М. В. Шамолин, Интегрируемые системы с диссипацией на касательных расслоениях к сферам размерностей 2 и 3, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2018, том 145, 86–94

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 145 (2018). С. 86–94

УДК 517.9+531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ К СФЕРАМ РАЗМЕРНОСТЕЙ 2 И 3

© 2018 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Показана интегрируемость в явном виде классов динамических систем на касательных расслоениях к сферам размерности 2 и 3 в случае, когда силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией.

***Ключевые слова*:** динамическая система, диссипация, трансцендентный первый интеграл, интегрируемость.

***AMS Subject Classification*:** 34Cxx, 37E10, 37N05

Во многих задачах многомерной динамики возникают механические системы с пространствами положений — сферами конечной размерности. Фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к сферам. Так, например, изучение пространственного (трехмерного) маятника на сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. также [1, 2, 4, 5]).

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики n-мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле породили системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом исследование проводится начиная от систем при отсутствии силового поля и продолжается системами при наличии неконсервативных силовых полей (см. [25, 30]).

Построение неконсервативного силового поля, действующего на закрепленное многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных закрепленных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость в явном виде некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к сферам размерности 2 и 3. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией (см. [14, 16]) и обобщают ранее рассмотренные случаи.

1. Системы на двумерном цилиндре. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z + bg(\alpha), \\ \dot z = F(\alpha) \end{cases} \tag{1}$$

на двумерном цилиндре, являющемся касательным расслоением $T_*\mathbb{S}^1\{z;\alpha\}$ к одномерной сфере $\mathbb{S}^1 = \{\alpha : \alpha \bmod 2\pi\}$. Здесь функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — периодические и достаточно гладкие; они определяют силовое поле. Первое уравнение системы (1) задает координату z в касательном пространстве к сфере (является кинематическим соотношением).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00848-а).

Система (1) также может быть представлена в виде маятникового уравнения

$$\ddot{\alpha} - bg'(\alpha)\dot{\alpha} + F(\alpha) = 0. \tag{2}$$

При $b = 0$ система (1) является консервативной и обладает одним (полным набором) гладким первым интегралом:

$$F_1(z;\alpha) = z^2 + z_2^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{3}$$

При $b > 0$ система (1) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [14, 16]).

Замечание 1. В случае, если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система (1) описывает плоскопараллельное движение твердого тела во внешнем силовом поле $F(\alpha)$, а также под действием следящей силы (см. [6, 7, 13, 15]). В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin\alpha, \tag{4}$$

то система (1) описывает также плоский (цилиндрический) маятник, помещенный в поток набегающей среды (см. [6–8, 10]), и обладает одним (полным набором) трансцендентным первым интегралом, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [14, 16]). Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы (7), (8) (см. [9, 24, 29]).

Введем ограничение на силовое поле для полной интегрируемости системы.

Теорема 1. *Если существует такая постоянная $\lambda \in \mathbb{R}$, что выполнено равенство*

$$F(\alpha) = \lambda g(\alpha)g'(\alpha), \tag{5}$$

то при $b \neq 0$ система (1) *обладает одним первым интегралом* (*полным набором*), *вообще говоря, трансцендентным, следующего вида*:

$$\Phi_1\left(g(\alpha), \frac{z}{g(\alpha)}\right) = g(\alpha)\exp\left\{\int \frac{(u-b)du}{u^2 - bu + \lambda}\right\} = C_1 = \mathrm{const}, \quad u = \frac{z}{g(\alpha)}. \tag{6}$$

Если функция $g(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теореме 1) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде (см. также [17, 18, 28]).

2. Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Рассмотрим системы вида

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_2 + bg(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F(\alpha) - z_1^2 f(\alpha), \\ \dot{z}_1 = z_1 z_2 f(\alpha), \end{cases} \tag{7}$$

$$\dot{\beta} = z_1 f(\alpha), \tag{8}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ к двумерной сфере

$$\mathbb{S}^2 = \{(\alpha, \beta_1):\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,\ \beta \bmod 2\pi\}.$$

Функции $F(\alpha)$, $g(\alpha)$ и $f(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b \geqslant 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $f(\alpha)$ — силовое поле. Первое уравнение системы (7) и уравнение (8) задают координаты z_2, z_1 в касательном пространстве к сфере (являются кинематическими соотношениями). При этом система (7) является независимой подсистемой третьего порядка (ввиду цикличности переменной β).

Система (7), (8) также может быть представлена в маятниковом виде:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - bg'(\alpha)\dot{\alpha} + F(\alpha) - \dot{\beta}^2 \dfrac{1}{f(\alpha)} = 0, \\ \ddot{\beta} - bg(\alpha)f(\alpha)\dot{\beta} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\dfrac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

При $b = 0$ система (7), (8) является консервативной и обладает полным набором первых интегралов:

$$F_1(z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_1 = \text{const}, \tag{10}$$

$$F_2(z_1; \alpha) = z_1 \exp \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi = C_2 = \text{const}, \tag{11}$$

$$F_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = C_3 = \text{const}\,. \tag{12}$$

При $b > 0$ система (7), (8) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [14, 16].

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{13}$$

а также

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha \sin\alpha}. \tag{14}$$

Случай (13) образует класс систем, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла, вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [19, 20]). Случай (14) образует класс систем, соответствующих движению материальной точки на сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (7), (8) описывает геодезический поток на двумерной сфере.

Замечание 2. В случае (13), если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система (7) описывает пространственное движение твердого тела во внешнем силовом поле $F(\alpha)$, а также под действием следящей силы. В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin\alpha, \tag{15}$$

то система (7), (8) описывает также пространственный (сферический) маятник, помещенный в поток набегающей среды, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы (7), (8).

3. Случай (13).

Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m \alpha \cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a \alpha, \quad m = 2a - 1, \quad m, a \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

В частности, для $m = a = 1$ имеем случай (15).

Теорема 2. *В случае* (16) *система* (7), (8) *обладает полным набором* (*тремя*), *вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Следствие 1. *Система*

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - ab\dot{\alpha}\sin^{a-1}\alpha\cos\alpha + \sin^{2a-1}\alpha\cos\alpha - \dot{\beta}^2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \\ \ddot{\beta} - b\dot{\beta}\sin^{a-1}\alpha\cos\alpha + \dot{\alpha}\dot{\beta}\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = 0, \end{cases} \tag{17}$$

обладает тремя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

Схема доказательства теоремы 2. Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad z_i = u_i \tau^a, \quad i = 1, 2,$$

то поиск одного из первых интегралов приведет к уравнению Абеля (см. [2, 4])

$$\Big[(a+1)u_2 - ab\Big]u_1 du_2 = \Big[1 - u_1^2 + au_2^2 - abu_2\Big]du_1, \tag{18}$$

общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$, вообще говоря, имеет довольно громоздкий вид. Тогда дополнительный первый интеграл системы (7) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b-u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + au_2^2 - abu_2}. \tag{19}$$

В свою очередь, первый интеграл, «привязывающий» уравнение (8), найдется из равенства

$$\frac{dz_1}{d\beta} = z_2. \tag{20}$$

В частности, при $a = 1$ равенство (18) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{z_2}{\sin\alpha}, \frac{z_1}{\sin\alpha}\right) = \frac{z_2^2 + z_1^2 - bz_2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{z_1\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{21}$$

и также находятся два других Φ_2, Φ_3. □

4. **Случай** (14). Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k\alpha}{\cos^k\alpha}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Теорема 3. *В случае* (22) *система* (7), (8) *обладает полным набором* (*тремя*), *вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Следствие 2. *Система*

$$\begin{cases} \ddot\alpha - kb\dot\alpha\dfrac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + \dfrac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha} - \dot\beta^2\sin\alpha\cos\alpha = 0, \\ \ddot\beta - b\dot\beta\dfrac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + 2\dot\alpha\dot\beta\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0, \end{cases} \tag{23}$$

обладает тремя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

Схема доказательства теоремы 3. Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad z_i = u_i\Big(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\Big)^k, \quad i = 1, 2,$$

то поиск одного из первых интегралов приведет к уравнению Абеля (18) (только с подстановкой $a \leftrightarrow k$). Тогда дополнительный первый интеграл системы (7) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \frac{(b-u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + ku_2^2 - kbu_2}. \tag{24}$$

В свою очередь, первый интеграл, «привязывающий» уравнение (8), найдется из равенства (20).

В частности, при $k = 1$ равенство (18) ($a \leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{z_2\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \frac{z_1\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{(z_2^2 + z_1^2)\cos^2\alpha - bz_2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha}{z_1\sin\alpha\cos\alpha} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{25}$$

а дополнительный первый интеграл системы (7) находится из равенства

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \frac{(b-u_2)du_2}{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 - bu_2 + u_2^2)}\}/2} \tag{26}$$

и имеет вид

$$\Phi_2\Big(\frac{z_2\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{z_1\cos\alpha}{\sin\alpha}, \sin\alpha\Big) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{27}$$

Далее, поскольку

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{(2u_2 - b)u_1}{(b-u_2)\tau(1-\tau^2)}, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{u_1}{(b-u_2)\tau(1-\tau^2)}, \tag{28}$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta} = 2u_2 - b, \tag{29}$$

и

$$2(\beta + C_3) = \pm\arcsin\frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \mathrm{const}, \tag{30}$$

поэтому первый интеграл, «привязывающий» уравнение (8), примет вид

$$2\beta \pm \arctan\frac{(z_1^2 - z_2^2)\cos^2\alpha + bz_2\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha}{z_1\cos\alpha(2z_2\cos\alpha - b\sin\alpha)} = C_3 = \mathrm{const}\,. \qquad \square$$

5. Системы на касательном расслоении к трехмерной сфере. Рассмотрим системы вида

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3 + bg(\alpha), \\ \dot z_3 = F(\alpha) - (z_1^2 + z_2^2)f(\alpha), \\ \dot z_2 = z_2 z_3 f(\alpha) + z_1^2 f(\alpha)\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \dot z_1 = z_1 z_3 f(\alpha) - z_1 z_2 f(\alpha)\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \dot\beta_1 = z_2 f(\alpha), \end{cases} \tag{31}$$

$$\dot\beta_2 = -z_1 f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{32}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ к трехмерной сфере

$$\mathbb{S}^3 = \big\{(\alpha, \beta_1, \beta_2) : 0 \leqslant \alpha, \beta_1 \leqslant \pi,\ \beta_2 \bmod 2\pi\big\}.$$

Функции $F(\alpha)$, $g(\alpha)$ и $f(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \Pi/2$, $b \geqslant 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $f(\alpha)$ — силовое поле. Первое и последнее уравнения системы (31) и уравнение (32) задают координаты z_3, z_2, z_1 в касательном пространстве к сфере (являются кинематическими соотношениями). При этом система (31) является независимой подсистемой пятого порядка (ввиду цикличности переменной β_2) (см. также [3, 11, 12]).

Система (31), (32) также может быть представлена в маятниковом виде:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - bg'(\alpha)\dot\alpha + F(\alpha) - \dot\beta_1^2\dfrac{1}{f(\alpha)} - \dot\beta_2^2\dfrac{\sin^2\beta_1}{f(\alpha)} = 0, \\ \ddot\beta_1 - bg(\alpha)f(\alpha)\dot\beta_1 + \dot\alpha\dot\beta_1\dfrac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} - \dot\beta_2^2\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \\ \ddot\beta_2 - bg(\alpha)f(\alpha)\dot\beta_2 + \dot\alpha\dot\beta_2\dfrac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Для полного интегрирования системы (31), (32) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}, \tag{34}$$

система (31), (32) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + bg(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) - z^2 f(\alpha), \\ \dot{z} = zz_3 f(\alpha); \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_* = (\pm) z\sqrt{1+z_*^2} f(\alpha) \dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \dot{\beta}_1 = (\pm) \dfrac{zz_*}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{36}$$

$$\dot{\beta}_2 = (\pm) \frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha) \frac{1}{\sin\beta_1}. \tag{37}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (35)–(37) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (35), один — системы (36), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (37) (т.е. всего четыре).

При $b = 0$ система (31), (32) является консервативной и обладает полным набором первых интегралов:

$$F_1(z_3, z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi) d\xi = C_1 = \mathrm{const}, \tag{38}$$

$$F_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \exp \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi = C_2 = \mathrm{const}, \tag{39}$$

$$F_3(z_1; \alpha, \beta_1) = z_1 \exp \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi \cdot \sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{40}$$

$$F_4(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = C_4 = \mathrm{const}\,. \tag{41}$$

При $b > 0$ система (31), (32) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [21–23]).

Выделим также два существенных случая (13) и (14) для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере. Случай (13) образует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [26, 27]). Случай (14) образует класс систем, соответствующих движению материальной точки на трехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (31), (32) описывает геодезический поток на трехмерной сфере.

Замечание 3. В случае (13), если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система (31), (32) описывает движение четырехмерного твердого тела в силовом поле под действием следящей силы. В частности, если выполнены условия (15), то система (31), (32) описывает также четырехмерный (обобщенный сферический) маятник в неконсервативном поле и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

6. Случай (13)**.** Пусть выполнены условия (16) на силовое поле. В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (15).

Теорема 4. *В случае* (16) *система* (31), (32) *обладает полным набором* (*четырьмя*)*, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Следствие 3. *Система*

$$
\begin{cases}
\ddot\alpha - ab\dot\alpha\sin^{a-1}\alpha\cos\alpha + \sin^{2a-1}\alpha\cos\alpha - \dot\beta_1^2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dot\beta_2^2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1 = 0,\\
\ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\sin^{a-1}\alpha\cos\alpha + \dot\alpha\dot\beta_1\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} - \dot\beta_2^2\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,\\
\ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\sin^{a-1}\alpha\cos\alpha + \dot\alpha\dot\beta_2\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0,
\end{cases}
\tag{42}
$$

обладает четырьмя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

Схема доказательства теоремы 4. Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad z = u_1\tau^a, \quad z_3 = u_2\tau^a,$$

то поиск одного из первых интегралов приведет к уравнению Абеля (18). Тогда дополнительный первый интеграл системы (35) находится из квадратуры (19). В свою очередь, первый интеграл, «привязывающий» уравнение (37), найдется из равенства (20).

В частности, при $a = 1$ равенство (18) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{z_3}{\sin\alpha}, \frac{z}{\sin\alpha}\right) = \frac{z_3^2 + z^2 - bz_3\sin\alpha + \sin^2\alpha}{z\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}; \tag{43}$$

аналогично находятся три других интеграла Φ_2, Φ_3, Φ_4 (см. [26, 27]). □

7. Случай (14). Пусть выполнены условия (22) на силовое поле.

Теорема 5. *В случае* (22) *система* (31), (32) *обладает полным набором* (*четырьмя*), *вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Следствие 4. *Система*

$$
\begin{cases}
\ddot\alpha - kb\dot\alpha\dfrac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + \dfrac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha} - \dot\beta_1^2\sin\alpha\cos\alpha - \dot\beta_2^2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1 = 0,\\
\ddot\beta_1 - b\dot\beta_1\dfrac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + 2\dot\alpha\dot\beta_1\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dot\beta_2^2\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,\\
\ddot\beta_2 - b\dot\beta_2\dfrac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + 2\dot\alpha\dot\beta_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0
\end{cases}
\tag{44}
$$

обладает тремя, вообще говоря, трансцендентными первыми интегралами.

Схема доказательства теоремы 5. Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau = \sin\alpha, \quad z = u_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k, \quad z_3 = u_2\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k$$

то поиск одного из первых интегралов приведет к уравнению Абеля (18) (только с подстановкой $a \leftrightarrow k$). Тогда дополнительный первый интеграл системы (35) находится из квадратуры (24). В свою очередь, первый интеграл, «привязывающий» уравнение (37), найдется из равенства (20).

В частности, при $k = 1$ равенство (18) ($a \leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{z_3\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{z\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{(z_3^2 + z^2)\cos^2\alpha - bz_3\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha}{z\cos\alpha\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{45}$$

а дополнительный первый интеграла системы (37) находится из равенства (26) и имеет следующий структурный вид:

$$\Phi_2\left(\frac{z_3\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{z\cos\alpha}{\sin\alpha}, \sin\alpha\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{46}$$

Первый интеграл системы (36) имеет вид

$$\Phi_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \mathrm{const}, \tag{47}$$

а первый интеграл, «привязывающий» уравнение (37) на угол β_2, — вид

$$\Phi_4(z_*;\beta_1,\beta_2) = \beta_2 \pm \operatorname{arctg} \frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2\sin^2\beta_1 - 1}} = C_4 = \mathrm{const}, \tag{48}$$

полученный из уравнения

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = -\frac{1}{z_*\sin\beta_1}, \tag{49}$$

с использованием (47). □

8. Заключение. В предыдущих работах автора (см. [25–27]) уже рассматривались задачи о движении свободного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам. Данная работа присоединяет к указанному циклу работ по динамике твердого тела задачу о движении точки по сферам размерности 2 и 3 в неконсервативных силовых полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: ВИНИТИ, 1985.
2. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
4. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
5. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
6. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// Полн. собр. соч. — Л.: АН СССР, 1933. — *1*. — С. 133–135.
7. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
8. *Шамолин М. В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1997. — № 2. — С. 65–68.
9. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
10. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
11. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
12. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4)\times\mathbb{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
13. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 4. — С. 482–485.
14. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Изд-во «Экзамен», 2007.
15. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
16. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
17. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости// Прикл. мат. мех. — 2008. — *72*, № 2. — С. 273–287.
18. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
19. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела// Докл. РАН. — 2010. — *431*, № 3. — С. 339–343.

20. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
21. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
22. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
23. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
24. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. —*442*, № 4. — С. 479–481.
25. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
26. *Шамолин М. В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Часть 1// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2017. — *134*. — С. 6–128.
27. *Шамолин М. В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Часть 2// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2017. — *135*. — С. 3–93.
28. *Shamolin M. V.* Classification of complete integrability cases in four-dimensional symmetric rigid-body dynamics in a nonconservative field// J. Math. Sci. — 2010. — *165*, № 6. — С. 743–754.
29. *Shamolin M. V.* Comparison of complete integrability cases in dynamics of a two-, three-, and four-dimensional rigid body in a nonconservative field// J. Math. Sci. — 2012. — *187*, № 3. — С. 346–359.
30. *Shamolin M. V.* Variety of integrable cases in dynamics of low- and multi-dimensional rigid bodies in nonconservative force fields// J. Math. Sci. — 2015. — *204*, № 4. — С. 379–530.

М. В. Шамолин
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru