Вестник Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

Серия 1 **МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА**

№ 3 · 2018 · май – июнь

Издательство Московского университета

Выходит один раз в два месяца

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Mathematics

Mechanics

Short notes

I.I. Shuvalov award

To buy separate issues of “Moscow University Mathematics Bulletin” and “Moscow University Mechanics Bulletin” or subscribe to them one should refer to

Allerton Press Inc.
250 West 57th Street,
New York, USA, NY 10107.
Fax: 646-424-96-95

© Издательство Московского университета.
«Вестник Московского университета», 2018

Механика

УДК 517.01+531.01

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ

М. В. Шамолин[1]

Исследуются уравнения движения динамически симметричного, закрепленного n-мерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Найден полный набор, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Ключевые слова: многомерное твердое тело-маятник, динамические уравнения, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

The equations of motion for a dynamically symmetric n-dimensional fixed rigid body-pendulum situated in a nonconservative force field are studied. The form of these equations is taken from the dynamics of real fixed rigid bodies placed in a homogeneous flow of an incident medium. The complete list of (in general) transcendental first integrals expressed in terms of a finite combination of elementary functions is found.

Key words: multi-dimensional rigid body-pendulum, dynamic equations, integrability, transcendental first integral.

1. Обобщение модели реального обтекания пространственных тел. Рассмотрим однородный $(n-1)$-мерный круговой диск $\mathcal{D}^{n-1}$ с центром в точке D, гиперплоскость которого в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ перпендикулярна отрезку (державке) OD. Диск жестко прикреплен к державке, находящейся на (обобщенном) сферическом шарнире O, и обтекается однородным потоком среды. В этом случае тело представляет собой физический (обобщенный сферический) маятник. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$, а державка сопротивления не создает.

Предположим, что суммарная сила $\mathbf{S}$ воздействия потока среды на диск $\mathcal{D}^{n-1}$ перпендикулярна ему, а точка N приложения этой силы определяется углом атаки α, измеряемым между вектором скорости $\mathbf{v}_D$ точки D относительно потока и державкой OD, и углами $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$, измеряемыми в гиперплоскости диска $\mathcal{D}^{n-1}$ (таким образом, $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты конца вектора $\mathbf{v}_D$), $l = OD$, Ω — тензор (второго ранга [1, 2]) угловой скорости маятника. Подобные условия обобщают модель струйного обтекания пространственных тел [3, 4].

Примем зависимость $\mathbf{S} = s(\alpha)v_D^2\mathbf{e}$, $s(\alpha) = s_1(\alpha)\mathrm{sign}\cos\alpha$, $\mathbf{e} = \mathbf{OD}/l$ (ср. с [3]). Пусть $Dx_1 \ldots x_n$ — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось Dx_1 параллельна вектору $\mathbf{e}$, а оси $Dx_2, \ldots, Dx_{n-1}$, Dx_n лежат в гиперплоскости диска $\mathcal{D}^{n-1}$. Углами $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})$ мы определим положение державки OD в n-мерном пространстве $\mathbf{E}^n$. При этом угол ξ будем измерять между вектором $\mathbf{OD}$ и направлением набегающего потока $\mathbf{v}_\infty$. Другими словами, вводимые углы являются (обобщенными) сферическими координатами точки D центра диска $\mathcal{D}^{n-1}$ на $(n-1)$-мерной сфере постоянного радиуса OD.

Пространством положений такого (обобщенного) сферического (физического) маятника является $(n-1)$-мерная сфера

$$\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1}:\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi,\ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}, \tag{1}$$

а фазовым пространством — ее касательное расслоение $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{\dot\xi, \dot\eta_1, \ldots, \dot\eta_{n-2}; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$.

Тензор (второго ранга) Ω угловой скорости в системе координат $Dx_1 \ldots x_n$ будем определять через кососимметрическую матрицу. Так, для определенности в случае $n = 5$ эта матрица запишется

[1] *Шамолин Максим Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru.

следующим образом:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega \in \mathrm{so}(5).$$

Расстояние от центра D диска $\mathcal{D}^{n-1}$ до центра давления (точки N) будет иметь вид $|\mathbf{r}_N| = r_N = DN\,(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, где $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ в системе $Dx_1 \ldots x_n$.

Для нашего случая оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, \underbrace{I_2, \ldots, I_2}_{n-1}\}, \tag{2}$$

а именно в гиперплоскости $Dx_2 \ldots x_n$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии).

2. Группа динамических уравнений на алгебре Ли so(n). В нашем случае закрепленного маятника реализуется случай (2). Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствует алгебре Ли so(n):

$$\begin{aligned} &(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_1 = 0, \ldots, (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1-1} = 0, \\ &(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_1} + (-1)^{n+1}(I_1 - I_2)W_{n-1}(\Omega) = (-1)^n x_{nN}\,(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\, s(\alpha)v^2, \\ &(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1+1} = 0, \ldots, (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2-1} = 0, \\ &(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_2} + (-1)^n(I_1 - I_2)W_{n-2}(\Omega) = (-1)^{n-1} x_{n-1,N}\,(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\, s(\alpha)v^2, \\ &(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2+1} = 0, \ldots, (I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_{n-2}-1} = 0, \\ &(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-2}} + (I_1 - I_2)W_2(\Omega) = -x_{3N}\,(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\, s(\alpha)v^2, \\ &(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-1}} + (I_2 - I_1)W_1(\Omega) = x_{2N}\,(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\, s(\alpha)v^2, \end{aligned} \tag{3}$$

$r_{n-2}+1 = r_{n-1}$, а функции $W_t(\Omega)$, $t = 1, \ldots, n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1, \ldots, \omega_f$, $f = n(n-1)/2$, тензора Ω, причем

$$W_t(\Omega)|_{\omega_{k_1} = \ldots = \omega_{k_s} = 0} = 0, \ \ s = (n-1)(n-2)/2, \ \ k_j \neq r_i, \ \ j = 1, \ldots, s, \ \ i = 1, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Поясним формулу (4). Всего у тензора $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ имеется $f = n(n-1)/2$ компонент. Соответственно компонент у момента силы $M_F = (\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ столько же. Поскольку вспомогательная матрица для вычисления момента силы M_F имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} \ldots x_{nN} \\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 \ \ldots \ 0 \end{pmatrix},$$

в правой части системы (3) по крайней мере $s = (n-1)(n-2)/2$ уравнений содержат тождественный нуль. Эти номера уравнений мы обозначим через $k_1, \ldots, k_s$. При этом соответствующие компоненты $\omega_{k_j}, j = 1, \ldots, s$, тензора Ω угловой скорости будем называть *циклическими*.

Оставшиеся номера уравнений, в правых частях которых стоят величины

$$x_{lN}\,(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\, s(\alpha)v^2, \quad l = 2, \ldots, n,$$

мы обозначаем через $r_1, \ldots, r_{n-1}$, поскольку $f - s = n(n-1)/2 - (n-1)(n-2)/2 = n-1$.

Очевидно, что $W_t(0) \equiv 0$ для любых $t = 1, \ldots, n-1$, т.е. квадратичные формы $W_t(\Omega)$ обращаются в нуль, когда все компоненты тензора Ω нулевые. Так вот формула (4) означает, что для обращения в нуль квадратичных форм $W_t(\Omega)$, $t = 1, \ldots, n-1$, достаточно, чтобы все циклические компоненты тензора Ω были нулевые.

Поскольку размерность алгебры Ли so(n) равна $f = n(n-1)/2$, система уравнений (3) и составляет группу динамических уравнений на so(n).

Видно, что в правую часть системы уравнений (3) входят углы $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$, поэтому данная система уравнений не является замкнутой. Для того чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическим уравнениям на алгебре Ли so(n) присоединить несколько групп кинематических уравнений.

Циклические первые интегралы. Сразу же заметим, что система (3) в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \ldots = I_n \tag{5}$$

обладает $s = (n-1)(n-2)/2$ циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega^0_{k_1} = \mathrm{const}, \ \ldots, \ \omega_{k_s} \equiv \omega^0_{k_s} = \mathrm{const}, \qquad s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{6}$$

При этом будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega^0_{k_1} = \ldots = \omega^0_{k_s} = 0. \tag{7}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = f - s = n-1$ штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества $Q_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

При условиях (5)–(7) система (3) примет вид незамкнутой системы $n-1$ уравнений:

$$\begin{aligned}
&(n-2)I_2\dot\omega_{r_1} = (-1)^n x_{nN}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\, s(\alpha) v^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(n-2)I_2\dot\omega_{r_2} = (-1)^{n-1} x_{n-1,N}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\, s(\alpha) v^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-2}} = -x_{3N}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\, s(\alpha) v^2,\\
&(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-1}} = x_{2N}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\, s(\alpha) v^2.
\end{aligned} \tag{8}$$

3. Первая группа кинематических уравнений. Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки D (центра диска $\mathcal{D}^{n-1}$) и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v_D \cdot \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \Omega \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty)\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{9}$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Равенство (9) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат $Dx_1\ldots x_n$. Действительно, в левой части равенства (9) стоит скорость точки D маятника относительно потока в проекциях на систему координат $Dx_1\ldots x_n$. При этом вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — единичный вектор вдоль оси вектора $\mathbf{v}_D$. Вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ имеет (обобщенные) сферические координаты $(1, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, определяющие разложение (10).

В правой же части равенства (9) стоит сумма скоростей точки D при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора $\mathbf{OD} = \{l, 0, \ldots, 0\}$ в системе координат $Dx_1\ldots x_n$.

На втором слагаемом правой части равенства (9) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора $(-\mathbf{v}_\infty) = \{-v_\infty, 0, \ldots, 0\}$ в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат $Dx_1\ldots x_n$, необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол $(-\xi)$, что эквивалентно умножению величины $(-v_\infty)$ на вектор $\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})$.

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (9) в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&v_D \cos\alpha = -v_\infty \cos\xi,\\
&v_D \sin\alpha\cos\beta_1 = l\omega_{r_{n-1}} + v_\infty \sin\xi\cos\eta_1,\\
&v_D \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 = -l\omega_{r_{n-2}} + v_\infty \sin\xi\sin\eta_1\cos\eta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&v_D \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} =\\
&= (-1)^{n+1} l\omega_{r_2} + v_\infty \sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-2},\\
&v_D \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} = (-1)^n l\omega_{r_1} + v_\infty \sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

4. Вторая группа кинематических уравнений. Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости Ω и координаты $\dot\xi, \dot\eta_1, \ldots, \dot\eta_{n-2}, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$ фазового пространства исследуемого маятника — касательного расслоения $T_*\mathbf{S}^n\{\dot\xi, \dot\eta_1, \ldots, \dot\eta_{n-2}; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$.

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$, сначала выражается набор, состоящий из фазовых переменных $\omega_{r_1}, \omega_{r_2}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$, через новые переменные $z_1, \ldots, z_{n-1}$ (из набора z). Для этого производится следующая композиция поворотов на углы $\eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$:

$$\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \cdots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\eta_{n-3}) \circ \ldots \circ T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где матрица

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n-2,$$

отличается от единичной наличием минора второго порядка

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \; m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\eta, \; m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\eta.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\eta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\eta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\eta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \cdots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Затем вместо группы переменных z подставляется следующая зависимость:

$$
\begin{aligned}
&z_{n-1} = \dot{\xi}, \\
&z_{n-2} = -\dot{\eta}_1 \frac{\sin\xi}{\cos\xi}, \\
&z_{n-3} = \dot{\eta}_2 \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&z_2 = (-1)^{n+1}\, \dot{\eta}_{n-3} \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1 \dots \sin\eta_{n-4}, \\
&z_1 = (-1)^n\, \dot{\eta}_{n-2} \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1 \dots \sin\eta_{n-3}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Таким образом, две группы уравнений (12) и (13) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$
\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \dots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\eta_{n-3}) \circ \dots
$$

$$
\dots \circ T_{n-3,n-2}(\eta_2) T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} (-1)^n \dot{\eta}_{n-2} \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1 \dots \sin\eta_{n-3} \\ (-1)^{n+1} \dot{\eta}_{n-3} \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1 \dots \sin\eta_{n-4} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\eta}_2 \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1 \\ -\dot{\eta}_1 \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}. \tag{14}
$$

Видно, что три группы соотношений (8), (11), (14) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят следующие функции: $x_{2N}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \dots, x_{nN}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})$, $s(\alpha)$. При этом функция s считается зависимой лишь от α.

5. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости. Выберем функцию $\mathbf{r}_N$ в следующем виде (диск $\mathcal{D}^{n-1}$ задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$
\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{15}
$$

где $\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v(\pi/2, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})$ (см. (10)).

В нашем случае

$$
\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \dots \\ \sin\beta_1 \dots \sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1 \dots \sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}.
$$

Таким образом, выполнены равенства

$$
\begin{aligned}
&x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1, \quad x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2, \ \dots, \\
&x_{n-1,N} = R(\alpha)\sin\beta_1 \dots \sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}, \quad x_{nN} = R(\alpha)\sin\beta_1 \dots \sin\beta_{n-2},
\end{aligned}
$$

убеждающие нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}$).

Итак, для построения силового поля используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно аналитическим функциям типа Чаплыгина [4, 5], динамические функции s и R выберем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad A, B > 0. \tag{16}$$

Теорема 1. *Совместные уравнения* (3), (11), (14) *при выполнении условий* (5)–(7), (15), (16) *редуцируются к динамической системе на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^{n-1}$ *сферы* (1).

Действительно, если ввести безразмерные параметр и дифференцирование

$$b_* = ln_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad <\cdot> = n_0 v_\infty <'>,$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\xi'' + b_*\xi'\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - [\eta_1'^2 + \eta_2'^2\sin^2\eta_1 + \eta_3'^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0,\\
&\eta_1'' + b_*\eta_1'\cos\xi + \xi'\eta_1'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - [\eta_2'^2 + \eta_3'^2\sin^2\eta_2 + \eta_4'^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 + \ldots\\
&\ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0,\\
&\eta_2'' + b_*\eta_2'\cos\xi + \xi'\eta_2'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_2'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - [\eta_3'^2 + \eta_4'^2\sin^2\eta_3 + \eta_5'^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots\\
&\ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0,\\
&\eta_3'' + b_*\eta_3'\cos\xi + \xi'\eta_3'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_3'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\eta_2'\eta_3'\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - [\eta_4'^2 + \eta_5'^2\sin^2\eta_4 + \eta_6'^2\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5 + \ldots\\
&\ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_4\ldots\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_3\cos\eta_3 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\eta_{n-4}'' + b_*\eta_{n-4}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-4}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_{n-4}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-5}'\eta_{n-4}'\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}} -\\
&- \left[\eta_{n-3}'^2 + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4} = 0,\\
&\eta_{n-3}'' + b_*\eta_{n-3}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-3}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_{n-3}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-4}'\eta_{n-3}'\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} -\\
&- \eta_{n-2}'^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0,\\
&\eta_{n-2}'' + b_*\eta_{n-2}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-2}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_{n-2}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-3}'\eta_{n-2}'\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0, \quad b_* > 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (13)) к промежуточным безразмерным переменным

$$z_k = n_0 v_\infty Z_k, \quad k = 1, \ldots, n-2, \quad z_{n-1} = n_0 v_\infty Z_{n-1} - n_0 v_\infty b_* \sin\xi$$

система (17) будет эквивалентна системе

$$\begin{aligned}
&\xi' = Z_{n-1} - b_*\sin\xi,\\
&Z_{n-1}' = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\
&Z_{n-2}' = -Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1},\\
&Z_{n-3}' = -Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +\\
&+ (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&Z_1' = -Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{s-1}} \right\},\\
&\eta_1' = -Z_{n-2} \frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\
&\eta_2' = Z_{n-3} \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\eta_{n-3}' = (-1)^{n+1} Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-4}},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\eta_{n-2}' = (-1)^n Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3}} \tag{19}
$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})\}$ $(n-1)$-мерной сферы

$$
\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} :\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi,\ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}.
$$

Видно, что в системе (18), (19) порядка $2(n-1)$ по причине цикличности переменной η_{n-2} выделяется независимая подсистема (18) порядка $2(n-1)-1$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

6. Полный список первых интегралов при любом конечном n. Для полного интегрирования системы (18), (19) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интеграла. Однако после замены переменных

$$
w_{n-1} = -Z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \quad w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-4} = -\frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \ldots
$$

$$
\ldots,\ w_2 = -\frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = -\frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}} \tag{20}
$$

система (18), (19) распадется следующим образом:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\xi' = -w_{n-1} - b_* \sin\xi,\\
&w_{n-1}' = \sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\
&w_{n-2}' = w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos\xi}{\sin\xi},
\end{aligned}
\right\} \tag{21}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&w_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\\
&\eta_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \qquad s = 1, \ldots, n-3,
\end{aligned}
\right\} \tag{22}
$$

$$
\eta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{23}
$$

где выполнены условия

$$
\begin{aligned}
&d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = -Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\
&d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = (-1)^n Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3}},
\end{aligned}
$$

при этом $Z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1)$, $k = 1, \ldots, n-2$, — функции в силу (20). Система (21)–(23) рассматривается на касательном расслоении $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})\}$.

Видно, что в системе (21)–(23) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ выделяются независимая подсистема третьего порядка (21), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии; $n-3$ независимые системы второго порядка (22) (после замены независимой переменной), а (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (23) на η_{n-2} отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (21)–(23) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (21), по одному для систем (22) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (23) (*т.е. всего* n).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (21) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_{n-1}}{d\xi} = \frac{\sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2\cos\xi/\sin\xi}{-w_{n-1} - b_*\sin\xi}, \qquad \frac{dw_{n-2}}{d\xi} = \frac{w_{n-2}w_{n-1}\cos\xi/\sin\xi}{-w_{n-1} - b_*\sin\xi}. \tag{24}$$

Используя замену $\tau = \sin\xi$, перепишем систему (24) в алгебраическом виде

$$\frac{dw_{n-1}}{d\tau} = \frac{\tau - w_{n-2}^2/\tau}{-w_{n-1} - b_*\tau}, \qquad \frac{dw_{n-2}}{d\tau} = \frac{w_{n-2}w_{n-1}/\tau}{-w_{n-1} - b_*\tau}. \tag{25}$$

Далее, введя однородные переменные по формулам $w_{n-1} = u_2\tau$, $w_{n-2} = u_1\tau$, представим систему (25) в следующем виде:

$$\tau\,\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 - b_*}, \qquad \tau\,\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 - b_*}. \tag{26}$$

Сопоставим системе второго порядка (26) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 + b_*u_2}{2u_1u_2 + b_*u_1}, \tag{27}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_*u_2 + 1}{u_1}\right) = 0.$$

Итак, уравнение (27) имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_*u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const},$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 + b_*w_{n-1}\sin\xi + \sin^2\xi}{w_{n-2}\sin\xi} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{28}$$

Замечание. Рассмотрим обладающую переменной диссипацией с нулевым средним [6, 7] систему (21), которая становится консервативной при $b_* = 0$:

$$\begin{aligned} &\xi' = -w_{n-1}, \\ &w_{n-1}' = \sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2\,\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ &w_{n-2}' = w_{n-2}w_{n-1}\,\frac{\cos\xi}{\sin\xi}. \end{aligned} \tag{29}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 + \sin^2\xi = C_1^* = \mathrm{const}, \tag{30}$$

$$w_{n-2}\sin\xi = C_2^* = \mathrm{const}. \tag{31}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (30), (31) также является первым интегралом системы (29). Но при $b_* \neq 0$ каждая из функций

$$w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 + b_* w_{n-1} \sin\xi + \sin^2\xi \tag{32}$$

и (31) по отдельности не является первым интегралом системы (21). Однако отношение функций (32), (31) есть первый интеграл системы (21) при любом b_*.

Можно найти явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (21). Он имеет следующий структурный вид (ср. с [8, 9]):

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = G_2\left(\sin\xi, \frac{w_{n-1}}{\sin\xi}, \frac{w_{n-2}}{\sin\xi}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{33}$$

Таким образом, найдены два первых интеграла (28), (33) системы третьего порядка (21). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (22) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (23).

Действительно, искомые первые интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \eta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\eta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const}, \qquad s = 1, \ldots, n-3, \tag{34}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, w_{n-4}; \eta_{n-4}, \eta_{n-3}, \eta_{n-2}) =$$
$$= \eta_{n-2} \pm \operatorname{arctg} \frac{C_{n-1}\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2\eta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C''_n = \mathrm{const}, \tag{35}$$

при этом в левую часть равенства (35) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (34) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 2. *Система* (21)–(23) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов* (28), (33)–(35).

В рассматриваемом случае система динамических уравнений (18), (19) имеет n первых интегралов (28), (33)–(35), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [9, 10]).

Теорема 3. *Три группы соотношений* (3), (11), (14) *при условиях* (5)–(7), (15), (16) *обладают* n *первыми интегралами* (*полным набором*), *являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12–01–00020-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д.В., Шамолин М.В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. 2001. **380**, № 1. 47–50.
2. *Георгиевский Д.В., Шамолин М.В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. 2002. **383**, № 5. 635–637.
3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983.
4. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. М.: Наука, 1976.
5. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. 133–135.
6. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
7. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. матем. 2008. **14**, вып. 3. 3–237.
8. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 125. М.: ВИНИТИ, 2013. 5–254.

9. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. **53**, вып. 3. 209–210.
10. *Шамолин М.В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле // Докл. РАН. 2015. **460**, № 2. 165–169.

Поступила в редакцию
11.11.2015

УДК 539.4.25

О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КИРХГОФА–ЛЯВА НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

В. И. Горбачёв[1], **Л. А. Кабанова**[2]

В работе изучается процедура сведения трехмерной задачи теории упругости для тонкой неоднородной анизотропной пластины к двумерной задаче в срединной плоскости. Пластина находится в равновесии под действием объемных и поверхностных сил общего вида. Вводится понятие внутренних силовых факторов. Уравнения для силовых факторов (уравнения равновесия в срединной плоскости) получаются из усредненных по толщине трехмерных уравнений теории упругости. Для установления связи между внутренними силовыми факторами и характеристиками деформированной срединной поверхности используются априорные предположения о распределении перемещений по толщине пластины. Чтобы упорядочить эти предположения, перемещения точек пластины разлагаются в ряды Тейлора по поперечной координате с учетом физических гипотез о деформации материального волокна, первоначально перпендикулярного срединной плоскости. Подробно рассмотрена известная гипотеза Кирхгофа–Лява. Получена замкнутая система уравнений теории неоднородных анизотропных пластин, основанная на гипотезе Кирхгофа–Лява. Граничные условия выводятся из вариационного принципа Лагранжа.

Ключевые слова: пластины, композиционные материалы, теория упругости, неоднородные анизотропные пластины.

In this paper we study the procedure of reducing the three-dimensional problem of elasticity theory for a thin inhomogeneous anisotropic plate to a two-dimensional problem in the median plane. The plate is in equilibrium under the action of bulk and surface forces of general form. A notion of internal force factors is introduced. Equations for force factors (equilibrium equations in the median plane) are obtained from the thickness-averaged three-dimensional equations of elasticity theory. In order to establish the relation between the internal force factors and the characteristics of the deformed middle surface, we use some prior assumptions on the distribution of displacements along the thickness of the plate. To arrange these assumptions in order, the displacements of plate points are expanded into Taylor series in the transverse coordinate with consideration of the physical hypotheses on the deformation of a material fiber that is originally perpendicular to the median plane. The well-known Kirchhoff–Love hypothesis is considered in detail. A closed system of equations for the theory of inhomogeneous anisotropic plates is obtained on the basis of the Kirchhoff–Love hypothesis. The boundary conditions are formulated from the Lagrange variation principle.

Key words: plates, composite materials, elasticity theory, inhomogeneous anisotropic plates.

1. Введение. Под пластиной понимается деформируемое твердое тело, ограниченное двумя плоскими лицевыми поверхностями $\Sigma_\pm$ и боковой поверхностью Σ_b, перпендикулярной к обеим лицевым поверхностям. Плоская поверхность Σ_0, равноудаленная от лицевых поверхностей, называется *срединной плоскостью.* Пересечение срединной плоскости с перпендикулярной к ней боковой поверхностью называется *граничным контуром срединной плоскости пластины* Г. Область, образованная пересечением пластины с плоскостью, проходящей через нормаль к срединной плоскости,

---

[1] *Горбачёв Владимир Иванович* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vigorby@mail.ru.
[2] *Кабанова Любовь Александровна* — студ. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: lkb14@yandex.ru.