию в потенциальном силовом поле. Теперь несколько модифицируем систему (7), (9) при условиях (12), (13), (14), (16), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (19). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ примет вид

$$\begin{cases}\dot\alpha=-z_3,\\ \dot z_3=F(\alpha)+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_2^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_2=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3-\Gamma^1_{22}(\beta_1)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_1=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f(\alpha)z_1z_2,\\ \dot\beta_1=z_2f(\alpha),\\ \dot\beta_2=z_1f(\alpha)g(\beta_1),\end{cases} \tag{19}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases}\ddot\alpha+F(\alpha)+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_1+2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\beta_1)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_2+2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2=0.\end{cases}$$

Предложение 6. *Если выполнены условия предложения 2, то система* (19) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_3,z_2,z_1;\alpha)=z_1^2+z_2^2+z_3^2+F_1(\alpha)=C_1=\mathrm{const},\quad F_1(\alpha)=2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F(a)da. \tag{20}$$

Предложение 7. *Если выполнены условия предложений 3, 4, то система* (19) *имеет два гладких первых интеграла вида* (15), (17).

Предложение 8. *Если выполнены условия предложения 5, то система* (19) *имеет первый интеграл вида* (18).

При вышеперечисленных условиях система (19) обладает полным набором (четырьмя) независимых первых интегралов вида (20), (15), (17), (18).

4. Уравнения движения на касательном расслоении к двумерному многообразию в силовом поле с диссипацией. Теперь усложним систему (19) и получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_2^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \Gamma^1_{22}(\beta_1) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_2 f(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{21}$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \ddot\alpha - b\dot\alpha\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\delta(\alpha) f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\beta_1)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\delta(\alpha) f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (21) при условии (13), а также при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \tag{22}$$

Введем также (по аналогии с (13)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (10):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{23}$$

Для полного ее интегрирования необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1},$$

система (21) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) z^2, \\ \dot z = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z z_3, \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} \dot z_* = \pm z\sqrt{1+z_*^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot\beta_1 = \pm \dfrac{z z_*}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{25}$$

$$\dot\beta_2 = \pm \frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{26}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (24)–(26) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (24), один — системы (25), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (26) (т.е. всего четыре).

Теорема 1. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства*

$$\Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{27}$$

Тогда система (21) *при выполнении равенств* (13), (22), (23) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (24) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dz_3}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) z^2}{-z_3 + bg(\alpha)}, \\ \dfrac{dz}{d\alpha} = \dfrac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z z_3}{-z_3 + bg(\alpha)}. \end{cases} \tag{28}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_3 = u_3 \delta(\alpha), \quad z = u\delta(\alpha), \tag{29}$$

приводим систему (28) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha) \dfrac{du_3}{d\alpha} + \delta'(\alpha) u_3 = \dfrac{F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) \delta^2(\alpha) u^2}{-u_3 \delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha) \dfrac{du}{d\alpha} + \delta'(\alpha) u = \dfrac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha}\right] \delta^2(\alpha) u u_3}{-u_3 \delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \tag{30}$$

что, учитывая (23), почти всюду эквивалентно системе

$$\begin{cases} \delta(\alpha) \dfrac{du_3}{d\alpha} = \dfrac{F_3(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u^2 + \delta'(\alpha) u_3^2 - b\delta'(\alpha) u_3}{-u_3 + b}, \\ \delta(\alpha) \dfrac{du}{d\alpha} = \dfrac{-\Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) \delta(\alpha) u u_3 + \delta'(\alpha) u u_3 - b\delta'(\alpha) u}{-u_3 + b}, \end{cases} \tag{31}$$

где $F_3(\alpha) = F(\alpha)/\delta(\alpha)$.

После выполнения условий (27) система (31) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_3}{du} = \frac{\lambda + \kappa u^2 + u_3^2 - bu_3}{(1-\kappa) u u_3 - bu}. \tag{32}$$

Уравнение (32) имеет вид уравнения Абеля (см. [3]). В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет первый интеграл

$$\frac{u_3^2 + u^2 - bu_3 + \lambda}{u} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{33}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(z_3, z; \alpha) = G_1\left(\frac{z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{z}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{z_3^2 + z^2 - bz_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{34}$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (24) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (33) при $u \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_3 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{35}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geqslant 0, \tag{36}$$

и фазовое пространство системы (24) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (35).

Таким образом, в силу соотношения (33) первое уравнение системы (31) при условиях (23) и при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)} \frac{du_3}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_3 + u_3^2) - C_1 U_1(C_1, u_3)}{-u_3 + b}, \tag{37}$$

где

$$U_1(C_1, u_3) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_3^2 - bu_3 + \lambda)}\right\}; \tag{38}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (36). Тогда дополнительный первый интеграл для системы (24) имеет вид

$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{z}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const} \tag{39}$$

и при $\kappa = -1$ он находится из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_3)du_3}{2\big(\lambda - bu_3 + u_3^2\big) - C_1\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_3^2 - bu_3 + \lambda)}\right\}/2},$$

где $u_3 = z_3/\delta(\alpha)$. При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 необходимо подставить левую часть равенства (34). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (34), (39) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первый интеграл для системы (25) имеет вид

$$\Theta_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}; \tag{40}$$

функция $\Phi(\beta_1)$ — вид (17). Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (26), находится по аналогии с (18):

$$\Theta_4(z_*; \beta) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3^2\Phi^2(b) - 1}}\, db = C_4 = \text{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо C_3 необходимо подставить левую часть равенства (40).

5. Строение первых интегралов для систем с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (24) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [4, 12, 15, 17]). При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (20), (15). В силу (27)

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da \cong z^2 + z_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{41}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом, в силу (23) и (27)

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\; f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)db\right\} \simeq z\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{42}$$

где $\simeq$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (41), (42) (или (20), (15)) также является первым интегралом системы (24) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$z^2 + z_3^2 - bz_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{43}$$

и (42) по отдельности не является первым интегралом системы (24). Однако отношение функций (43), (42) является первым интегралом системы (24) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [5, 6, 9, 12, 15]).

6. Заключение. По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{44}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{45}$$

Случай (44) соответствует классу систем, описывающих движение динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [7, 8, 13, 14]). Случай (45) соответствует классу систем, описывающих движение материальной точки на трехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [10, 11, 18]). В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на трехмерной сфере. В случае (44), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)\cos\alpha$, то система описывает пространственное движение четырехмерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [12, 15–17]). В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает также обобщенный четырехмерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [12–14, 17]).

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа// Докл. АН СССР. — 1984. — *219*, № 2. — С. 228–237.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
4. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
5. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
6. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
7. *Шамолин М. В.* Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1993. — № 1. — С. 68–71.
8. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения// Усп. мат. наук. — 1997. — *52*, № 3. — С. 177–178.
9. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
10. *Шамолин М. В.* Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2000. — *371*, № 4. — С. 480–483.
11. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
12. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
13. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
14. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.

15. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНИТИ, 2013. — *125*. — С. 5–254.
16. *Шамолин М. В.* Моделирование движения твердого тела в сопротивляющейся среде и аналогии с вихревыми дорожками// Мат. модел. — 2015. — *27*, № 1. — С. 33–53.
17. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
18. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 547–551.

М. В. Шамолин
Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`