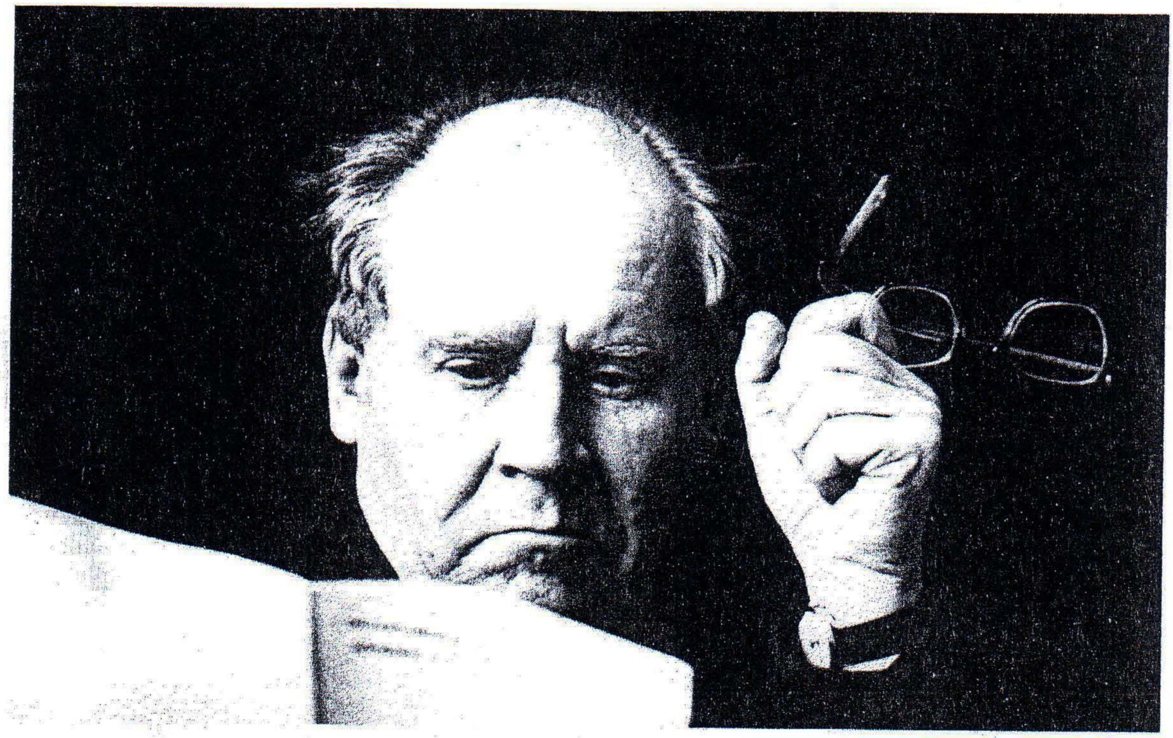
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ

XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018)



Материалы конференции

Часть 1

Аналитическая теория дифференциальных уравнений
Асимптотическая теория дифференциальных уравнений
Качественная теория дифференциальных уравнений
Теория устойчивости и управления движением

МИНСК 2018

УДК 517.9
ББК 22.161.6я43
В76

Редакторы:
А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров

В76 **XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018)**: материалы Международной научной конференции. Гродно, 15 – 18 мая 2018 г. — Часть 1. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2018. — 150 с.

ISBN 978-985-7160-08-2 (Часть 1)
ISBN 978-985-7160-07-5

Сборник содержит доклады, представленные на XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2018) по вопросам аналитической, асимптотической и качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и управления движением.

ISBN 978-985-7160-08-2 (Часть 1)
ISBN 978-985-7160-07-5

© Коллектив авторов, 2018
© Институт математики НАН Беларуси, 2018

5. Нелепин Р.А., Камачкин А.М., Туркин И.И., Шамберов В.Н. *Алгоритмический синтез нелинейных систем управления* / под ред. Р.А. Нелепина. Л.: ЛГУ, 1990.

6. Камачкин А.М., Шамберов В.Н. *Метод декомпозиции в многомерных нелинейных динамических системах* // Вестн. ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2012. № 1. С. 47–55.

7. Камачкин А.М., Шамберов В.Н. *Существование периодических движений в неавтономных многомерных нелинейных системах* // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 1 (59). С. 16–19.

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К МНОГОМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ

М.В. Шамолин

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2, 3, и 4 см. работы [1–3]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Рассмотрим систему с диссипацией следующего вида. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении системы:

$$
\begin{gathered}
\dot\alpha = -z_n + b\delta(\alpha), \quad \dot z_n = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z^2_{n-1} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_2^2 + \ldots \\
\ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\
\dot z_{n-1} = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_{n-1} z_n - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) z^2_{n-2} - \ldots \\
\ldots - \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \quad \ldots, \\
\dot z_2 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_2 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] f(\alpha) z_2 z_{n-1} - \ldots \\
\ldots - [2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr(\beta_{n-3})] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4}) z_2 z_3 - \\
- \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) z_1^2, \\
\dot z_1 = [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_1 z_n - [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] f_1(\alpha) z_1 z_{n-1} - \\
- [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)] f(\alpha) g(\beta_1) z_1 z_{n-2} - \ldots \\
\ldots - [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})] f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) z_1 z_2, \\
\dot\beta_1 = z_{n-1} f(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1), \quad \dot\beta_3 = z_{n-3} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \quad \ldots, \\
\dot\beta_{n-1} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}), \qquad (1)
\end{gathered}
$$

почти всюду эквивалентна системе

$$
\ddot\alpha - b\dot\alpha\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \ldots + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,
$$

$$
b\dot\beta_1\delta(\alpha) W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,
$$

$$
W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot\beta^2_{n-1} = 0,
$$

$$\ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 +$$
$$+ \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad \ldots,$$
$$\ddot{\beta}_{n-2} - b\dot{\beta}_{n-2}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + 2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,$$
$$\ddot{\beta}_{n-1} - b\dot{\beta}_{n-1}\delta(\alpha)W(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + 2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0,$$

где $W(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)$, $DQ(q) = d\ln|Q(q)|/dq$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (1) порядка $2n$ при выполнении равенств

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha). \qquad (2)$$

Введем также ограничение и на функцию $f(\alpha)$:

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \qquad (3)$$

Теорема. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}.$$

Тогда система (1) *при выполнении условий* (2), (3) *обладает полным набором* $(n+1)$ *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Например, в задачах динамики изучаются механические системы со многими степенями свободы (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [4, 5]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

Литература

1. Шамолин М.В. *Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия* // Докл. РАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.

2. Шамолин М. В. *Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия* // Докл. РАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 168–172.

3. Шамолин М. В. *Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия* // Докл. РАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.

4. Шамолин М. В. *Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения* // Фунд. и прикл. математика. 2008. Т. 14. № 3. С. 3–237.

5. Трофимов В.В., Шамолин М.В. *Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем* // Фунд. и прикл. математика. 2010. Т. 16. № 4. С. 3–229.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРАЖАЮЩИЕ ФУНКЦИИ И УСЛОВИЯ ЦЕНТРА ДЛЯ КУБИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.С. Шубэ

Рассмотрим кубическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x,y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x,y). \end{aligned} \tag{1}$$

В (1) $(0,0)$ является особой точкой типа центра или фокуса. Возникает проблема различения для (1) этих двух типов (проблема центра). Скажем, что система (1) является вырожденной, если правые части (1) имеют общий множитель отличный от константы, т.е. $\deg(\gcd(P,Q)) \geqslant 1$.

В полярных координатах $x = \rho\cos\varphi, x = \rho\sin\varphi$ уравнение траекторий системы (1) имеет вид

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{A_1(\cos\varphi,\sin\varphi)\rho^2 + A_2(\cos\varphi,\sin\varphi)\rho^3}{1 + B_1(\cos\varphi,\sin\varphi)\rho + B_2(\cos\varphi,\sin\varphi)\rho^2} \equiv R(\varphi,\rho). \tag{2}$$

Пусть $\rho = \phi(\varphi;\varphi_0,\rho_0)$ — решение уравнения (2) с начальными условиями $\phi(\varphi_0;\varphi_0,\rho_0) = \rho_0$. Функция $F(\varphi,\rho) = \phi(-\varphi;\varphi,\rho)$ называется отражающей функцией уравнения (2) [1]. Интерес к этим функциям для (2) состоит в том, что с их помощью можно получить достаточные условия наличия у системы (1) центра в $(0,0)$.

Как показано в [2] среди функций $F(\varphi,\rho) = M(\varphi,\rho)/N(\varphi,\rho)$, рациональных относительно ρ, только функции вида $F_1(\varphi,\rho) = a_0(\varphi) + a_1(\varphi)\rho$ и $F_2(\varphi,\rho) = \dfrac{a_0(\varphi) + a_1(\varphi)\rho}{b_0(\varphi) + b_1(\varphi)\rho}$ могут быть отражающими. Также в [2] найдены условия на коэффициенты системы (1), обеспечивающие существование у (2) отражающих функций указанного вида. Одновременно эти условия гарантируют для (1) наличие центра в $(0,0)$. Так, в случае функции $F_1(\varphi,\rho)$ в [2] получены следующие четыре серии условий центра:

$$a = b = k = g - c = d - f = s - m = q - p = n - r = 0; \tag{3}$$

$$\begin{gathered} a = k = r = d - f = l - bf = 0, \quad n = bfm/p, \quad q = fg - f^2m/p, \\ s = fm(gp - fm)/p^2, \quad p^2 + mf^2 - cfp = 0; \end{gathered} \tag{4}$$

$$a = k = m = p = r = d - f = n - bc = l - bf = 0, \quad q = f(g - c), \quad s = c(g - c); \tag{5}$$

$$a = d = f = k = l = p = q = 0 \tag{6}$$

в случае функции $F_2(\varphi,\rho)$ и $a \neq 0$:

$$\begin{gathered} b = l = s = n - 2r = q + 2k = 0, \quad a = f - a, \quad g = k/a, \\ r = -a(a + f), \quad m = -r + k(ac - k)/a^2, \quad p = -2k - (cr + fk)/a; \end{gathered} \tag{7}$$

$$s = d + 3a = f + 2a = k - ag = l + 2ab = n - 2a^2 = p + a(c - b) = q + 2ag = 0. \tag{8}$$