М. В. Шамолин, Случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерной сферы, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2018, том 150, 78–87

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 150 (2018). С. 78–87

УДК 517.933

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЫ

© 2018 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих как в динамике многомерного твердого тела, так и в динамике точки, движущейся по многомерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним и обобщают ранее рассмотренные. Приводятся примеры использования методики интегрирования диссипативных систем для систем на касательном расслоении к двумерным поверхностям вращения.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

AMS Subject Classification: 70G60

Введение. В динамике систем со многими степенями свободы часто возникают системы, пространства положений которых являются сферами конечной размерности, а фазовые пространства, следовательно, — касательные расслоения к этим сферам. Так, например, изучение n-мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [17, 19]).

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики свободного n-мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле также породили системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом исследование проводилось начиная с систем при отсутствии силового поля и продолжалось системами при наличии неконсервативных силовых полей с дополнительными группами симметрий (см. [14, 19]).

Построение неконсервативного силового поля, действующего на многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных твердых тел, находящихся, в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля (ср. с [1, 2, 8, 15, 16, 22]).

Естественным образом в рассматриваемый класс задач помещается классическая задача о движении материальной точки по поверхности многомерной сферы, вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [4, 5]).

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих как в динамике многомерного твердого тела, так и в динамике точки, движущейся по многомерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним и являются обобщением ранее рассмотренных случаев.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00848-а).

ISSN 0233–6723

1. Системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. Рассмотрим следующую систему (1), (2) порядка $2(n-1)$:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_{n-1} + bg(\alpha), \\ \dot z_{n-1} = F(\alpha) - \left(z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2\right) f(\alpha), \\ \dot z_{n-2} = z_{n-2} z_{n-1} f(\alpha) + \left(z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2\right) f(\alpha), \\ \dot z_{n-3} = z_{n-3} z_{n-1} f(\alpha) - z_{n-3} z_{n-2} f(\alpha) \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \left(z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2\right) f(\alpha) \dfrac{1}{\sin\beta_1} \dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot z_1 = z_1 f(\alpha) \left\{ \displaystyle\sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} z_{n-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dot\beta_1 = z_{n-2} f(\alpha), \\ \dot\beta_2 = -z_{n-3} f(\alpha) \dfrac{1}{\sin\beta_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot\beta_{n-2} = (-1)^{n+1} z_1 f(\alpha) \dfrac{1}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}}, \end{cases} \tag{2}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\left\{z_{n-1}, \ldots, z_1;\ \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right\}$ $(n-1)$-мерной сферы

$$\mathbb{S}^{n-1}\Big\{(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}):\ 0 \leqslant \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-3} \leqslant \pi,\ \beta_{n-2} \bmod 2\pi\Big\}.$$

Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b \geqslant 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — силовое поле. Первое уравнение системы (1) и система (2) задают координаты в касательном пространстве к сфере (являются обобщенными кинематическими соотношениями). При этом система (1), (2) без последнего уравнения является независимой подсистемой порядка $2n-3$ (ввиду цикличности переменной β_{n-2}).

Система (1), (2) также может быть представлена в маятниковом виде

$$\begin{gathered} \ddot\alpha - b\dot\alpha g'(\alpha) + F(\alpha) - \\ - \left[\dot\beta_1^{\,2} + \dot\beta_2^{\,2} \sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^{\,2} \sin^2\beta_1 \sin^2\beta_2 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2 \sin^2\beta_1 \ldots \sin^2\beta_{n-3}\right] \frac{1}{f(\alpha)} = 0, \\[2ex] \ddot\beta_1 - b\dot\beta_1 g(\alpha) f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_1 \left[\frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] - \\ - \left[\dot\beta_2^{\,2} + \dot\beta_3^{\,2} \sin^2\beta_2 + \dot\beta_4^{\,2} \sin^2\beta_2 \sin^2\beta_3 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2 \sin^2\beta_2 \ldots \sin^2\beta_{n-3}\right] \sin\beta_1 \cos\beta_1 = 0, \\[2ex] \ddot\beta_2 - b\dot\beta_2 g(\alpha) f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_2 \left[\frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] + 2\dot\beta_1\dot\beta_2 \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left[\dot\beta_3^{\,2} + \dot\beta_4^{\,2} \sin^2\beta_3 + \dot\beta_5^{\,2} \sin^2\beta_3 \sin^2\beta_4 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2 \sin^2\beta_3 \ldots \sin^2\beta_{n-3}\right] \sin\beta_2 \cos\beta_2 = 0, \\[2ex] \ddot\beta_3 - b\dot\beta_3 g(\alpha) f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_3 \left[\frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] + 2\dot\beta_1\dot\beta_3 \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + 2\dot\beta_2\dot\beta_3 \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} \\ - \left[\dot\beta_4^{\,2} + \dot\beta_5^{\,2} \sin^2\beta_4 + \dot\beta_6^{\,2} \sin^2\beta_4 \sin^2\beta_5 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2 \sin^2\beta_4 \ldots \sin^2\beta_{n-3}\right] \sin\beta_3 \cos\beta_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\beta}_{n-4} - b\dot{\beta}_{n-4}g(\alpha)f(\alpha) + \dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-4}\left[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-4}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \\
+ \ldots + 2\dot{\beta}_{n-5}\dot{\beta}_{n-4}\frac{\cos\beta_{n-5}}{\sin\beta_{n-5}} - \left[\dot{\beta}_{n-3}^2 + \dot{\beta}_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3}\right]\sin\beta_{n-4}\cos\beta_{n-4} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\beta}_{n-3} - b\dot{\beta}_{n-3}g(\alpha)f(\alpha) + \dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-3}\left[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-3}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \\
+ \ldots + 2\dot{\beta}_{n-4}\dot{\beta}_{n-3}\frac{\cos\beta_{n-4}}{\sin\beta_{n-4}} - \dot{\beta}_{n-2}^2\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-3} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\beta}_{n-2} - b\dot{\beta}_{n-2}g(\alpha)f(\alpha) + \dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2}\left[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \\
+ \ldots + 2\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} = 0.
\end{aligned}
$$

2. Первые интегралы, метрики и силовые поля. При $b = 0$ система (1), (2) является консервативной и обладает полным набором (n штук) первых интегралов [19]:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha) = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_1 = \mathrm{const}, \\
&\Phi_2(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\exp\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi = C_2 = \mathrm{const}, \\
&\Phi_3(z_{n-3},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\exp\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi\cdot\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Phi_{n-2}(z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-4}) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\exp\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi\cdot\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \mathrm{const}, \\
&\Phi_{n-1}(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}) = z_1\exp\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi\cdot\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}, \\
&\Phi_n(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

При $b > 0$ система (1), (2) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [14]).

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{5}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{6}$$

Случай (5) соответствует классу систем, описывающих пространственное движение динамически симметричного n-мерного твердого тела на нулевых уровнях первых интегралов (т.е. при наличии дополнительных групп симметрий), вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [14, 17, 19]). Случай (6) соответствует классу систем, описывающих движение материальной точки на $(n-1)$-мерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. При этом в последнем случае метрика на сфере индуцируется евклидовой метрикой объемлющего n-мерного пространства. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (1), (2) описывает геодезический поток на $(n-1)$-мерной сфере.

Замечание 1. В случае (5), если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система (1), (2) описывает движение свободного n-мерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы (см. [14, 17]). В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin\alpha, \tag{7}$$

то система (1), (2) описывает также закрепленный n-мерный маятник на обобщенном сферическом шарнире, помещенный в поток набегающей среды, заполняющей n-мерное пространство (см. [14]), и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [13]). Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы (1), (2) (см. [12]).

Для полного интегрирования системы (1), (2) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных в касательном пространстве

$$\Big(z_{n-1},\ z_{n-2}, \ldots,\ z_2,\ z_1\Big) \to \Big(w_{n-1},\ w_{n-2},\ \ldots,\ w_2,\ w_1\Big), \tag{8}$$

$$w_{n-1} = z_{n-1}, \quad w_{n-2} = w = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}, \quad w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1},$$
$$w_{n-4} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}, \quad \ldots, \quad w_2 = \frac{z_{n-3}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}}, \tag{9}$$

система (1), (2) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -w_{n-1} + bg(\alpha), \\ \dot w_{n-1} = F(\alpha) - w_{n-2}^2 f(\alpha), \\ \dot w_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}f(\alpha), \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \dot w_k = d_k \dfrac{\sqrt{1+w_k^2}}{w_k}\dfrac{\cos\beta_k}{\sin\beta_k}, \\ \dot\beta_k = d_k, \quad k = 1, \ldots, n-3, \end{cases} \tag{11}$$

$$\dot\beta_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin\beta_1 \sin\beta_2 \ldots \beta_{n-3}}, \tag{12}$$

где $Z_1(w_1, \ldots, w_{n-1}) \equiv z_1$ в силу замены (8), d_k, $k = 1, \ldots, n-3,$ — некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что для полной интегрируемости системы (10)–(12) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (10), по одному для систем (11) (т.е. $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (12) (т.е. всего n).

3. Случай (5).

Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a\alpha, \quad m = 2a-1, \quad m, a \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (7).

Теорема 1. *В случаях* (5), (13) *система* (1), (2) *обладает полным набором* (n *штук*), *вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

Следствие 1. *Система* (3) *при условиях* (5), (13) *обладает* n, *вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad z_i = u_i\tau^a, \quad i = 1, 2,$$

то поиск одного из первых интегралов $\Phi_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_1$ системы (10) приведет к уравнению Абеля (см. [6])

$$\big[(a+1)u_2 - ab\big]u_1 du_2 = \big[1 - u_1^2 + au_2^2 - abu_2\big]du_1, \tag{14}$$

общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл $\Phi_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_2$ системы (10) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b-u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + au_2^2 - abu_2}. \tag{15}$$

Первые интегралы для систем (11) имеют вид

$$\Phi_k(w_k; \beta_k) = \frac{\sqrt{1+w_k^2}}{\sin\beta_k} = C_k = \mathrm{const}, \quad k = 1, \ldots, n-3, \tag{16}$$

а дополнительный первый интеграл $\Phi_n(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n$, «привязывающий» уравнение (12), найдется из равенства

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{1}{z_{n-3}\sin\beta_{n-3}}. \tag{17}$$

Используя первый интеграл (16) при $k = n-3, n-4$, окончательно получим

$$\Phi_n(w_{n-4}, w_{n-3}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \beta_{n-2} \pm \operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \mathrm{const}\,. \tag{18}$$

В частности, при $a = 1$ равенство (14) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}.$$

4. Случай (6)**.** Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k\alpha}{\cos^k\alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Теорема 2. *В случаях* (6), (19) *система* (1), (2) *обладает полным набором* (n *штук*)*, вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

Следствие 2. *Система* (3) *при условиях* (6), (19) *обладает* n (*вообще говоря, трансцендентными*) *независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad z_i = u_i\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k, \quad i = 1, 2,$$

то поиск одного из первых интегралов $\Phi_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_1$ системы (10) приведет к уравнению Абеля (14) (только с подстановкой $a \leftrightarrow k$), общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл $\Phi_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = C_2$ системы (10) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \frac{(b-u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + ku_2^2 - kbu_2}.$$

Первые интегралы для систем (11) имеют вид (16), а дополнительный первый интеграл $\Phi_n(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n$, «привязывающий» уравнение (12), найдется из равенства (17); при этом, используя первый интеграл (16) при $k = n-3, n-4$, окончательно получим его в виде (18).

В частности, при $k = 1$ равенство (14) ($a \leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_{n-1}\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2)\cos^2\alpha - bw_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha\cos\alpha} = C_1 = \mathrm{const}\,.$$

5. О поверхностях вращения. Выше были приведены два содержательных примера (5) и (6) для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на n-мерной сфере, для которых получены случаи интегрируемости динамических систем с диссипацией. Остановимся далее (для простоты для случая $n = 2$) на применении только что рассмотренной методики для двумерных поверхностей вращения.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) задана поверхность вращения следующим уравнением:

$$\rho = \rho(z). \tag{20}$$

Уравнения геодезических линий на данной поверхности имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_2(\alpha)\dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} + \Gamma_3(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0, \end{cases} \tag{21}$$

где

$$\Gamma_1(\alpha) = \frac{\rho'(\alpha)\rho''(\alpha)}{1+\rho'^2(\alpha)}, \quad \Gamma_2(\alpha) = \frac{\rho(\alpha)\rho'(\alpha)}{1+\rho'^2(\alpha)}, \quad \Gamma_3(\alpha) = 2\frac{\rho'(\alpha)}{\rho'(\alpha)}, \tag{22}$$

$\alpha = z$, $\beta = \varphi$.

Введем новые кинематические соотношения:

$$\dot{\alpha} = f_1(\alpha)z_2, \quad \dot{\beta} = f_2(\alpha)z_1, \tag{23}$$

в результате чего система (21), (22) перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = f_1(\alpha)z_2, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2\left\{-\Gamma_1(\alpha)f_1(\alpha) - f_1'(\alpha)\right\} + z_1^2\left\{\dfrac{-\Gamma_2(\alpha)f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right\}, \\ \dot{z}_1 = z_2 z_1\left\{-\Gamma_3(\alpha)f_1(\alpha) - f_2'(\alpha)\dfrac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}\right\}, \end{cases} \tag{24}$$

$$\dot{\beta} = f_2(\alpha)z_1, \tag{25}$$

где уравнение (25) отделяется в системе четвертого порядка (24), (25).

Достаточными условиями существования первого интеграла

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = \mathrm{const} \tag{26}$$

из (4) для системы (24), (25) является выполнение двух групп условий:

$$\begin{cases} \Gamma_1(\alpha)f_1(\alpha) + f_1'(\alpha) = 0, \\ \dfrac{\Gamma_2(\alpha)f_2^3(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} + \Gamma_3(\alpha)f_2(\alpha) + f_2'(\alpha) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Уравнения (27) имеют следующие решения:

$$f_1(\alpha) = \frac{A_1}{\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}}, \quad f_2(\alpha) = \frac{A_1}{\rho(\alpha)\sqrt{A_2A_1^2\rho^2(\alpha) - 1}}, \quad A_2 > 0, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Выбрав функции $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ в качестве решений (28), перепишем систему (24), (25) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2\dfrac{A_1}{\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}}, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2\Gamma(\alpha), \\ \dot{z}_1 = z_2 z_1\Gamma(\alpha), \end{cases} \tag{29}$$

$$\dot{\beta} = z_1\frac{A_1}{\rho(\alpha)\sqrt{A_2A_1^2\rho^2(\alpha) - 1}}, \tag{30}$$

где
$$\Gamma(\alpha) = \frac{A_1\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}(A_2A_1^2\rho^2(\alpha)-1)}. \tag{31}$$

Введя теперь в систему (29), (30) консервативное силовое поле $F(\alpha)$ и диссипацию $g(\alpha)$, $b > 0$, получим следующую систему:
$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 f_1(\alpha) + bg(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F(\alpha) - z_1^2\Gamma(\alpha), \\ \dot{z}_1 = z_2 z_1 \Gamma(\alpha), \end{cases} \tag{32}$$
$$\dot{\beta} = z_1 f_2(\alpha). \tag{33}$$

Для интегрирования системы (32), (33) поставим в соответствие системе третьего порядка (32) неавтономную систему второго порядка
$$\begin{cases} \dfrac{dz_2}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha) - \Gamma(\alpha) z_1^2}{z_2 f_1(\alpha) + bg(\alpha)}, \\ \dfrac{dz_1}{d\alpha} = \dfrac{\Gamma(\alpha) z_1 z_2}{z_2 f_1(\alpha) + bg(\alpha)}. \end{cases} \tag{34}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам
$$z_k = u_k \frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}, \quad k = 1, 2, \tag{35}$$

приводим систему (34) к следующему виду:
$$\begin{cases} \dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \dfrac{du_2}{d\alpha} + \left[\dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]' u_2 = \dfrac{F(\alpha) - \Gamma(\alpha)\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]^2 u_1^2}{-u_2 g(\alpha) + bg(\alpha)}, \\ \dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \dfrac{du_1}{d\alpha} + \left[\dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]' u_1 = \dfrac{\Gamma(\alpha)\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]^2 u_1 u_2}{-u_2 g(\alpha) + bg(\alpha)}, \end{cases} \tag{36}$$

что почти всюду эквивалентно
$$\begin{cases} \dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{F_3(\alpha) - \Gamma(\alpha)\frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)} u_1^2 - \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]' u_2^2 - b\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]' u_2}{u_2 + b}, \\ \dfrac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)} \dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{\Gamma(\alpha)\frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)} u_1 u_2 - \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]' u_1 u_2 - b\left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]' u_1}{u_2 + b}, \end{cases} \tag{37}$$

где $F_3(\alpha) = F(\alpha)/g(\alpha)$.

Теперь для интегрирования системы (37) потребуем выполнения следующих двух условий:

(i) для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство
$$\Gamma(\alpha)\frac{g(\alpha)}{f_1^2(\alpha)} = \kappa \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]'; \tag{38}$$

(ii) для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство
$$F_3(\alpha) = \lambda \left[\frac{g(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right]'. \tag{39}$$

Действительно, при выполнении условий (38) и (39) система (37) приводится к уравнению первого порядка
$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - bu_2}{(\kappa - 1)u_1 u_2 - bu_1}. \tag{40}$$

Уравнение (40) имеет вид уравнения Абеля (см. [6, 9–11]. В частности, при $\kappa = -1$ оно обладает первым интегралом

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 - bu_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{41}$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\Theta_1(z_2, z_1; \alpha) = \frac{-z_2^2 f_1^2(\alpha) - z_1^2 f_1^2(\alpha) - bz_2 g(\alpha) f_1(\alpha) + \lambda g^2(\alpha)}{z_1 g(\alpha) f_1(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{42}$$

Аналогичным образом находятся два других первых интеграла (см. [17]). В частности, свойство (38) переписывается в следующем виде:

$$g(\alpha) = \frac{A_1 A_3}{\sqrt{1 + \rho'^2(\alpha)}} \left| \frac{\rho^2(\alpha)}{A_2 A_1^2 \rho^2(\alpha) - 1} \right|^{-1/2\kappa} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{43}$$

где $A_1 \neq 0$, $A_2 > 0$, $A_1, A_2, A_3, \kappa \in \mathbb{R}$.

6. Заключение. В предыдущих работах автора [18–20] уже рассматривались задачи о движении свободного n-мерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к $(n-1)$-мерной сфере. Данная работа присоединяет к данной задаче динамики многомерного твердого тела задачу о движении точки по n-мерной сфере в неконсервативных силовых полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
2. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на so(4)// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 3–11.
4. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа// Докл. АН СССР. — 1984. — *219*, № 2. — С. 228–237.
5. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
7. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
8. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4, — С. 93–94.
9. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
10. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
11. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
12. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
13. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
14. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
15. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
16. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.

17. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНИТИ, 2013. — *125*. — С. 5–254.
18. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
19. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
20. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
21. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
22. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 547–551.
23. *Шамолин М. В.* Четырехмерное твердое тело-маятник в неконсервативном поле// Мат. междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2016» — Воронеж, 2016. — С. 433–436.
24. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы в динамике на касательном расслоении к сфере// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2016. — № 2. — С. 25–30.
25. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
26. *Шамолин М. В.* Первые интегралы динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела// Устойчивость и колебания нелинейных систем управления/ Мат. XIII Междунар. конф., Москва, 1–3 июня 2016 г. — М., 2016. — С. 421–423.
27. *Шамолин М. В.* Первые интегралы динамических систем с диссипацией на касательном расслоении конечномерной сферы// Геометрический анализ и его приложения/ Мат. III Междунар. школы-конф., Волгоград, 30 мая–3 июня 2016 г. — Волгоград, 2016. — С. 217–222.
28. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2016. — *470*, № 3. — С. 288–292.
29. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к сфере// Пробл. мат. анал. — 2016. — *86*. — С. 139–151.
30. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на двумерной плоскости// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 36–57.
31. *Шамолин М. В.* Трансцендентные первые интегралы динамических систем на касательном расслоении к сфере// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 58–75.
32. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в трехмерном пространстве// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2016. № 3-4. — С. 75–97.
33. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
34. *Шамолин М. В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Ч. 1// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и ее прилож. Тематич. обз. — 2017. — *134*. — С. 6–128.
35. *Шамолин М. В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Ч. 2// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и ее прилож. Тематич. обз. — 2017. — *135*. — С. 3–93.
36. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и ее прилож. Тематич. обз. — 2017. — *137*. — С. 104–117.
37. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// «Математическая теория оптимального управления»/ Мат. междунар. конф., посвящ. 90-летию акад. Р. В. Гамкрелидзе, Москва, 1–2 июня 2017 г. – М.: Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 2017. — С. 124–127.
38. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
39. *Shamolin M. V.* Integrability in elementary functions of certain classes of nonconservative systems// Advances in Mathematics and Computer Science and Their Applications/ Proc. 7th Eur. Conf. on Applied Mathematics and Informatics (AMATHI'16), Venice, Italy, January 29–31, 2016. — Math. Comput. Sci. Engin. Ser. — Seoul: WSEAS Press, 2016. — *57*. — С. 50–58.

40. *Shamolin M. V.* Cases of integrability corresponding to the motion of a pendulum in the three-dimensional space// Proc. XLIV Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» Dedicated to the 30th Anniversary of IPME RAS, St. Petersburg, June 27–July 2, 2016. — St. Petersburg, 2016. — C. 375–387.
41. *Shamolin M. V.* Cases of integrability corresponding to the motion of a pendulum in the three-dimensional space// Proc. Global Conference on Applied Physics and Mathematics, Rome, July 25–27, 2016. — Rome, 2016.
42. *Shamolin M. V.* First integrals of variable dissipation dynamical systems in rigid body dynamics// Int. Conf. «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems» (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, 1–3 June 2016. — IEEE, 2016. — C. 1–4.
43. *Shamolin M. V.* Cases of integrability corresponding to the motion of a pendulum in the four-dimensional space// Proc. XLV Summer School-Conf. «Advanced Problems in Mechanics», St. Petersburg, June 22–27, 2017. — Saint Petersburg, 2017. — C. 401–413.

М. В. Шамолин
Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`