



Общероссийский математический портал

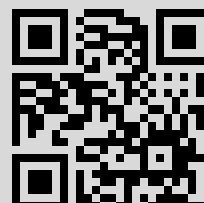
М. В. Шамолин, Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2018, том 150, 88–109

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.60.208

18 июня 2018 г., 10:55:13





РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ В СЛУЧАЯХ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С ОШИБКОЙ И ТОЧНЫХ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2018 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления, имеющих модульную структуру и конечный набор возможных неисправностей, сводится к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля (установлению критерия наличия неисправности в системе) и задаче диагностирования (поиску произошедшей неисправности). Показана принципиальная осуществимость решения задачи дифференциальной диагностики в случае точных траекторных измерений и траекторных измерений с ошибкой на уровне математических моделей.

Ключевые слова: диагностика, система управления, летательный аппарат, опорная неисправность, диагностическое пространство, задача контроля, задача диагностирования.

AMS Subject Classification: 62G05, 68U01

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	88
1. Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений)	89
2. Случай траекторных измерений с ошибкой	101
3. Статистическое решение задачи дифференциальной диагностики	106
Заключение	108
Список литературы	108

ВВЕДЕНИЕ

Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта в любой точке внутри данной поверхности контроля (см. [1, 2, 15]).

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации можно выбрать поверхность контроля.

Задачу диагностирования будем решать, выполняя слежение за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики осуществлялся во время движения объекта, был выполнен в течение весьма краткого интервала времени, например за полупериод или четверть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00848-а).

1. ЗАДАЧА ДИАГНОСТИРОВАНИЯ
(СЛУЧАЙ ТОЧНЫХ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ)

Рассмотрим динамическую систему, движение которой может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f_0(x, t), \quad (1.1)$$

где $x(t)$, $f_0(x, t)$ — n -мерные вектор-функции. Начальные условия уравнения (1.1) будем считать принадлежащими некоторой ограниченной области. Кроме того, предположим, что функция $f_0(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения уравнений (1.1) в некоторой области пространства $\mathbb{R}^{n+1}(x, t)$.

Пусть осуществлен синтез управления, причем его структура и параметры выбраны таким образом, что уравнения (1.1) описывают желаемое движение, т.е. движение $x(t)$, близкое к некоторой программной траектории $x_*(t)$. Такую схему принято называть *исправной*.

Конечному набору опорных невырожденных неисправностей (см. [3, 14]) из класса возможных поставим в соответствие набор обыкновенных дифференциальных уравнений того же порядка (только конечно):

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 1, \dots, l. \quad (1.2)$$

Здесь $f_j(x, t)$ — известные вектор-функции, соответствующие той или иной неисправности.

Модели (1.1) и (1.2) принадлежат одному фазовому пространству и отличаются лишь своей структурой. Если в заранее не известный момент времени происходит одна из возможных неисправностей, то траектория системы (1.1) изменяется и непрерывно продолжается траекторией одной из систем (1.2). Набор моделей (1.1) и (1.2) невырожден, и их можно рассматривать объединенными:

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 0, \dots, l. \quad (1.3)$$

В системе (1.1) могут возникать неисправности, не предусмотренные априорным набором (1.2). Такие неисправности могут появляться, например, в окрестностях *опорных неисправностей*; это значит, что функции в правых частях уравнений (1.3) могут содержать элементы с неполной информацией. Недоопределенность описания возникает в связи с тем, что законы изменения некоторых элементов в (1.3) могут отличаться от законов, предусмотренных в классе возможных неисправностей, и эти законы неизвестны.

Для описания систем, содержащих элементы с неполной информацией, используют дифференциальные включения (см. [4, 13, 17]):

$$x' \in F(x, t), \quad (1.4)$$

где вектор x характеризует отклонение системы (1.1) от состояния, предписанного целью управления, а через $F(x, t)$ обозначено множество скоростей (1.3):

$$F(x, t) \in f_j(x, t), \quad f = 0, \dots, l, \quad (1.5)$$

в частности, таких, которые априори неизвестны, но могут возникнуть и принадлежать, например, сферам влияния скоростей опорных систем (1.3).

Под решением дифференциального включения (1.4), (1.5) [5] будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую соотношению $x' \in F(x(t), t)$ при всех t на рассматриваемом интервале времени и соотношению $x(t_0) \in \Xi$.

Достаточные условия существования и единственности таких решений для систем с фазовыми ограничениями приводятся в [6, 7].

Заметим, наконец, что если в рассматриваемой системе (1.1) произойдет неисправность, не предусмотренная априорным списком опорных неисправностей (1.2), то эта неисправность также должна быть обнаружена как одна из опорных неисправностей, или сообщение о такой ситуации будет являться одним из возможных выходов работы алгоритма, решающего задачу диагностирования. В принципиальном плане важнее знать, в каком датчике произошла неисправность, чем какая конкретно неисправность произошла в данном датчике.

Процесс анализа траекторий систем (1.3) после выхода фазовой траектории вектора контроля $y(t)$ на поверхность контроля π_k , т.е. процесс, решающий задачу диагностирования, назовем *алгоритмом диагностирования*.

Перейдем к постановке задачи и построению алгоритмов диагностирования.

В дальнейшем будем считать, что время диагностирования τ задано и таково, что $\tau_0 < \tau < T_0$. Для этого случая сформулируем и докажем теорему, которая дает возможность построить алгоритмы диагностирования.

Введем в рассмотрение вектор

$$z(t) = (x_{d_1}, \dots, x_{d_q}) = (z_1, \dots, z_q), \quad q = 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

компоненты которого являются подмножеством компонент фазового вектора состояния $x(t)$, причем размерность множества компонент вектора контроля $y(t)$ не превышает размерность подмножества компонент вектора $z(t)$, т.е. $m \leq q$. Будем предполагать, что вектор $z(t)$ таков, что характер функции $f_j(x, t)$ проявляется в поведении компонент этого вектора. Вектор $z(t)$ назовем *вектором диагностирования*.

Задача диагностирования может быть сформулирована следующим образом.

Пусть известны невырожденные дифференциальные уравнения (1.3), поверхность контроля π_k , момент времени τ_0 выхода вектора контроля на π_k и значение фазового вектора $x(\tau_0)$. Требуется по измерению фазового вектора $x(t)$ в некоторые последующие после выхода на π_k моменты времени t_k на интервале $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$ с помощью вектора диагностирования $z(t)$ однозначно определить номер j функции $f_j(x, t)$ из (1.3); здесь τ — малый промежуток времени, $\tau_0 + \tau < T_0$.

Таким образом, по информации о выходе системы на поверхность контроля и в результате слежения за последующей траекторией объекта необходимо определить номер j возникшей в системе управления объектом неисправности из априорного списка в l неисправностей.

Перейдем теперь к более детальной формализованной постановке задачи и результатам, которые следуют из этой постановки. При этом начнем с рассмотрения случая $q = n$.

Введем следующие обозначения. Через $x_j(t)$ будем обозначать точку траектории j -й системы (1.3). Обозначение $x(t)$ будем применять в рассуждениях, относящихся ко всем системам, или как общее обозначение точки траектории, когда ее принадлежность той или иной системе (1.3) не установлена, т.е. при описании действительного состояния рассматриваемой системы.

Примем за начало отсчета времени момент выхода $x(t)$ на поверхность π_k . Введем некоторое натуральное число N . Будем производить траекторные измерения в следующие моменты времени:

$$\tau_0 = 0, \quad t_1 = \frac{\tau}{N}, \quad t_2 = \frac{2\tau}{N}, \quad \dots, \quad t_N = \tau.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_{0j} &= x_j(0), & x_{1j} &= x_j\left(\frac{\tau}{N}\right), & x_{2j} &= x_j\left(\frac{2\tau}{N}\right), & \dots, & x_{Nj} &= x_j(\tau), \\ x_0 &= x(0), & x_1 &= x\left(\frac{\tau}{N}\right), & x_2 &= x\left(\frac{2\tau}{N}\right), & \dots, & x_N &= x(\tau). \end{aligned}$$

Предположим, что произошла неисправность, траектория системы вышла на π_k и далее, в течение времени τ , мы получили значения $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$. Требуется проверить полную систему l гипотез: j -я гипотеза, $j = 0, \dots, l$, — это утверждение о том, что траектория $x(t)$ есть траектория j -й системы (1.3), т.е. $x \equiv x_j$ при условии $x_{0j} = x_0$.

Рассмотрим следующий функционал от $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N, x_{1j}, \dots, x_{Nj}$:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^n (x_{is} - x_{ijs})^2, \quad j = 0, \dots, l. \quad (1.7)$$

Здесь x_{is} — s -я компонента вектора состояния $x(t)$, измеренная в момент времени t_i , $i = 1, \dots, N$, x_{ijs} — s -я компонента вектора состояния в момент времени t_i , полученная в результате интегрирования системы (1.3) с f_j в правой части.

Для каждого j и N на интервале $[0, \tau]$ функционал S_j^N имеет свое значение, т.е. является переменной величиной, заданной на множестве функций и зависящей от выбора одной или нескольких функций.

Сформулируем теперь предельную теорему для случая точных траекторных измерений.

Теорема 1.1. *Для невырожденного конечного набора систем обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$x' = f_j(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \in X^0, \quad j = 0, \dots, l, \quad (1.8)$$

дифференциального включения $x' \in F(x, t) \in f_j(x, t)$ и всех j найдутся такие наборы чисел S_j^N , M_j , S_j и \bar{N} , что для $N > \bar{N}$ с помощью функционала S_j^N из (1.7), который запишем в виде

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N (x_i - x_{ij})^2, \quad j = 0, \dots, l, \quad (1.9)$$

возникшая в процессе движения в неизвестный момент времени на интервале $[t_0, T_0]$ неисправность, удовлетворяющая критерию контроля, будет диагностирована однозначно как одна из систем (1.8) с номером j , если

$$S_j^N \leq M_j : \quad M_j(N) = \frac{\max_{\{x_0 \in X^0 : x_0 \in \pi_k\}} S_j^N}{\max_{\{x_0 \in X^0 : x_0 \in \pi_k\}}} = o\left(\frac{1}{N}\right) \quad (1.10)$$

или если

$$S_j^N = S_j : \quad S_j = \min_{\mu} S_{\mu}^N. \quad (1.11)$$

Доказательство. Запишем функционал (1.9) в приращениях, сохраняя для него прежнее обозначение:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N (\Delta_i x - \Delta_i x_j)^2, \quad (1.12)$$

где $\Delta_i x = |x_i - x_{i-1}|$ — измеренное приращение действительной траектории рассматриваемой системы, $\Delta_i x_j = |x_{ij} - x_{i-1j}|$ — вычисленное приращение ожидаемой траектории j -й системы (1.3) от начального значения x_{i-1j} .

Предположим сначала, что величины $\Delta_i x_j$, $i = 1, \dots, N$, $j = 0, \dots, l$, представляются своими точными значениями. Тогда, если j -я гипотеза верна, то, как нетрудно видеть, $S_j^N \equiv 0$, поэтому мы отбрасываем все гипотезы с такими номерами μ , что $S_{\mu}^N \neq 0$. Очевидно, что мы не можем отбросить в этом случае верную гипотезу.

Но предположение о том, что в нашем распоряжении могут быть точные значения $\Delta_i x_{jk}$, не оправдано. Мы располагаем только величинами x_0, x_1, \dots, x_N , а также правыми частями систем (1.3). Следовательно, мы можем организовать лишь приближенное нахождение величин $\Delta_i x_{jk}$ путем численного интегрирования систем (1.3). Мы располагаем на i -м шаге начальным условием x_{i-1} и ищем приращения решения j -й системы за один шаг.

В теории численных решений дифференциальных уравнений рассматриваются одношаговые процессы и даются приближенные формулы для $\Delta_i x_{jk}$ с оценками погрешностей. Общая одношаговая формула для j -й системы (1.3) (см. [8, 9]) имеет вид

$$\Delta_i x_j = x_{ij} - x_{i-1j} \cong h \Phi_j(x_{i-1j}, h) \quad (1.13)$$

с точностью до $o(h^p)$, где h — длина шага (в нашем случае $h = \tau/N$), а $\Phi_j(x_{i-1}, h)$ — вектор-функция от x_{i-1} и h , зависящая, кроме того, от правой части f_j системы; p — натуральное число, зависящее от вида Φ_j .

Подставляя в (1.12) приближенные выражения (1.13) для $\Delta_i x_{jk}$ и полагая $h = \tau/N$, получим

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \left(\Delta_i x - \frac{\tau}{N} \left| \Phi_j \left(x_{i-1}, \frac{\tau}{N} \right) \right| \right)^2, \quad j = 0, \dots, l. \quad (1.14)$$

Пусть $x \equiv x_j$; тогда (1.14) будет иметь вид

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \left(\Delta_i x_j - \frac{\tau}{N} \left| \Phi_j \left(x_{i-1j}, \frac{\tau}{N} \right) \right| \right)^2, \quad j = 0, \dots, l. \quad (1.15)$$

Заметим, что величины S_j^N в этом случае будут функциями точек выхода x_{0j} на поверхность π_k . Действительно, все x_{ij} , $i = 1, \dots, N$, принадлежат траектории $x_j(t)$, $t \in [0, T]$, которая определяется начальным условием x_{0j} .

Предположим, что Φ_j , $j = 0, \dots, l$, ограничены и непрерывны по совокупности координат x и h , что затем будет выполняться при конкретных Φ_j . Предположим также, что функции в (1.15), а именно, $S_j^N = S_j^N(x_0)$, $j = 0, \dots, l$, монотонно сходятся к нулю при $N \rightarrow \infty$ в каждой фиксированной точке поверхности π_k . Это предположение также будет выполняться, когда мы рассмотрим конкретные Φ_j .

Из этих предположений сразу следует ограниченность и непрерывность $S_j^N(x_0)$ на поверхности π_k . Отсюда следует, что существует конечное значение

$$M_j(N) = \max_{x_0 \in \pi_k} S_j^N(x_0). \quad (1.16)$$

Из монотонной сходимости к нулю $S_j^N(x_0)$ при $N \rightarrow \infty$ в каждой точке поверхности контроля и непрерывности $S_j^N(x_0)$ на этой поверхности следует сходимость $M_j(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, $j = 0, \dots, l$.

Зададимся определенным N . Пусть траектория x вышла на поверхность контроля, то есть произошла неисправность. Проверяем j -ю гипотезу, $j = 1, \dots, l$, формируя (1.14).

Очевидно, если j -я гипотеза верна, то $S_j^N \leq M_j$, поэтому отбрасываем все гипотезы с такими номерами μ , для которых $S_\mu^N > M_\mu$. В этом случае мы не можем отбросить верную гипотезу.

Таким образом, за счет того, что отбрасываются гипотезы о возможности некоторых неисправностей, мы, вообще говоря, сужаем априорный набор возможных неисправностей до апостериорного набора. При условии j -й неисправности величина S_j^N есть функция точек поверхности контроля, а M_j — константы, поэтому в каждой точке поверхности определен размер апостериорного набора. Обозначим его $l_j(x)$, $x \in \pi_k$.

После того, как в общем случае построен алгоритм диагностирования при точных траекторных измерениях, приведем обычно применяемые на практике одношаговые формулы Эйлера:

$$\Phi_j \left(x_{i-1}, \frac{\tau}{N} \right) = f_j(x_{i-1}), \quad p = 1. \quad (1.17)$$

Если подставить формулы Эйлера (1.17) в (1.14), то величины S_j^N будут характеризовать равномерно вдоль всей траектории j -й системы то, насколько разнятся поля направлений j -й и μ -й систем.

Наконец, получим некоторые результаты, необходимые для доказательства предельной теоремы.

Вновь рассмотрим выражения (1.15). Из (1.13) следует, что

$$S_j^N(x_{0j}) = \sum_{i=1}^N \left(\overline{\sigma} \left(\left(\frac{\tau}{N} \right)^p \right) \right)^2 = \sum_{i=1}^N o \left(\left(\frac{\tau}{N} \right)^{2p} \right) = o \left(\frac{1}{N^{2p-1}} \right).$$

Положим $2p - 1 = \nu$; тогда

$$S_j^N(x_{0j}) = o \left(\frac{1}{N^\nu} \right)$$

для любой точки $x_{0j} \in \pi_k$ при $N \rightarrow \infty$. Это значит, что

$$N^\nu S_j^N(x_{0j}) \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

При доказательстве сходимости $M_j(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ мы требовали, чтобы в каждой точке поверхности контроля была сходимость $S_j^N(x_{0j}) \rightarrow 0$, монотонная при $N \rightarrow \infty$. Сейчас мы потребуем, чтобы в каждой точке поверхности контроля последовательность $\{N^\nu S_j^N(x_{0j})\}$,

$N = 1, 2, \dots$, начиная с некоторого $N > N_0$, одного для всей поверхности контроля, сходилась к нулю монотонно при $N \rightarrow \infty$. Заметим, что величины $N^\nu S_j^N(x_{0j})$ непрерывны на поверхности контроля.

Известно, что последовательность непрерывных на компакте функций, монотонно сходящаяся к нулю в каждой точке, сходится к нулю равномерно на этом компакте.

Заметим, что рассмотренные выше поверхность контроля π_k , сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля являются ограниченными замкнутыми множествами, т.е. являются компактными.

Итак, $\{N^\nu S_j^N(x_{0j})\}$, $N = 1, 2, \dots$, — последовательность непрерывных на поверхности контроля функций, монотонно сходящаяся к нулю в каждой точке поверхности. По указанной выше теореме $N^\nu M_j(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, и, так как

$$N^\nu M_j(N) = \max_{x_{0j} \in \pi_k} (N^\nu S_j^N(x_{0j})),$$

то стремление $N^\nu M_j(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ означает, что $M_j(N) = o(N^{-\nu})$, где $\nu = 2p - 1$, $p \geq 1$. Поэтому условие (1.10) теоремы $M_j(N) = o(N^{-1})$ всегда выполнено.

Заметим далее, что на траектории μ -й ($\mu = 0, \dots, l$) системы (1.3) при $j \neq \mu$

$$\Delta_i x_\mu = \frac{\tau}{N} f_\mu(x_{i-1\mu}) + o\left(\frac{\tau}{N}\right), \quad \frac{\tau}{N} \Phi_j\left(x_{i-1\mu}, \frac{\tau}{N}\right) = \frac{\tau}{N} f_j(x_{i-1\mu}) + o\left(\frac{\tau}{N}\right).$$

Подставим эти выражения в (1.15). Получим:

$$\begin{aligned} S_j^N &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\tau}{N} |f_\mu(x_{i-1\mu})| - \frac{\tau}{N} |f_j(x_{i-1\mu})| + o\left(\frac{\tau}{N}\right) \right)^2 = \\ &= \frac{\tau}{N} \sum_{i=1}^N \left(|f_\mu(x_{i-1\mu})| - |f_j(x_{i-1\mu})| + o(1) \right)^2 \frac{\tau}{N}. \end{aligned}$$

Суммы

$$\sum_{i=1}^N \left(|f_\mu(x_{i-1\mu})| - |f_j(x_{i-1\mu})| + o(1) \right)^2 \frac{\tau}{N}$$

сходятся при $N \rightarrow \infty$ к интегралам

$$I_{\mu,j}(x_{0\mu}) = \int_{x_{0\mu}}^{x_\mu(\tau)} \left(|f_\mu(x_\mu)| - |f_j(x_\mu)| \right)^2 dx_\mu,$$

для которых, в силу невырожденности уравнений (1.3), найдется такое $\varepsilon > 0$, что $I_{\mu,j}(x_{0\mu}) > \varepsilon$ для любых $\mu, j = 0, \dots, l$, $\mu \neq j$ при любом $x_{0\mu} \in \pi_k$.

Таким образом, показано, что

$$S_j^N(x_{0\mu}) \cong \frac{c_{\mu j}}{N},$$

где $c_{\mu j}$ — некоторые константы, удовлетворяющие условию $c_{\mu j} > \varepsilon \tau$, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N S_j^N(x_{0\mu}) = c_{\mu j} > \varepsilon \tau$$

для всех $x_{0\mu} \in \pi_k$.

Так как к тому же $M_j(N) = o(N^{-1})$, найдется такое N_1 , что неравенство

$$S_j^N(x_{0\mu}) > \frac{\varepsilon \tau}{N} > M_j(N) \tag{1.18}$$

будет выполняться для всех $N > N_1$, всех $\mu \neq j$ и всех $x_{0\mu} \in \pi_k$. Это означает, что все j -е гипотезы при $j \neq \mu$ будут отвергаться, и будет выполняться только неравенство

$$S_\mu^N(x_{0\mu}) \leq M_\mu, \quad \mu = j,$$

т.е. $l_\mu(x_{0\mu}) = 1$.

Таким образом, в случае точных траекторных измерений возникшая в системе неисправность из априорного списка неисправностей будет однозначно отфильтровываться.

Процедура диагностирования неисправности сводится к следующему.

Алгоритм 1.1. В процессе функционирования объекта после выхода его траектории на поверхность контроля π_k в соответствии с функционалом диагностирования (1.7), (1.9), формируются числа S_j^N , и каждое S_j^N сравнивается с заранее подобранными константами M_j . Если $S_j^N \leq M_j$, то j -я система (1.3) включается в апостериорный набор l_j , в противном случае — исключается. Теорема утверждает, что, таким образом, номер функционального состояния объекта (неисправности) из известного списка может быть диагностирован однозначно, т.е. $l_j = 1$.

Прежде чем изложить методику априорного счета параметров алгоритма 1.1, рассмотрим доказательство второй части (1.11) теоремы. В силу непрерывности функционала S_j^N оно очевидно вытекает из доказательства первой части теоремы.

Действительно, пусть S_j^N удовлетворяет условию (1.11). Возьмем $\bar{N} = \max_j N_j$, где N_j — такое число траекторных измерений для j -й системы (1.3), что для всех $N > N_j$ выполняется оценка (1.18). Тогда при любых $N > \bar{N}$ условия

$$S_j^N > \frac{\varepsilon\tau}{N} > M_j(N)$$

выполняются для всех упомянутых j .

Пусть произошла μ -я неисправность, т.е. действительная траектория является одной из списочных и $S_j = \min_{\mu} S_{\mu}^N$. Тогда

$$S_j > M_{\mu} \quad \text{для } \mu \neq j, \quad S_j \leq M_{\mu} \quad \text{для } \mu = j.$$

Таким образом, и в случае $S_j = \min_{\mu} S_{\mu}^N$ теорема верна, и в пределе на интервале $[0, \tau]$ можно диагностировать все системы (1.3) из априорного списка.

На этапе проектирования процесс предварительного выбора N на уровне математических моделей и программ может быть осуществлен следующим образом (алгоритм 1.2).

Алгоритм 1.2. После выхода траектории объекта на поверхность контроля π_k для всевозможных j из списка заранее известных неисправностей объекта (1.3) и $N = 1$ составляются числа S_j^N , из которых выбирается наименьшее S_{j_1} . Номер j_1 , соответствующий наименьшему S_j , указывает номер случившейся неисправности. Затем вычисляется S_j^N для $N = 2$ и определяется j_2 . При равенстве $j_1 = j_2$ неисправность в объекте считается правильно определенной, и алгоритм заканчивает работу. В противном случае, т.е. если $j_1 \neq j_2$, вычисляется S_j^N для $N = 3$ и производится сравнение j_2 и j_3 и т. д.

Если τ не ограничено заранее сверху, то при осуществлении этого процесса может быть определен момент времени τ ($\tau = Nh$) окончания диагностирования.

Таким образом, теорема доказана. Кроме того, сформулированы алгоритмы, позволяющие диагностировать неисправности, предусмотренные априорным списком неисправностей. Однако в силу непрерывности происходящих процессов при работе алгоритмов и в силу определенных окрестностей влияния, введенные в [10], удовлетворяющие критерию контроля неисправности, возникшие и развивающиеся в окрестностях списочных неисправностей, т.е. неисправностей, близких списочным, возможно ведущих к ним, но не являющихся ими, будут диагностироваться с помощью предлагаемых алгоритмов как соответствующие списочные неисправности, близкие к происшедшим. Поэтому можно считать теорему доказанной полностью. \square

Теорема позволила сформулировать два алгоритма диагностирования. Первый из этих алгоритмов требует запоминания констант.

Рассмотрим методику априорного счета этих констант и параметров алгоритма 1.1.

Параметрами алгоритма диагностирования являются M_j , N , l_j , а также вероятность отбросить верную гипотезу, т.е. вероятность ложного срабатывания λ . Непосредственно для алгоритма диагностирования требуются только M_j и N . Эти параметры рассчитываются заранее и вносятся

в вычислитель на объекте. Что же касается параметров λ и l_j , то они являются показателями эффективности алгоритма.

Заметим, что задача аналитического нахождения в общем виде приемлемых констант N , M_j , $j = 0, \dots, l$, обеспечивающих заданную величину λ и l_j , крайне трудна уже в случае линейных систем (1.3). В то же время для конкретных систем (1.3) выбор N , нахождение M_j , подсчет оценок для λ и l_j с высокой заданной точностью можно проводить на ЭВМ методом статистических испытаний Монте-Карло, т.е. построением искусственной вероятностной модели, обладающей свойствами изучаемого процесса.

Очевидно, что функции S_j^N , $j = 0, \dots, l$ (см. (1.7)), зависят от реализации начального положения $x_0 \in X^0$, т.е. являются неотрицательными случайными величинами; $l_j(x_0)$, $x_0 \in \pi_k$, также можно рассматривать как функции случайных точек выхода траектории j -й системы на поверхность контроля, т.е. $l_j(x_0)$ также являются случайными величинами. Если ввести функцию плотности $P_j(\zeta)$, $\zeta \geq 0$ случайных величин S_j^N , то M_j будет параметром этой функции:

$$\int_{M_j}^{+\infty} P_j(\zeta) d\zeta = \lambda.$$

Имея это в виду, сформулируем задачу априорного определения параметров M_j и N (см. [10,11]).

Пусть даны j -я система (1.3), поверхность контроля π_k и вероятность ложного срабатывания λ . Требуется для любых случайным образом выбранных начальных условий $x_0 \in X^0$ определить такие M_j и N , чтобы с вероятностью, не превышающей λ , выполнялось неравенство $S_j^N > M_j$, т.е. вероятность противоположного события

$$P\{S_j^N \leq M_j\} > 1 - \lambda$$

и при этом $l_j = 1$.

Будем моделировать на компьютере j -ю неисправность ($j = 1, \dots, l$) следующим образом. С помощью датчика случайных чисел реализуем начальную точку траектории j -й системы. Далее, интегрируя эту систему до поверхности контроля π_k и на отрезке времени $[0, \tau]$ за поверхностью, получим точки $x_{0j}, x_{1j}, \dots, x_{Nj}$. Накладывая на эти точки некоторый нормально распределенный шум, получим требуемые нам точки для формирования чисел S_j^N . Производя независимую выборку j -х неисправностей, мы будем получать и независимую выборку чисел S_j^N .

Объем выборки чисел S_j^N обозначим через γ , а оценку M_j по выборке объема γ — через \overline{M}_j . Проводя очередную реализацию, будем полагать \overline{M}_j равным такому S_j^N из получившейся выборки, при котором отношение δ/γ , где δ — количество точек, для которых выполнено неравенство $S_j^N > M_j$, наименее уклонялось от λ .

Оценкой $\bar{\lambda}$ для λ примем δ/γ . Асимптотически, по теореме Бернулли, при $\gamma \rightarrow \infty$ имеем оценки $\bar{\lambda} = \delta/\gamma \rightarrow \lambda$ и $\overline{M}_j \rightarrow M_j$.

По интегральной теореме Муавра—Лапласа вероятность β того, что частота δ/γ отклонится от вероятности λ не более, чем на α , приближенно равна

$$\beta = P\left\{\left|\frac{\delta}{\gamma} - \lambda\right| \leq \alpha\right\} \cong \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda(1-\lambda)}}} e^{-x^2/2} dx \quad (1.19)$$

(см. [12,13]).

Задавшись приемлемыми α и β из (1.19), можно найти соответствующий объем выборки γ . При этом оценка \overline{M}_j будет удовлетворять требуемой от $\bar{\lambda} = \delta/\gamma$ точности.

Итак, с требуемой к $\bar{\lambda}$ точностью найдем \overline{M}_j . В алгоритме в качестве λ и M_j будем применять их оценки $\bar{\lambda}$ и \overline{M}_j .

Таким образом, определив M_j и имея вместо λ близкую к ней вероятность отбросить верную гипотезу $\bar{\lambda}$, возьмем выборку j -х неисправностей объема γ_1 . Она даст нам выборку $l_j(x_0)$. Обозначим через $l_j^k(x_{0j})$, $k = 1, \dots, \gamma_1$, k -ю реализацию $l_j(x_{0j})$.

За оценку \bar{l}_j среднего l_j примем

$$\bar{l}_j = \frac{1}{\gamma_1} \sum_{k=1}^{\gamma_1} l_j^k(x_{0j}),$$

а за оценку $\bar{\sigma}_j$ среднеквадратического отклонения σ_j примем

$$\bar{\sigma}_j = \left[\frac{1}{\gamma_1} \sum_{k=1}^{\gamma_1} (\bar{l}_j - l_j^k(x_{0j}))^2 \right]^{1/2};$$

при этом \bar{l}_j является случайной величиной. Известно, что математическое ожидание оценки \bar{l}_j удовлетворяет уравнению $M(\bar{l}_j) = l_j$, а дисперсия оценки \bar{l}_j (см. [1, 14]) такова:

$$M\left((\bar{l}_j - l_j)^2\right) = \frac{\sigma_j^2}{\gamma_1}.$$

Согласно центральной предельной теореме, если γ_1 велико (достаточно $\gamma_1 > 30$) и величины $l_j^k(x_0)$, $k = 1, \dots, \gamma_1$, не коррелированы, то \bar{l}_j подчиняется нормальному распределению с математическим ожиданием l_j и среднеквадратическим отклонением $\frac{\bar{\sigma}_j}{\sqrt{\gamma_1}}$. Следует заметить, что величина σ_j нам неизвестна, но приближенно (при больших γ_1) заменим ее оценкой $\bar{\sigma}_j$ и будем считать среднеквадратическое отклонение оценки \bar{l}_j равным $\bar{\sigma}_j/\sqrt{\gamma_1}$. Таким образом, можно записать оценку для l_j в виде $\bar{l}_j \pm \frac{\bar{\sigma}_j}{\sqrt{\gamma_1}}$ (см. [15]).

Итак, задавшись N (например, $N = 1$) и λ , с требуемой точностью можно найти M_j ($j = 1, \dots, l$), λ и l_j . Если найденные l_j нас не устраивают, то можно увеличить N и произвести подсчет сначала. Продолжая процесс и опираясь на тот факт, что $l_j = 1$ при $N \rightarrow \infty$, можно найти такое N , при котором $l_j = 1$.

Можно поступить несколько иначе. Для каждой из систем (1.3) найти свои N_j и M_j , удовлетворяющие условию $l_j = 1$. Тогда для любого $N > \max_j N_j$ будет обеспечено условие $l_j = 1$.

Таким образом, для случая точных траекторных измерений теорема полностью доказана.

Рассмотрим далее обобщения, для которых условия теоремы не нарушаются.

1. Пусть заданы уравнения (1.8) и вектор $z(t)$ диагностирования (1.6). В этом случае вместо функционала (1.7) можно использовать функционал

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^q (z_{ijs} - z_{is})^2, \quad q < n. \quad (1.20)$$

В поведении компонент вектора диагностирования $z(t)$ проявляется характер функций $f_j(x, t)$, $j = 1, \dots, l$; поэтому, очевидно, теорема и обусловленные ею алгоритмы диагностирования остаются справедливыми и при диагностике с помощью функционала (1.20). Доказательство теоремы для этого случая легко продублировать.

В связи с доказательством этой части теоремы сделаем два уточняющих замечания.

Замечание 1.1. Рассмотрим функционал (1.20), который запишем в следующем виде (индекс N для простоты опускаем):

$$S_j^d = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2, \quad j = 1, \dots, l, \quad q < n,$$

и аналогичный функционал

$$S_j^\Delta = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (\Delta_{ijk} - \Delta_{ik})^2,$$

в котором, подобно теореме,

$$\Delta_{ik} = |z_{ik} - z_{i-1k}|, \quad \Delta_{ijk} = |z_{ijk} - z_{i-1jk}|.$$

После возведения в квадрат и элементарных преобразований получим

$$S_j^\Delta = S_j^d + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}| \cdot | -z_{i-1jk} + z_{i-1k}|.$$

Вторая и третья суммы в выражении для S_j^Δ положительны, и из сходимости S_j^Δ следует сходимость S_j^d .

Замечание 1.2. Пусть j -я неисправность может быть диагностирована с помощью функционала S_j^d , то есть существует число M_j , такое что $S_j^d \leq M_j$ и $S_j^d > M_j$ для некоторого $J \neq j$. Покажем, что тогда эта неисправность может быть диагностирована и с помощью функционала S_j^Δ , в котором теперь $\Delta_{ik} = z_{ik} - z_{i-1k}$, с числом $\overline{M}_j = 4M_j$.

Действительно,

$$\begin{aligned} S_j^\Delta &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{i-1jk} - (z_{ik} - z_{i-1k}))^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik} - (z_{i-1jk} - z_{i-1k}))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})(z_{i-1jk} - z_{i-1k}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}| \cdot |z_{i-1jk} - z_{i-1k}| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{ijk} - z_{ik})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q (z_{i-1jk} - z_{i-1k})^2 = 4S_j^d. \end{aligned}$$

Таким образом, из сходимости S_j^d к числу, меньшему M_j , следует сходимость S_j^Δ к числу, меньшему $4M_j$, и, тем самым, диагностирование j -й неисправности.

2. Если время диагностирования τ заранее не задано, то для каждой из систем (1.3) по изложенной процедуре можно выбрать свои N_j , M_j и τ_j такие, при которых $l_j = 1$. В этом случае для любых $N > \max_j N_j$ и $\tau > \max_j \tau_j$ будет выполнено условие $l_j = 1$, т.е. диагностирование неисправностей при выбранных N и τ будет осуществляться однозначно.

Можно ставить задачу о выборе минимального τ .

3. За исходную точку начала процесса диагностирования в предыдущем выбиралась точка выхода траектории вектора контроля на поверхность контроля, т.е. сначала решалась задача о наличии неисправности, а затем задача диагностирования. Алгоритм диагностирования включался только на поверхности контроля. Нас не интересовало поведение системы внутри поверхности контроля. Траектории систем с неисправностями из априорного списка на рассматриваемом интервале времени встречаются с поверхностью контроля. Такой подход не всегда бывает эффективным способом решения задачи о наличии неисправности в системе. Это проявляется в тех случаях, когда необходимо рассматриваются неисправности, не ведущие к нарушению устойчивости системы. Траектории систем с такими неисправностями могут не выходить на поверхность контроля достаточно длительное время или не выходить на нее вообще. Поэтому в некоторых случаях целесообразно отказаться от использования поверхности контроля и строить алгоритмы непрерывной экспресс-диагностики. Суть такой диагностики состоит в том, что алгоритм диагностирования периодически включается в определенные моменты времени и работает на определенном временном интервале. Моменты включения алгоритма диагностирования и интервалы времени его работы могут вырабатываться заранее или в процессе движения объекта.

Рассмотренные выше алгоритмы диагностирования решают задачу диагностики систем управления и при непрерывной экспресс-диагностике как в случае диагностики только опорных неисправностей, так и таких, которые могут возникнуть в их окрестностях и не предусмотрены априорным списком!

4. Как уже отмечалось, набор функций $f_j(x, t)$ в (1.3) может содержать элементы с неполной информацией. Недоопределенность описания возникает в связи с тем, что законы изменения некоторых элементов в (1.3) могут отличаться от законов, предусмотренных в классе возможных неисправностей, и эти законы неизвестны.

В [1, 2, 15] даны определение и математическое моделирование окрестностей опорных неисправностей. Эти окрестности являются областями влияния опорных неисправностей в том смысле, что будут близкими траектории вектора состояния объекта с опорной неисправностью и с неисправностью, происшедшей в окрестности опорной неисправности. Если окрестности опорных неисправностей для данного датчика пересекаются, то большее влияние на неисправность, происшедшую в области пересечения окрестностей, будет у той опорной неисправности, у которой наблюдается большая близость траекторий.

В этом смысле не предусмотренные опорным списком неисправности, происшедшие в окрестностях опорных неисправностей, можно с помощью рассмотренных алгоритмов диагностировать как опорные неисправности. Алгоритмы не выявят конкретно происшедшую неисправность, а диагностируют одну из опорных неисправностей, в достаточно малой окрестности которой произошла конкретная неисправность.

5. Рассмотрим другие функционалы, близкие к (1.7) и решающие задачу диагностирования динамических управляемых систем в аналогичных или несколько отличных от уже рассмотренных условиях.

Предположим, что произошла неисправность, траектория вышла на поверхность контроля π_k и далее, в течение времени τ получены значения x_0, x_1, \dots, x_N . Надо проверить полную систему l возможных ситуаций: j -я ситуация ($j = 1, \dots, l$) — это утверждение о том, что траектория $x(t)$ есть траектория j -й системы (1.2), т.е. $x \equiv x_j$ при условии $x_{0j} = x_0$.

Рассмотрим следующие l функционалов $\Delta_1 x_j, \dots, \Delta_N x_j$ (см. (1.11)) от x_0, x_1, \dots, x_N :

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n |x_{ik} - x_{i-1k} - \Delta_i x_{jk}|^2, \quad j = 1, \dots, l, \quad (1.21)$$

где $\Delta_i x_{jk}$ — приращение решения j -й системы (1.2) от начального значения x_{i-1} на отрезке времени

$$\frac{(i-1)\tau}{N} \leq t \leq \frac{i\tau}{N}.$$

Смысл функционала (1.21) состоит в следующем. Проверяя j -ю возможную ситуацию на каждом шаге, происходит сравнение (в смысле квадратического отклонения) действительных и ожидаемых приращений x , т.е. S_j^N характеризует среднеквадратическое отклонение ожидаемой траектории от траектории, реализующейся в действительности. Иначе говоря, с помощью функционала (1.21) осуществляется сравнение полей направления действительной и ожидаемых траекторий динамической управляемой системы (1.1).

Функционалы (1.7), (1.12) и (1.21) близки между собой, удовлетворяют условиям предельной теоремы диагностирования и, с помощью вытекающих из нее алгоритмов, конструктивно решают задачу диагностики динамических управляемых систем в случае достаточной малости ошибок траекторных измерений.

Сказанное распространяется и на случай меньшей размерности вектора диагностирования (1.6), т.е. на случай, когда

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}|^2, \quad q < n, \quad (1.22)$$

или

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ik} - z_{i-1k} - \Delta_i z_{jk}|^2, \quad q < n, \quad (1.23)$$

поскольку компоненты вектора диагностирования несут достаточную информацию о характере функций f_j , $j = 1, \dots, l$, в правых частях уравнений (1.2).

Суммируемые разности в функционалах (1.7), (1.12) и (1.21)–(1.23) в случае достаточно малых расхождений действительной и ожидаемой траекторий могут оказаться малыми. Это усиливается квадратичной формой рассматриваемых функционалов. В некоторых случаях поэтому целесообразно иметь дело с видоизмененным функционалом. Выпишем такой функционал, сохранив прежнее обозначение, для случая (1.21):

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n |x_{ijk} - x_{i-1k} - \Delta_i x_{jk}|^2, \quad j = 1, \dots, l. \quad (1.24)$$

Отметим, однако, следующее. В (1.24) фактически осуществляется численное дифференцирование измеренных значений на каждом шаге и суммирование модулей отклонений. Даже если ошибки измерений (шумы) малы, при суммировании модулей отклонений может получиться значительная случайная ошибка.

Вместо сумм (1.24), в которых производится суммирование модулей полей направлений, рассмотрим суммы самих отклонений

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n (\bar{x}_{ik} - \bar{x}_{i-1k} - \Delta_i x_{jk}), \quad (1.25)$$

где \bar{x} — измеренные значения действительной (в дальнейшем обозначается индексом g) траектории динамической управляемой системы.

Функционал (1.25), как будет показано далее, с точностью до малых ошибок сводится к интегралу по траекториям

$$J_{gj} = \int_{\tau_0}^{\tau} (f_g(x(t)) - f_j(x(t))) dt, \quad (1.26)$$

и разделение траекторий с помощью функционала (1.25) будет осуществляться однозначно.

В дальнейшем перейдем к более детальной оценке погрешности метода полей направлений в случае траекторных измерений с ошибкой.

В заключение настоящего раздела отметим, что можно в функционалах использовать нормированные величины. Например (см. (1.20)),

$$S_j^N = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q |z_{ijk} - z_{ik}|^2 \frac{1}{z_{ik}^2}.$$

Исходя из вышесказанного, можно сформулировать расширенную постановку задачи диагностирования, решение которой осуществимо с помощью предложенных алгоритмов.

Рассмотрим управляемый объект, движение которого описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$x' = F(x, u, t) = f_0(x, t), \quad x_0 \in X^0, \quad (1.27)$$

где x — n -мерный вектор, характеризующий отклонение системы от режима, предписанного целью управления, X^0 — ограниченное множество начальных условий. Относительно управлений $u(t) = \|u_\nu(t)\|_{\nu=1}^m$ будем предполагать, что они принимают значения из ограниченной замкнутой области U , т.е.

$$u(t) \in U. \quad (1.28)$$

Цель управления будет формализоваться тождеством

$$x(t) \equiv 0. \quad (1.29)$$

Рассмотрим далее функцию Ляпунова $\nu(x, t) > 0$ и пару

$$\{\nu(x, t); u(x, t)\}. \quad (1.30)$$

Пара (1.30) позволяет синтезировать допустимое управление (1.28), доставляющее асимптотическую устойчивость решению (1.29) нелинейной системы (1.27).

Пусть известен конечный набор

$$H = \|H_j\|_{j=1}^l \quad (1.31)$$

возможных опорных невырожденных неисправностей в системе управления объектом (1.27) и, стало быть, известен соответствующий набор функций управления

$$u = \|u_j\|_{j=1}^l. \quad (1.32)$$

Функции (1.32) не изменяют фазового пространства системы (1.27), отличаются той или иной неисправностью (1.31) и не обязательно удовлетворяют в области параметров системы (1.27) условиям асимптотической устойчивости решения (1.29), определяемые функцией $\nu(\nu, t)$ в (1.30). Управления (1.32) могут не принадлежать (1.28).

Конечному набору управлений (1.32) поставим в соответствие набор систем дифференциальных уравнений

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 1, \dots, l, \quad (1.33)$$

где $f_j(x, t)$ — соответствующие неисправностям (1.31) известные вектор-функции размерности $(n \times 1)$, отличные друг от друга и от функции $f_0(x, t)$ в (1.27). Модели (1.27) и (1.33) принадлежат одному фазовому пространству и отличаются лишь структурой. Если в заранее неизвестный момент времени функция $f_0(x, t)$ в правой части уравнения (1.27) заменяется на одну из функций $f_j(x, t)$ из (1.33), то траектория системы (1.27) непрерывно продолжается одной из траекторий систем (1.33).

Объединим уравнения (1.27) и (1.33):

$$x' = f_j(x, t), \quad x_0 \in X^0, \quad j = 0, \dots, l. \quad (1.34)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$z(t) = (x_{d_1}, \dots, x_{d_q}) \equiv (z_1, \dots, z_q), \quad q = 1, \dots, n, \quad (1.35)$$

компоненты которого являются измеряемым подмножеством компонент фазового вектора состояния системы $x(t)$ и, в соответствии с (1.35), функционал

$$S^j = \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{s=1}^q (z_{ijs} - z_{is})^2, \quad q = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, l, \quad (1.36)$$

где z_{ijs} — значение s -й компоненты вектора $z(t)$ в момент $t_i = 1, \dots, N_j$, полученное в результате интегрирования системы (1.34) с f_j в правой части, z_{is} — значение s -й компоненты вектора $z(t)$, измеренное в момент времени t_i , N_j — минимальное число измерений компонент вектора $z(t)$, необходимое и достаточное (для данного шага h интегрирования j -й системы (1.34) для диагностирования j -й неисправности).

Расширенную задачу диагностирования можно сформулировать следующим образом.

Пусть известны невырожденные уравнения (1.33), поверхность контроля π_k , некоторое функциональное состояние системы $x(\tau_0)$ в момент τ_0 выхода ее траектории на поверхность контроля, структура вектора (1.35) и функционала (1.36). Требуется выбрать вектор $z(t)$, содержащий минимальное подмножество измеряемых компонент фазового вектора состояния $x(t)$ и такой, чтобы с помощью функционала

$$S_j = \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^q (z_{ijs} - z_{is})^2, \quad N = \max_j N_j, \quad (1.37)$$

любая возникшая неисправность из априорного опорного списка (1.31) или происшедшая в ее окрестности $O = \|O_j\|_{j=1}^l$ и обусловившая выход вектора контроля $z(t)$ на поверхность контроля π_k , была однозначно диагностирована как одна из функций f_j в (1.33), т.е. номер j функции f_j в

правой части уравнений (1.31) (вне зависимости от того, какая неисправность произошла: предусмотренная опорным списком или в его окрестности) был однозначно определен за минимально возможное время $\tau - \tau_0$.

Иначе говоря, после выхода фазовой траектории системы в момент времени τ_0 на поверхность контроля π_k путем последующего слежения за внешней траекторией системы с помощью функционала (1.37) возникшие неисправности из заданного списка и их окрестностей должны быть однозначно диагностированы за минимально возможное время τ .

При реализации непрерывной экспресс-диагностики необходимо вместо уравнений (1.33) рассматривать уравнения (1.34).

В проведенном вычислительном эксперименте на электронно-вычислительной машине показана реализация решения расширенной задачи диагностирования.

Перейдем теперь к более детальной оценке погрешности метода полей направлений в случае траекторных измерений с ошибкой.

2. СЛУЧАЙ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С ОШИБКОЙ

До сих пор рассматривалась задача диагностики систем управления для случая точных траекторных измерений. На практике решение задачи контроля и поиска неисправностей сопровождается наличием случайных возмущений и, в частности, случайных возмущений, накладываемых на вектор диагностирования, который формируется из измеряемых координат вектора состояния. Задача контроля для случая траекторных измерений с шумом сформулирована и решена в [1, 2] с достаточной полнотой. Сформулируем некоторые промежуточные результаты, которые показывают, что и задача диагностирования в случае траекторных измерений с шумом может быть решена однозначно. Сначала, в рамках теоремы диагностирования (см. [1, 15, 16]), дадим оценку погрешности в случае траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю.

Полученные оценки справедливы и в случае, если в рассмотрение вводится вектор диагностирования $z(t)$, составленный из измеряемых координат вектора состояния.

Мы не будем останавливаться на доказательстве полученных оценок при выборе числа измерений фазовых траекторий на интервале времени $[0, \tau]$: это сравнительно просто можно сделать в рамках доказательства теоремы диагностирования. Сразу перейдем к рассмотрению общего подхода в диагностике в случае траекторных измерений с шумом.

Рассмотрим несколько видоизмененный функционал (1.23), который для простоты запишем в виде

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N |\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1} + \Delta_i x_j|, \quad j = 0, \dots, l, \quad (2.1)$$

где $\Delta_i x_j$ описывается общей одношаговой формулой

$$\Delta_i x_j = h \Phi_j(\bar{x}_{i-1}, h) \quad (2.2)$$

и, как наиболее простой, формулой Эйлера

$$\Phi_j(\bar{x}_{i-1}, h) = f_j(\bar{x}_{i-1}). \quad (2.3)$$

Для измеренных значений введем обозначения

$$\bar{x}(t) = x(t) + \xi(t), \quad (2.4)$$

где $x(t)$ — действительное положение системы в момент времени t , а $\xi(t)$ — ошибки измерений, ограниченные по модулю заданными функциями времени $\zeta(t)$:

$$|\xi(t)| \leq \zeta(t). \quad (2.5)$$

В соответствии с (2.2)–(2.4) составим суммы (2.1) в виде

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N \left| x_i - x_{i-1} + \xi_i - \xi_{i-1} - h f_j(x_{i-1} + \xi_{i-1}) \right|. \quad (2.6)$$

В выражении (2.6) функции f_j , $j = 0, \dots, l$, разложим в ряд

$$f_j(x_{i-1} + \xi_{i-1}) = f_j(x_{i-1}) + \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \xi_{i-1}, \quad (2.7)$$

где ξ_{i-1}^* лежит на отрезке прямой, соединяющей точки x_{i-1} и $x_{i-1} + \xi_{i-1}$.

Сумму (2.6) с учетом (2.7) запишем в виде

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N \left| x_i - x_{i-1} - h f_j(x_{i-1}) + \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right|, \quad (2.8)$$

где E — единичная матрица.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением формулы Эйлера (2.3). Учтем следующее приближение в разложении в ряд Тейлора и оценим его влияние на сумму (2.8), то есть оценим долю произведенного выше усечения. Имеем:

$$x_i - x_{i-1} = h f_g(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2} f'_g(x(t)) \Big|_{t=t_i^*}, \quad (2.9)$$

где t_i^* — некоторая точка между t_{i-1} и t_i .

Подставим (2.9) в (2.8). Тогда

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N \left| h \left(f_g(x_{i-1}) - f_j(x_{i-1}) \right) + \frac{h^2}{2} f'_g(x(t)) \Big|_{t_i^*} + \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right|. \quad (2.10)$$

Рассмотрим далее два случая.

1. Пусть j совпадает с действительным функциональным состоянием рассматриваемого объекта, т.е. $j = g$. В этом случае

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^N \left| \frac{h^2}{2} f'_g(x(t)) \Big|_{t_i^*} + \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right|. \quad (2.11)$$

Функции f_j дифференцируемы и имеют все непрерывные частные производные при любом $j = 0, \dots, l$. Поэтому, используя теорему о дифференцировании сложной функции, учитывая определение нормы матрицы и линейность отображения, задаваемого матрицей, получим следующую оценку для величины $|f'_g(x(t))|$:

$$\left| \frac{df_g(x(t))}{dt} \Big|_{t_i^*} \right| = \left| \frac{\partial f_g}{\partial t} \Big|_{x_i^*} \right| = \left| \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{x_i^*} f_g(x_i^*) \right| \leq \max_{x \in D^*} \left(\left| \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_x \right| |f_g(x)| \right) \leq L_g < \infty$$

и оценку для члена, представляющего ошибку усечения:

$$\left| \frac{h^2}{2} f'_g(x(t)) \Big|_{t_i^*} \right| \leq \frac{h^2}{2} L_g. \quad (2.12)$$

Здесь x_i^* — некоторая точка траектории, соответствующая моменту времени $t = t_i^*$, D^* — замкнутая область, содержащая все отрезки траектории от τ_0 до τ ,

$$L_g = \max_{x \in D^*} |f'_g(x)|.$$

Дадим теперь оценку ошибки измерения. Так как величины $|f_g|$ и $\|\partial f_g / \partial x\|$ ограничены в D^* , то ошибка измерения оценивается следующим образом:

$$\left| h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right| \leq h \left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\|_{D^*} \xi_{i-1} \leq h l_g \zeta_{\max}, \quad \zeta_{\max} = \max_{[0, \tau]} \zeta(t). \quad (2.13)$$

Максимум

$$l_g = \max_{x \in D^*} \left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\|$$

существует, так как D^* — замкнутая область и f_g — регулярная функция. Во всяком случае,

$$\left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\| \leq \sqrt{\sum_{k,p} \left| \frac{\partial f_{gk}}{\partial x_p} \right|^2}.$$

В силу (2.13) будет ограниченной ошибка одного шага измерения

$$\begin{aligned} \left| \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right| &\leq |\xi_i| + \left| \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right| \leq \\ &\leq |\xi_i| + |\xi_{i-1}| + hl_g \zeta_{\max} \leq 2\zeta_{\max} + hl_g \zeta_{\max}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В силу (2.12) и (2.14) получим оценку суммы (2.11) (так как $Nh = \tau$):

$$S_{gj} \leq N \frac{h^2}{2} L_g + 2N\zeta_{\max} + Nhl_g \zeta_{\max} = \frac{\tau}{2} L_g h + 2\tau \zeta_{\max} \frac{1}{h} + \tau l_g \zeta_{\max}. \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что в рассматриваемом случае $S_{gj} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$ из-за накопления модулей ошибки измерения, а при $h \rightarrow 0$ слагаемое $\tau l_g \zeta_{\max}$ ошибки измерения составляет все меньшую и меньшую часть S_{gj} .

2. Пусть номер системы j не совпадает с действительным функциональным состоянием объекта, то есть $j \neq g$. В этом случае, в соответствии с (2.10),

$$\left| h \left(f_g(x_{i-1}) - f_j(x_{i-1}) \right) + \frac{h^2}{2} f'_g(x) \Big|_{t_i^*} \right| \leq hL_{gj} + \frac{h^2}{2} L_g$$

и, значит,

$$S_{gj} \leq NhL_{gj} + N \frac{h^2}{2} L_g + 2N\zeta_{\max} + Nhl_g \zeta_{\max} = \tau L_{gj} + \frac{\tau}{2} L_g h + 2\tau \zeta_{\max} \frac{1}{h} + \tau l_g \zeta_{\max}, \quad (2.16)$$

где

$$L_{gj} = \max_{x \in D^*} |f_g(x) - f_j(x)|.$$

Таким образом, и в этом случае за счет накопления ошибки измерения в (2.16) величина $S_{gj} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$. Ошибка усечения в случае $j \neq g$ стремится к $\tau(L_{gj} + l_g \zeta_{\max})$.

Так как ошибка измерения стремится к ∞ при $N \rightarrow \infty$, а ошибка усечения при $N \rightarrow \infty$ составляет все меньшую и меньшую часть S_{gj} , то при $h \rightarrow 0$ вероятность разделения действительной траектории объекта с происшедшей неисправностью и траекторий j систем стремится к нулю.

Возникает задача о выборе такого наименьшего $h = h^*$, при котором еще возможно разделение траекторий. В соответствии с (2.15),

$$\min_h S_{gj} = \min_h \tau \left(\frac{1}{2} L_g h + 2 \frac{\zeta_{\max}}{h} + l_g \zeta_{\max} \right) = \tau \left(\sqrt{\frac{\zeta_{\max}}{L_g}} + \sqrt{\frac{L_g}{\zeta_{\max}} + l_g \zeta_{\max}} \right)$$

достигается при

$$h = \bar{h} = 2 \sqrt{\frac{\zeta_{\max}}{L_g}}.$$

Значение наилучшего $N = N^*$ будет, соответственно, равно

$$N = \bar{N} = 2\tau \sqrt{\frac{L_g}{\zeta_{\max}}}.$$

Таким образом, и в случае траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю известной функцией времени, можно для каждого $j = 1, \dots, l$, в соответствии с (2.1), найти такие величины

$$S_{gj}, \quad M_j^* = \max_{x_0^j \in \pi_k^j} S_{gj}, \quad h_j^* = \min_h S_{hj}, \quad N_j^*, \quad \tau_j^*,$$

что траектории систем с номерами $j = 1, \dots, l$ с помощью алгоритмов диагностирования, сформулированных в [15, 16], будут разделяться однозначно.

Вместо сумм (2.1), в которых производится суммирование модулей отклонений полей направлений, будем рассматривать суммы самих отклонений. Составим следующие суммы:

$$\begin{aligned} S_{gj} &= \sum_{i=1}^N \left(\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1} - hf_j(\bar{x}_{i-1}) \right) = (\bar{x}_N - \bar{x}_0) - \sum_{i=1}^N hf_j(\bar{x}_{i-1}) = \\ &= (x_N - x_0) + (\xi_N - \xi_0) - \sum_{i=1}^N h \left(f_j(x_{i-1}) + \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right) = \\ &= \left(x_N - x_0 - \sum_{i=1}^N hf_j(x_{i-1}) \right) + \left(\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^N h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Величина $\sum_{i=1}^N hf_j(x_{i-1})$ в (2.17) есть интегральная сумма. Разлагая ее на каждом из интервалов времени $[t_{i-1}, t_i]$ в ряд Тейлора и затем суммируя, получим

$$\sum_{i=1}^N hf_j(x_{i-1}) = \int_{\tau_0}^{\tau} f_j(x(t)) dt - \sum_{i=1}^N \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^*),$$

где x_{i-1}^{**} — набор некоторых N «средних точек».

Следовательно, возвращаясь к (2.17), получим

$$\begin{aligned} S_{gj} &= \left(x_N - x_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} f_j(x(t)) dt + \sum_{i=1}^N \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^*) \right) + \left(\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^N h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right) = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau} \left(f_g(x(t)) - f_j(x(t)) \right) dt + \sum_{i=1}^N \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^*) + \left(\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^N h \frac{\partial f_j}{\partial x} \Big|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Так как $|f_j|$ и $\|\partial f_j/\partial x\|$ ограничены, то ошибка усечения (в случае $j = g$) в (2.18) стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, а ошибка измерения ограничена. Ошибка измерения с уменьшением h (так же, как и с уменьшением N) будет уменьшаться.

При $j \neq g$ ошибка измерения остается того же порядка, ошибка усечения при $h \rightarrow 0$ стремится к

$$I_{gj} = \int_{\tau_0}^{\tau} \left(f_g(x(t)) - f_j(x(t)) \right) dt. \quad (2.19)$$

Таким образом,

$$S_{gj} = I_{gj} + \bar{\zeta}.$$

Если $I_{gj} \gg \bar{\zeta}$, то разделение траекторий с помощью функционала (2.19) и сформулированных ранее алгоритмов будет осуществляться однозначно.

Рассмотрим далее случай траекторных измерений с шумом. До сих пор предполагалось, что ошибка измерения $\xi(t)$ в (2.4) ограничена по модулю заданной функцией времени (2.5). Предположим теперь, что эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с дисперсией σ^2 . Оценим дисперсию случайной ошибки измерения:

$$\begin{aligned} D \left(\xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right) &= D \xi_i + D \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \leq \\ &\leq \sigma^2 + \sigma^2 (1 + hl_g)^2 \geq 2\sigma^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Таким образом, средняя ошибка одного шага измерения имеет порядок $\sigma\sqrt{2}$. Учитывая (2.12) и (2.20), можно провести следующую оценку:

$$S_{gg} \leq \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1} - hf_g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^N \left| \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right| \cong \\ \cong N \left(\frac{h^2}{2} L_g + \sigma\sqrt{2} \right) = \tau \left(\frac{1}{2} L_g h + \frac{1}{h} \sigma\sqrt{2} \right). \quad (2.21)$$

Выражение (2.21) показывает, что $S_{gg} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$.

В случае $j \neq g$, в соответствии с (2.10), можно провести оценку следующего вида:

$$S_{gj} \cong NhL_{gj} + N \frac{h^2}{2} L_g + N\sigma\sqrt{2 + 2hl_g + h^2 l_g^2} = \tau L_{gj} + \frac{1}{2} \tau h L_g + \frac{1}{h} \tau \sigma \sqrt{2 + 2hl_g + h^2 l_g^2}. \quad (2.22)$$

Таким образом, и в этом случае за счет накопления случайной ошибки измерения $S_{gj} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$.

Ошибка усечения при этом стремится к τL_{gj} . Так как средняя ошибка измерения стремится к бесконечности при $N \rightarrow \infty$, а ошибка усечения при $N \rightarrow \infty$ составляет все меньшую и меньшую часть S_{gj} , то при $h \rightarrow 0$ вероятность разделения траекторий систем стремится к нулю.

Выберем такое наименьшее $h = h^*$, при котором еще возможно разделение траекторий. Оценим порядок наилучшего $h = h^*$. Минимум

$$S_{gg} \cong \min_h \tau \left(\frac{h}{2} L_g + \frac{1}{h} \sigma\sqrt{2} \right) = \tau \sqrt{2\sqrt{2}\sigma L_g}$$

достигается при

$$h = h^* \cong \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\sigma}{L_g}}.$$

Соответственно, порядок наилучшего N таков:

$$N = N^* \cong \tau \sqrt{\frac{L_g}{2\sqrt{2}\sigma}}.$$

Таким образом, дана оценка для наилучших значений $h = h^*$, $N = N^*$ и, значит, $\tau = \tau^*$. Если при этих наилучших значениях ошибка усечения достаточно мала, то диагностика неисправностей с помощью функционалов (2.1) и, значит, функционалов (2.8) в случае траекторных измерений с шумом позволяет получить в некотором смысле наилучший апостериорный набор возникших неисправностей.

Если раньше, как показано в случае точных траекторных измерений, пользуясь в алгоритмах диагностирования константами M_j или S_g , мы не могли отбросить верную гипотезу, то в случае траекторных измерений с шумом при любом выборе констант алгоритма диагностирования всегда будет существовать такая возможность.

Зададимся достаточно малой ненулевой допустимой вероятностью ε . Для разделения траекторий выберем константы M_j такие, что для любой траектории j -й системы

$$P\{S_{jj} \geq M_j\} < \varepsilon.$$

Иначе говоря, вероятность ложного срабатывания должна находиться в допустимых границах. При этом в случае траекторных измерений с шумом будем пользоваться теми же алгоритмами диагностирования, что и в случае точных траекторных измерений.

Перейдем теперь к рассмотрению метода интегралов в случае траекторных измерений с шумом. Как уже отмечалось, ошибка усечения в (2.18) ($j = g$) не превосходит $\tau \frac{h}{2} L_g$, и эта ошибка стремится к нулю при $h \rightarrow 0$. Средняя ошибка обусловлена суммой

$$h \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_g}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-1}^*} \xi_{i-1}$$

и, по теореме о сложении дисперсий независимых случайных величин, будет меньше или равна $h\sigma\sqrt{N}l_g$, а, следовательно, средняя ошибка измерения не будет превышать величины

$$\sigma\sqrt{2} + h\sigma\sqrt{N}l_g = \sigma\sqrt{2} + \sigma\sqrt{\tau h}l_g \quad (2.23)$$

и будет стремиться к $\sigma\sqrt{2}$ при $h \rightarrow 0$.

Формула (2.23) показывает, что средняя ошибка измерения зависит от постоянного слагаемого $\sigma\sqrt{2}$ и от $\sigma\sqrt{\tau h}l_g$. С уменьшением h ошибка, обусловленная шумом, уменьшается, и можно ожидать, что при

$$h < \frac{1}{\tau l_g^2}$$

будут достигаться достаточно хорошие результаты по разделению систем.

В случае $j \neq g$, как показывает выражение (2.18) для S_{gj} , ошибка измерения остается того же порядка, а ошибка усечения при $h \rightarrow 0$ стремится к интегралу (2.19). При $N \rightarrow \infty$ величина $S_{gg} \rightarrow \bar{\zeta}$, где $\bar{\zeta}$ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с дисперсией $2\sigma^2$, а $S_{gj} \rightarrow I_{gj} + \bar{\zeta}$. Если I_{gj} значительно больше дисперсии случайной величины $\bar{\zeta}$, то разделение траекторий систем с помощью интеграла (2.19) в случае траекторных измерений с шумом будет осуществляться с высокой точностью. Константы M_j могут быть найдены, исходя из условия

$$P\{|S_{jj}| \geq M_j\} < \varepsilon.$$

3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ

В предыдущем разделе, в рамках доказательства предельной теоремы, была показана возможность диагностики динамических управляемых систем в случае траекторных измерений с ошибкой ограниченной по модулю заданной функцией времени и в случае, если эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с дисперсией σ^2 . Показано, что в этих случаях можно указать «наилучшее» число необходимых траекторных измерений, при которых возможно разделение траекторий неисправных систем, то есть точное определение происшедшей в системе неисправности.

Покажем теперь, что с помощью предложенных алгоритмов можно осуществить диагностику динамических управляемых систем в случае траекторных измерений с шумом, исходя из более общих вероятностных представлений (см. [15]).

В соответствии с (1.2) рассмотрим уравнения

$$x' = f_j(x, t), \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.1)$$

Предположим, что в момент $t = 0$ произошла j -я неисправность, т.е. в правой части (3.1) присутствует одна из функций $f_j(x, t)$, причем это может быть любая f_j , $j = 1, \dots, l$, с равной вероятностью.

Предположим, что доступен наблюдению вектор

$$z(t) = x(t) + \xi(t),$$

где $x(t)$ — вектор состояния системы, а $\xi(t)$ — случайный процесс типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром $W(\omega)$:

$$W(\omega) = \begin{cases} M_0, & |\omega| \leq \Delta; \\ 0, & |\omega| > \Delta. \end{cases} \quad (3.2)$$

Величина $\xi(t)$ является ошибкой измерения вектора состояния системы $x(t)$.

На основе анализа наблюдаемого суммарного сигнала $z(t)$ можно вычислить распределение $P_z(x)$ для всех возможных значений сигнала $x(t)$. Распределение $P_z(x)$ называют распределением обратных вероятностей, так как оно указывает на то, каковы вероятности тех или иных значений причины x , если известно вызванное этой причиной следствие z .

На основе анализа этого распределения принимается решение о том, каково было значение сигнала $x(t)$, т.е. в нашем случае — каков был номер правой части системы (3.1), решением которой является вектор x . Будем обозначать решение системы (3.1) с правой частью $f_j(x, t)$ буквой x

с индексом j . Номер j может быть определен, например, на основе принципа максимальной обратной вероятности, т.е. в качестве j принимается номер решения x_j , для которого вероятность $P_z(x_j)$ имеет наименьшее значение.

Вероятность $P_z(x)$ находится из соотношений

$$P(x, z) = P(x)P_x(z) = P(z)P_z(x),$$

где $P(x, z)$ — совместная вероятность двух случайных функций x и z , $P_x(z)$ — условная вероятность z при заданном x , $P(z)$ — безусловная вероятность z . Тогда, заменяя $1/P(z)$ на постоянную K (так как нас интересует зависимость $P_z(x)$ при данном измеренном z), получим

$$P_z(x) = KP(x)P_x(z).$$

Постоянная K определяется из условия нормировки

$$\int_{A_x} P_z(x) dx = 1,$$

где A_x — область всех возможных значений x .

Величины $P(x) = P(x_j) = 1/l$ (где l — число возможных правых частей (3.1)) априорно известны. Требуется найти зависимость $P_x(z)$ от x при данном измеренном z .

При данном $x_j(t)$ вероятность реализации $z(t)$ равна вероятности реализации $\xi_j(t) = z(t) - x_j(t)$. Считая $\xi_j(t)$ и $x_j(t)$ статистически независимыми, получим

$$P_x(z) = F(\xi_j) = \frac{1}{(2\pi M)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} \xi_j^2(t) dt \right\}.$$

Здесь $M_0 = M/(2\Delta)$ — единичная интенсивность шума (3.2), M — средняя интенсивность, $N = [\Delta(\tau - \tau_0)]$ (квадратные скобки в данном случае означают взятие целой части числа), где Δ — ширина спектра, $\tau - \tau_0$ — время определения номера j (время диагностирования).

Таким образом,

$$P_x(z) = \frac{1}{(2\pi M)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \right\}.$$

Тогда

$$P_z(x_j) = \frac{K}{l} \frac{1}{(2\pi M)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \right\}. \quad (3.3)$$

В силу того, что K и l постоянны, величина $(2\pi M)^N$ в (3.3) при конкретном $\xi(t)$ и заданном $\tau - \tau_0$ также постоянна; нахождение максимума обратной вероятности сводится к нахождению максимума величины

$$\exp \left\{ -\frac{1}{M_0} \int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \right\}$$

или, что то же самое, к нахождению минимума

$$\int_{\tau_0}^{\tau} (z(t) - x_j(t))^2 dt \quad (3.4)$$

(так как $M_0 = \text{const}$ при фиксированных M и Δ).

При помощи теоремы Котельникова о разложении случайной функции величина (3.4) может быть сведена от интеграла к сумме.

Действительно, так как время диагностирования $\tau - \tau_0$ задано и характеристики шума $\xi(t)$ известны (в частности, известна ширина спектра Δ), то по теореме Котельникова (см. [14, 15]) существует такое число $N = [\Delta(\tau - \tau_0)]$, что N значений $\xi_j(t_i)$, $i = 1, \dots, N$, $t_i = i/\Delta$, являются некоррелированными (а при нашем предположении о нормальности белого шума и статистически

независимыми) координатами процесса $\xi_j(t)$, и на конечном интервале времени (τ_0, τ) применимо разложение вида

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \xi_j^2(t) dt = \sum_{i=1}^N \xi_j^2(t_i). \quad (3.5)$$

Моменты времени t_i в (3.5) являются моментами измерений вектора $z(t)$ в процессе функционирования системы. Для тех же моментов времени t_i в бортовом вычислителе по модели объекта вычисляются все векторы состояний \bar{x}_j , $j = 1, \dots, l$. Решающее правило определения номера j правой части (3.1) сформулируем теперь следующим образом.

На интервале времени (τ_0, τ) для всех возможных значений номеров j правой части (3.1) формируются суммы

$$S_j = \sum_{i=1}^N (z(t) - \bar{x}_j(t))^2. \quad (3.6)$$

Число j , для которого значение S_j минимально, указывает номер правой части (3.1), т.е. номер случившейся в системе неисправности.

Таким образом, в результате статистического решения задачи дифференциальной диагностики при траекторных измерениях с шумом получен алгоритм диагностики, аналогичный алгоритму, который влечет теорема 1.1, а также функционал диагностики (3.6), который в теореме вводился априори, то есть получено замкнутое детерминированное решение задачи дифференциальной диагностики: получен функционал, решающий задачу, и указано правило его минимизации.

Полученный алгоритм верен и в случае, если вектор $z(t)$ содержит подмножество $d < n$ измеряемых координат фазового вектора состояния $x(t)$, несущее информацию о характере функций $f_j(x, t)$, $j = 1, \dots, l$, в правых частях уравнений (3.1).

Если динамическая управляемая система подвержена внутренним и внешним воздействиям шумов, и математическая модель движения этой системы так или иначе описывает эти шумы, то диагностика управления такой системой также может быть осуществлена с помощью полученного алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что в случае траекторных измерений с ошибкой предельная теорема перестает быть справедливой, однако при этом можно указать такое «наилучшее» число необходимых траекторных измерений координат вектора диагностирования, при котором предложенные функционал и алгоритм диагностирования работают и позволяют однозначно идентифицировать неисправности, возникающие в условиях шумов.

Исходя из более общих представлений, показано, что в случае траекторных измерений с шумом диагностика неисправностей осуществима и сводится к предлагаемому функционалу и алгоритму диагностирования (см. [18]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисенко И. Т.* К вопросу о дифференциальной теории восстановления. Некоторые вопросы управления и устойчивости механических систем // Науч. тр. Ин-та механики МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: Изд-во МГУ, 1973. — № 22. — С. 101–108.
2. *Борисенко И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундам. прикл. мат. — 1999. — 5, № 3. — С. 775–790.
3. *Борисенко И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
4. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автомат. телемех. — 1994. — № 3. — С. 24–36.
5. *Корноушенко Е. К., Пылаев Н. К.* Передаточные числа и диагностирование линейных систем // Докл. АН СССР. — 1988. — 300, № 3. — С. 559–561.
6. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование линейных динамических систем // Автомат. телемех. — 1979. — № 8. — С. 120–128.

7. *Окунев Ю. М., Парусников Н. А.* Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
8. *Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В.* Диагностика некоторой системы прямого управления из теории летательных аппаратов// Междунар. конф. «Области применения и новые технологии преподавания математики и ИКТ»/ Гянджа, Азербайджан, 5-6 июня 2014 г. — Гянджа, 2014. — Ч. I. — С. 18–22.
9. *Чикин М. Г.* Системы с фазовыми ограничениями// Автомат. телемех. — 1987. № 10. — С. 38–46.
10. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2007.
11. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электрон. модел. — 2009. — 31, № 1. — С. 97–115.
12. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электрон. модел. — 2009. — 31, № 3. — С. 73–90.
13. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электрон. модел. — 2009. — 31, № 4. — С. 55–66.
14. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электрон. модел. — 2010. — 32, № 1. — С. 45–52.
15. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электрон. модел. — 2010. — 32, № 5. — С. 31–44.
16. *Шамолин М. В.* Диагностика гиросtabilизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электрон. модел. — 2011. — 33, № 3. — С. 121–126.
17. *Шамолин М. В., Шебаршов Д. В.* Методы решения основной задачи дифференциальной диагностики/ Деп. в ВИНТИ 12.05.99, № 1500-В99. — М., 1999.
18. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — 114, № 1. — С. 976–1024.

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru