ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2018, том 479, № 3, с. 270–276

МЕХАНИКА

УДК 531.01

# НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЁХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2018 г. М.В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 23.10.2017 г.

Поступило 25.10.2017 г.

Показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к четырёхмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

**DOI:** 10.7868/S0869565218090086

## ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах динамики возникают механические системы с пространством положений – четырёхмерным многообразием. Их фазовыми пространствами естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение пятимерного обобщённого сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырёхмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по четырёхмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удаётся найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к четырёхмерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2 и 3 см. [3, 4]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru

## УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРИ ЗАМЕНЕ КООРДИНАТ И ИХ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Как известно, в случае четырёхмерного гладкого риманова многообразия $M^4$ с координатами $(\alpha, \beta)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $TM^4\{\alpha^\bullet, \beta_1^\bullet, \beta_2^\bullet, \beta_3^\bullet; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $\beta_3 = x^4$, $x = \left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$, имеют следующий вид (дифференцирование берётся по натуральному параметру):

$$x^{i\bullet\bullet} + \sum_{j,k=1}^{4} \Gamma^i_{jk}(x) x^{j\bullet} x^{k\bullet} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (1)$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении $TM^4$. Рассмотрим замену координат касательного пространства:

$$x^{i\bullet} = \sum_{j=1}^{4} R^{ij} z_j, \quad (2)$$

которую можно обратить: $z_j = \sum_{i=1}^{4} T_{ji} x^{i\bullet}$, при этом $R^{ij}$, $T_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, – функции от $x$, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовём также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. соотношениями на касательном расслоении $TM^4$.

Справедливы равенства

$$z_i^{\bullet} = \sum_{j,k=1}^{4} T_{ij,k} x^{j\bullet} x^{k\bullet} - \sum_{j,p,q=1}^{4} T_{ij} \Gamma_{pq}^{j} x^{p\bullet} x^{q\bullet}, \quad (3)$$

где $T_{ji,k} = \dfrac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}$, $j, i, k = 1, 2, 3, 4$, при этом в последней системе вместо $x^{i\bullet}$, $i = 1, 2, 3, 4$, надо подставить формулы (2).

П р е д л о ж е н и е 1. *Система* (1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (2), (3).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (3) зависит как от замены переменных (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma_{jk}^{i}(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^{\bullet} = -z_4, \ \beta_1^{\bullet} = z_3 f_1(\alpha), \ \beta_2^{\bullet} = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \beta_3^{\bullet} = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \quad (4)$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ – гладкие функции на своей области определения. Такие координаты $z_1, z_2, z_3, z_4$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [5, 6] (в частности, на поверхностях вращения):

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} + \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + 2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + \Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_3^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha 3}^{3}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_3^{\bullet} + 2\Gamma_{13}^{3}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_3^{\bullet} + 2\Gamma_{23}^{3}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet}\beta_3^{\bullet} = 0,
\end{gathered} \quad (5)$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (4) уравнения (3) примут вид

$$\begin{gathered}
z_1^{\bullet} = \left[2\Gamma_{\alpha 3}^{3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \left[2\Gamma_{13}^{3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_3 -\\
-\left[2\Gamma_{23}^{3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2,\\
z_2^{\bullet} = \left[2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \left[2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_2 z_3 -\\
-\Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2,\\
z_3^{\bullet} = \left[2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 -\\
-\Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2,\\
z_4^{\bullet} = \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 +\\
+\Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2,
\end{gathered} \quad (6)$$

и уравнения (5) почти всюду эквивалентны составной системе (4), (6) на многообразии $TM^4\left\{\alpha^{\bullet}, \beta_1^{\bullet}, \beta_2^{\bullet}, \beta_3^{\bullet}; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\right\}$.

Для полного интегрирования системы (4), (6) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов.

Предложение 2. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$
\begin{aligned}
&2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f_1^2(\alpha) \equiv 0,\\
&2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
&\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
&2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0,\\
&\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f_1^2(\alpha) + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0,\\
&\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0,
\end{aligned} \tag{7}
$$

*то система* (4), (6) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_4,\ z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{8}$$

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ системы (7) для наличия аналитического интеграла (8) для системы (4), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (7) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (4) выполнение условий

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) = f(\alpha), \tag{9}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (7):

$$
\begin{aligned}
&2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0,\\
&2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0,\\
&2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2} + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)h^2(\beta_2) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ пока зависят от коэффициентов связности, а ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3. *Если выполнены свойства* (9), (10), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{11}$$

*то система* (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{12}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)\ db\right\}.$$

Предложение 4. *Если выполнены условия предложения* 3, *а также*

$$g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) = g(\beta_1), \tag{13}$$

*при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{14}$$

*то система* (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2, z_1;\alpha,\beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{15}$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

П р е д л о ж е н и е 5. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) = \Gamma_3(\beta_2), \tag{16}$$

*то система* (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_4(z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \\ = \mathrm{const}, \tag{17}$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}.$$

П р е д л о ж е н и е 6. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, 5, *то система* (4), (6) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_5(z_2,z_1;\alpha,\beta) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}}db = C_5 = \\ = \mathrm{const}, \tag{18}$$

*где после взятия интеграла* (18) *вместо постоянных* $C_3$, $C_4$ *нужно подставить левые части равенств* (15), (17) *соответственно.*

Набор первых интегралов (8), (12), (15), (17), (18) является полным набором независимых первых интегралов системы (4), (6) при перечисленных выше условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи первых интегралов, будет показано ниже).

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ И ИХ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теперь несколько модифицируем систему (4), (6) при условиях (9)–(11), (13), (14), (16), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (19) при $b = 0$, которая на касательном расслоении $TM^4\left\{\alpha^\bullet,\ \beta_1^\bullet,\ \beta_2^\bullet,\ \beta_3^\bullet;\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3\right\}$ примет вид

$$\begin{gathered}
\alpha^\bullet = -z_4 + b\delta(\alpha),\\
z_4^\bullet = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_3^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2 + \\
+ \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)z_1^2,\\
z_3^\bullet = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)z_2^2 - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)z_1^2,\\
z_2^\bullet = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f(\alpha)z_2z_3 - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)z_1^2,\\
z_1^\bullet = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]f(\alpha)z_1z_3 - \\
- \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]f(\alpha)g(\beta_1)z_1z_2,\\
\beta_1^\bullet = z_3f(\alpha),\\
\beta_2^\bullet = z_2f(\alpha)g(\beta_1),\\
\beta_3^\bullet = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),
\end{gathered} \tag{19}$$

и она при $b = 0$ почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^\bullet\beta_1^\bullet + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^\bullet\beta_2^\bullet + 2\Gamma_2(\beta_1)\beta_1^\bullet\beta_2^\bullet + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_3^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^\bullet\beta_3^\bullet + 2\Gamma_2(\beta_1)\beta_1^\bullet\beta_3^\bullet + 2\Gamma_3(\beta_2)\beta_2^\bullet\beta_3^\bullet = 0.
\end{gathered}$$

Предложение 7. *Если выполнены условия предложения* 2, *то система* (19) *при* $b = 0$ *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_4, z_3, z_2, z_1, \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + F_1(\alpha) =$$

$$= C_1 = \text{const}, \; F_1(\alpha) = 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(b)db. \qquad (20)$$

Предложение 8. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, 5, *то система* (19) *при* $b = 0$ *имеет три гладких первых интеграла вида* (12), (15), (17).

Предложение 9. *Если выполнены условия предложения* 6, *то система* (19) *при* $b = 0$ *имеет первый интеграл вида* (18).

Набор первых интегралов (20), (12), (15), (17), (18) является полным набором независимых первых интегралов системы (19) (при $b = 0$) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи первых интегралов, будет показано ниже).

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ И ИХ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теперь рассмотрим систему (19) при $b \neq 0$. При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении системы (19), которая почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - b\alpha^{\bullet}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0, \\
\beta_1^{\bullet\bullet} - b\beta_1^{\bullet}\delta(\alpha)A(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} + \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0, \\
\beta_2^{\bullet\bullet} - b\beta_2^{\bullet}\delta(\alpha)A(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + 2\Gamma_2(\beta_1)\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + \Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} = 0, \\
\beta_3^{\bullet\bullet} - b\beta_3^{\bullet}\delta(\alpha)A(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta_3^{\bullet} + 2\Gamma_2(\beta_1)\beta_1^{\bullet}\beta_3^{\bullet} + 2\Gamma_3(\beta_2)\beta_2^{\bullet}\beta_3^{\bullet} = 0, \\
A(\alpha) = 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}.
\end{gathered}$$

Перейдём теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (19) при условиях (9), (10), (13), а также при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv$$

$$\equiv \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \qquad (21)$$

Введём также (по аналогии с (10)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (7):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \qquad (22)$$

Для полного интегрирования системы (19) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2},$$

$$w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \; w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}$$

система (19) распадается следующим образом:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet} = -w_4 + b\delta(\alpha), \\
w_4^{\bullet} = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)w_3^2, \\
w_3^{\bullet} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]w_3w_4;
\end{gathered} \qquad (23)$$

$$\begin{gathered}
w_2^{\bullet} = (\pm)w_3\sqrt{1 + w_2^2}f(\alpha)g(\beta_1) \times \\
\times \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\
\beta_2^{\bullet} = (\pm)\frac{w_2w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1);
\end{gathered} \qquad (24)$$

$$\begin{gathered}
w_1^{\bullet} = (\pm)w_3\sqrt{1 + w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\
\beta_1^{\bullet} = (\pm)\frac{w_1w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}}f(\alpha);
\end{gathered} \qquad (25)$$

$$\beta_3^{\bullet} = (\pm)\frac{w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \qquad (26)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (23)–(26) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (23), по одному для систем (24) и (25) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (26) (т.е. всего пять).

Теорема 1. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|,\quad F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{27}$$

*Тогда система* (19) *при выполнении условий* (9), (10), (13), (21), (22) *обладает полным набором (пятью) независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, при $\kappa = -1$ явный вид одного из интегралов для системы (23) таков:

$$\Theta_1(w_4, w_3;\alpha) = G_1\left(\frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{28}$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (23) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3;\alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}, \tag{29}$$

и, например, при $\kappa = -1$ находится из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int\frac{(b-u_4)du_4}{2\left(\lambda - bu_4 + u_4^2\right) - C_1\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - bu_4 + u_4^2)}\right\}/2},$$

где $u_4 = w_4/\delta(\alpha)$. При этом после взятия этого интеграла вместо $C_1$ необходимо подставить левую часть равенства (28). Его правая часть выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости от функции $\delta(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (28), (29) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Первые интегралы для систем (24) и (25) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const},\quad s = 1,\ 2, \tag{30}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (15), (17). А дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (26), находится по аналогии с (18):

$$\Theta_5(w_2, w_1;\ \alpha, \beta) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}\frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}}db = C_5 = \text{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных $C_3$, $C_4$ необходимо подставить соответствующие левые части равенства (30).

## ЗАМЕЧАНИЕ О СТРУКТУРЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если $\alpha$ – периодическая координата, то система (23) становится динамической системой с переменной диссипацией (с нулевым средним) [1, 2]. При $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (20), (12). В силу (27)

$$\Phi_1(z_4, z_3, z_2, z_1;\alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F(b)\,db \cong w_4^2 + w_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{31}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (22) и (27)

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)\,db\right\} \cong w_3\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{32}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (31), (32) (или (20), (12)) также является первым интегралом системы (23) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 - bw_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \tag{33}$$

и (32) по отдельности не является первым интегралом системы (23). Однако отношение функций (33), (32) является первым интегралом системы (23) $(\kappa = -1)$ при любом $b$.

Вообще же для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. также [7]).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{34}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{35}$$

Случай (34) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного пятимерного твёрдого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [8, 9]. Случай (35) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на четырёхмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на четырёхмерной сфере. В случае (34), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение пятимерного твёрдого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [1, 2]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\,\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\,\alpha$, то система описывает также обобщённый пятимерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15–01–00848-а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Шамолин М.В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2017. Т. 134. Ч. 1.
2. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // ДАН. 2011. Т. 437. № 2. С. 190–193.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.
4. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 168–172.
5. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
6. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа // ДАН. 1974. Т. 219. № 2. С. 228–237.
7. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
8. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // ДАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.
9. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // ДАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.