Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

(конференция Пятницкого)

Материалы XIV Международной
научной конференции

30 мая – 1 июня 2018 г.

Москва
ИПУ РАН
2018

УДК 681.51
ББК 32.96
У81

Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XIV Международной научной конференции (30 мая – 1 июня 2018г., Москва) / [Ред. В.Н. Тхай]. – М.: ИПУ РАН, 2018. – 499 с.
– ISBN 978-5-91450-214-7.

В научное издание включены материалы XIV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). Рассматриваются вопросы устойчивости, стабилизации, управления, колебаний, нелинейной динамики в различных областях.

Издание предназначено для научных работников и специалистов в области фундаментальной теории управления, теории устойчивости, теории колебаний, прикладных задач управления.

Утверждено к печати Программным комитетом конференции

Конференция проводится при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект № 18-01-20029-г)

ISBN 978-5-91450-214-7

XIV Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) проводится Федеральным государственным бюджетным учреждением науки Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук при поддержке Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (ОЭММПУ РАН). Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-20029-г), а также при информационной поддержке IEEE Russia Section.

Основные научные направления XIV Конференции: общие вопросы теории устойчивости и стабилизации движения; общие вопросы и методы теории нелинейных колебаний; методы функций Ляпунова; гладкая и негладкая динамика; вопросы управляемости и наблюдаемости; проблемы робастного управления; управление в механических и электромеханических системах; управление роботами и мехатронными системами; колебания, устойчивость и стабилизация в сетевых и взаимосвязанных системах, устойчивость и управление гибридными системами и системами с переключениями.

Конференция проводится один раз в два года. Ранее конференция проходила (до 2004 г. — в формате Международного семинара): в Таллине (1987), в Москве (1992), в Самаре (1994), в Москве (1996, 1998, 2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2016).

УДК 531.01

Первые интегралы систем с тремя степенями свободы с диссипацией

М. В. Шамолин

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
shamolin@rambler.ru

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: система с диссипацией, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл

1. Введение

Во задачах динамики возникают механические системы с пространствами положений — трехмерными многообразиями. Фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так изучение четырехмерного сферического маятника приводит к системе на касательном расслоении к трехмерной сфере, при этом метрика специального вида индуцирована дополнительной группой симметрий. Системы, описывающие движение маятника, обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известен также класс задач о движении точки по трехмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе неконсервативного поля сил [1].

2. Система на касательном расслоении к трехмерному многообразию в силовом поле с диссипацией

Рассмотрим следующую систему с диссипацией. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент

$b\delta(\alpha)$ в первом уравнении следующей системы:

$$
(1)\qquad \begin{cases}
\dot\alpha = -z_3 + b\delta(\alpha),\\
\dot z_3 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_2^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2,\\
\dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \Gamma^1_{22}(\beta_1)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_1^2,\\
\dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 -\\
\quad - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) z_1 z_2,\\
\dot\beta_1 = z_2 f(\alpha),\\
\dot\beta_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1),
\end{cases}
$$

которая почти всюду эквивалентна

$$
\begin{cases}
\ddot\alpha - b\dot\alpha\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0,\\
\ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\beta_1)\dot\beta_2^2 = 0,\\
\ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0.
\end{cases}
$$

Перейдем к интегрированию искомой системы шестого порядка (1) при условии

$$
(2)\qquad 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv 0,
$$

а также при выполнении равенств

$$
(3)\qquad \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha).
$$

Введем также (по аналогии с (2)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять следующему равенству:

$$
(4)\qquad 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0.
$$

Для полного ее интегрирования необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных $z_1, z_2 \to z, z_*$, $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_* = z_2/z_1$, система (1) распадается следующим образом:

$$
\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) z^2, \\ \dot{z} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z z_3, \end{cases} \tag{5}
$$

$$
\begin{cases} \dot{z}_* = \pm z \sqrt{1 + z_*^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \dfrac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{6}
$$

$$
\dot{\beta}_2 = \pm \frac{z}{\sqrt{1 + z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{7}
$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (5)–(7) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (5), один — системы (6), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (7) (т.е. всего четыре).

Теорема. *Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства*

$$
\Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \ \ F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{8}
$$

Тогда система (1) при выполнении равенств (2), (3), (4) обладает полным набором (четырьмя) независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [2–4]).

3. Заключение

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, что является нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

Список литературы

1. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 477. No 2. С. 168–172.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.
4. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Доклады РАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.

First Integrals of the Systems with Three Degrees of Freedom with Dissipation

M. V. Shamolin

M. V. Lomonosov Moscow State University, Russia
shamolin@rambler.ru

In this work, the integrability of some classes of dynamic systems on tangent bundles of three-dimensional manifolds is demonstrated. The corresponding force fields possess the so-called variable dissipation and generalize those considered earlier.