ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Январь 2018** **Выпуск 90. С. 107-113**

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
Москва, Россия
shamolin@rambler.ru

# СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ

Показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих в многомерной динамике. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним и обобщают ранее рассмотренные. Библиография: 10 назв.

В предыдущих работах автора (см. [**1**]–[**4**] и библиографию там же) рассматривались задачи о движении свободного $n$-мерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к $(n-1)$-мерной сфере. Данная работа присоединяет к данной задаче динамики многомерного твердого тела задачу о движении точки по $n$-мерной сфере в неконсервативных силовых полях.

## 1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к $n$-мерному многообразию

**1.1. Общие обозначения.** Рассмотрим гладкое $n$-мерное риманово многообразие $M^n$ с метрикой $g_{ij}$, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, \dots, x^n)$ на многообразии порождает аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим также касательное расслоение

$$T_*M^n\{z_n, \dots, z_1; x^1, \dots, x^n\},$$

где $z = (z_n, \dots, z_1)$ — координаты в касательном пространстве. Если $z_i = \dot{x}^i, i = 1, \dots, n$, то уравнения геодезических линий на нем примут вид

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0,\ i = 1, \dots, n. \tag{1.1}$$

**1.2. Замены координат касательного пространства.** Одной из целей исследования является изучение структуры уравнений (1.1) при изменении координат на касательном расслоении

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 15-01-00848-а).

$T_*M^n$. Рассмотрим замену координат касательного пространства

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} R^{ij} z_j, \tag{1.2}$$

которую можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} T_{ji} \dot{x}^i, \tag{1.3}$$

при этом $R^{ij}$, $T_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, — функции от $x^1, \ldots, x^n$, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (1.2) (или (1.3)) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении $T_*M^n$. Справедливы тождества

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{n} \dot{T}_{ji} \dot{x}^i + \sum_{i=1}^{n} T_{ji} \ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{n} T_{ji,k} \dot{x}^k, \tag{1.4}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j, i, k = 1, \ldots, n.$$

Подставляя в (1.4) уравнения (1.1), имеем

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{n} T_{ij,k} \dot{x}^j \dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{n} T_{ij} \Gamma^j_{pq} \dot{x}^p \dot{x}^q, \tag{1.5}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1, \ldots, n$, надо подставить формулы (1.2). Другими словами, равенство (1.5) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{n} Q_{ijk} \dot{x}^j \dot{x}^k |_{(1.2)} = 0, \tag{1.6}$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{n} T_{is}(x) \Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{1.7}$$

**Предложение 1.1.** *Система* (1.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (1.2), (1.5).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1.1) к эквивалентной системе уравнений (1.2), (1.5) зависит как от замены переменных (1.2) (или (1.3)) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}$.

## 2. Системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере

Рассмотрим следующую систему (2.1), (2.2) порядка $2(n-1)$:

$$\begin{aligned}
&\dot{\alpha} = -z_{n-1} + bg(\alpha),\\
&\dot{z}_{n-1} = F(\alpha) - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2) f(\alpha),\\
&\dot{z}_{n-2} = z_{n-2} z_{n-1} f(\alpha) + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2) f(\alpha),\\
&\dot{z}_{n-3} = z_{n-3} z_{n-1} f(\alpha) - z_{n-3} z_{n-2} f(\alpha) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2) f(\alpha) \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot{z}_1 = z_1 f(\alpha) \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} z_{n-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$
\begin{aligned}
&\dot\beta_1 = z_{n-2} f(\alpha),\\
&\dot\beta_2 = -z_{n-3} f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot\beta_{n-2} = (-1)^{n+1} z_1 f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}},
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}: 0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\ \beta_{n-2} \mod 2\pi\}$. Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \mod \pi/2$, $b\geqslant 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — силовое поле. Первое уравнение системы (2.1) и система (2.2) задают координаты $z_{n-1},\ldots,z_1$ в касательном пространстве к сфере (являются обобщенными кинематическими соотношениями). При этом система (2.1), (2.2) без последнего уравнения является независимой подсистемой порядка $2n-3$ (ввиду цикличности переменной $\beta_{n-2}$). Система (2.1), (2.2) также может быть представлена в маятниковом виде

$$
\begin{aligned}
&\ddot\alpha - b\dot\alpha g'(\alpha) + F(\alpha)\\
&\quad - [\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-3}]\frac{1}{f(\alpha)} = 0,\\
&\ddot\beta_1 - b\dot\beta_1 g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_1\Big[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\Big]\\
&\quad - [\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_2\sin^2\beta_3 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-3}]\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,\\
&\ddot\beta_2 - b\dot\beta_2 g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_2\Big[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\Big] + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\\
&\quad - [\dot\beta_3^2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_3 + \dot\beta_5^2\sin^2\beta_3\sin^2\beta_4 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-3}]\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0,\\
&\ddot\beta_3 - b\dot\beta_3 g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_3\Big[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\Big] + 2\dot\beta_1\dot\beta_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + 2\dot\beta_2\dot\beta_3\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\\
&\quad - [\dot\beta_4^2 + \dot\beta_5^2\sin^2\beta_4 + \dot\beta_6^2\sin^2\beta_4\sin^2\beta_5 + \ldots + \dot\beta_{n-2}^2\sin^2\beta_4\ldots\sin^2\beta_{n-3}]\sin\beta_3\cos\beta_3 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ddot\beta_{n-4} - b\dot\beta_{n-4} g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_{n-4}\Big[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\Big] + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-4}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots\\
&\quad + 2\dot\beta_{n-5}\dot\beta_{n-4}\frac{\cos\beta_{n-5}}{\sin\beta_{n-5}} - [\dot\beta_{n-3}^2 + \dot\beta_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3}]\sin\beta_{n-4}\cos\beta_{n-4} = 0,\\
&\ddot\beta_{n-3} - b\dot\beta_{n-3} g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_{n-3}\Big[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\Big] + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-3}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots\\
&\quad + 2\dot\beta_{n-4}\dot\beta_{n-3}\frac{\cos\beta_{n-4}}{\sin\beta_{n-4}} - \dot\beta_{n-2}^2\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-3} = 0,\\
&\ddot\beta_{n-2} - b\dot\beta_{n-2} g(\alpha)f(\alpha) + \dot\alpha\dot\beta_{n-2}\Big[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\Big] + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots\\
&\quad + 2\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

## 3. Первые интегралы, метрики и силовые поля

При $b = 0$ система (2.1), (2.2) является консервативной и обладает полным набором ($n$ штук) первых интегралов [**2**]:

$$F_1(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_1 = \mathrm{const}$$

$$F_2(z_{n-2}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi = C_2 = \mathrm{const}\,,$$

$$F_3(z_{n-3}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}\exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi \cdot \sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}\,,$$

....................................................................................

$$F_{n-1}(z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-3}) = z_1\exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi \cdot \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}\,,$$

$$F_n(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}\ .$$

При $b > 0$ система (2.1), (2.2) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [**5**]).

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{3.1}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{3.2}$$

Случай (3.1) формирует класс систем, соответствующих пространственному движению динамически симметричного $n$-мерного твердого тела на нулевых уровнях первых интегралов (т.е. при наличии дополнительных групп симметрий), вообще говоря, в неконсервативном поле сил [**5, 6, 2**].

Случай (3.2) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на $(n-1)$-мерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. При этом в последнем случае метрика на сфере индуцируется евклидовой метрикой всеобъемлющего $n$-мерного пространства. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (2.1), (2.2) описывает геодезический поток на $(n-1)$-мерной сфере (см. также [**7, 8, 9**]).

**Замечание 3.1.** В случае (3.1), если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система (2.1), (2.2) описывает движение свободного $n$-мерного твердого тела в силовом поле под действием следящей силы [**5, 6**]. В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin\alpha, \tag{3.3}$$

то система (2.1), (2.2) описывает также закрепленный $n$-мерный маятник на обобщенном сферическом шарнире, помещенный в поток набегающей среды, заполняющей $n$-мерное пространство [**5**], и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [**10**]. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы (2.1), (2.2).

Для полного интегрирования системы (2.1), (2.2) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных в касательном пространстве

$$\begin{aligned}
&w_1 = \frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}}, \\
&w_2 = \frac{z_{n-3}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&w_{n-4} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \\
&w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1}, \\
&w_{n-2} = w = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}, \\
&w_{n-1} = z_{n-1},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

система (2.1), (2.2) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\dot{\alpha} = -w_{n-1} + g(\alpha), \\
&\dot{w}_{n-1} = F(\alpha) - w_{n-2}^2 f(\alpha), \\
&\dot{w}_{n-2} = w_{n-2} w_{n-1} f(\alpha),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{w}_k = d_k \frac{1 + w_k^2}{w_k} \frac{\cos\beta_k}{\sin\beta_k}, \\
&\dot{\beta}_k = d_k,\ k = 1, \ldots, n-3,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\dot{\beta}_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin\beta_1 \sin\beta_2 \ldots \sin\beta_{n-3}}, \tag{3.7}$$

где $Z_1(w_1, \ldots, w_{n-1}) = z_1$ в силу замены (3.4), $d_k$, $k = 1, \ldots, n-3$, — некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.5)–(3.7) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.5), по одному — для систем (3.6) (т.е. $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (3.7) (т.е. всего $n$).

## 4. Случай (3.1)

Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m \alpha \cos\alpha,\ g(\alpha) = \sin^a \alpha,\ m = 2a - 1,\ m, a \in \mathbf{R}. \tag{4.1}$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (3.3).

**Теорема 4.1.** *В случаях* (3.1), (4.1) *система* (2.1), (2.2) *обладает полным набором* ($n$ *штук*)*, вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

**Следствие 4.1.** *Система* (2.3) *при условиях* (3.1), (4.1) *обладает* $n$*, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных $\tau = \sin\alpha$, $z_i = u_i \tau^a$, $i = 1, 2$, то поиск одного из первых интегралов $\Phi_1(w_{n-2}, w_{n-1}; \alpha) = C_1$ системы (3.5) приведет к уравнению Абеля

$$[(a+1)u_2 - ab]u_1 du_2 = [1 - u_1^2 + au_2^2 - abu_2]du_1, \tag{4.2}$$

общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это дополнительный первый интеграл $\Phi_2(w_{n-2}, w_{n-1}; \alpha) = C_2$ системы (3.5) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b - u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + au_2^2 - abu_2}. \tag{4.3}$$

Первые интегралы для систем (3.6) имеют вид

$$\Phi_k(w_k;\beta_k)=\frac{\sqrt{1+w_k^2}}{\sin\beta_k}=C_{k+2}=\mathrm{const},\quad k=1,\dots,n-3, \tag{4.4}$$

а дополнительный первый интеграл $\Phi_n(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})=C_n$, "привязывающий" уравнение (3.7), найдется из равенства

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}}=-\frac{1}{z_{n-3}\sin\beta_{n-3}}, \tag{4.5}$$

при этом, используя первый интеграл (4.4) при $k=n-3,n-4$, окончательно получим его вид:

$$\Phi_n(w_{n-4},w_{n-3};\beta_{n-4},\beta_{n-3},\beta_{n-2})=\beta_{n-2}\pm\operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3}-C_{n-1}^2}}=C_n=\mathrm{const}\,. \tag{4.6}$$

В частности, при $a=1$ равенство (4.2) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\Big(\frac{w_{n-1}}{\sin\alpha},\frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\Big)=\frac{w_{n-1}^2+w_{n-2}^2-bw_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}\,.$$

## 5. Случай (3.2)

Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha)=\frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha},\quad g(\alpha)=\frac{\sin^k\alpha}{\cos^k\alpha},\quad k\in\mathbf{R}. \tag{5.1}$$

**Теорема 5.1.** *В случаях* (3.2), (5.1) *система* (2.1), (2.2) *обладает полным набором* ($n$ *штук*), *вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

**Следствие 5.1.** *Система* (2.3) *при условиях* (3.2), (5.1) *обладает $n$, вообще говоря, трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных

$$\tau=\sin\alpha,\quad z_i=u_i\Big(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\Big)^k,\quad i=1,2,$$

то поиск одного из первых интегралов $\Phi_1(w_{n-2},w_{n-1};\alpha)=C_1$ системы (3.5) приведет к уравнению Абеля (4.2) (только с подстановкой $a\leftrightarrow k$), общее решение которого $u_1=U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл

$$\Phi_2(w_{n-2},w_{n-1};\alpha)=C_2$$

системы (3.5) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)}=\frac{(b-u_2)du_2}{1-U_1^2(u_2)+ku_2^2-kbu_2}.$$

Первые интегралы для систем (3.6) имеют вид (4.3). А дополнительный первый интеграл

$$\Phi_n(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})=C_n,$$

"привязывающий" уравнение (3.7), найдется из равенства (4.5), при этом, используя первый интеграл (4.4) при $k=n-3,n-4$, окончательно получим его в виде (4.6). В частности, при $k=1$ равенство (4.2) ($a\leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\Big(\frac{w_{n-1}\cos\alpha}{\sin\alpha},\frac{w_{n-2}\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big)=\frac{(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)\cos^2\alpha-bw_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha\cos\alpha}=C_1=\mathrm{const}\,.$$

## Литература


1. М. В. Шамолин, “Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле”, *Докл. РАН* **453**, No. 1, 46–49 (2013).
2. М. В. Шамолин, “Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения”, *Фундам. прикл. мат.* **20**, No. 4, 3–231 (2015).
3. М. В. Шамолин, “Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования”, *Докл. РАН* **464**, No. 6, 688–692 (2015).
4. М. В. Шамолин, “Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к сфере”, *Пробл. мат. анал.* **86**, 139–151 (2016).
5. М. В. Шамолин, “Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения”, *Фундам. прикл. мат.* **14**, No. 3, 3–237 (2008).
6. М. В. Шамолин, “Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил”, *Совр. мат. прил. Тематические обзоры* **125**, 5–254 (2013).
7. М. В. Шамолин, “Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbb{R}^4$”, *Успехи мат. наук* **60**, No. 6, 233–234 (2005).
8. М. В. Шамолин, “Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании”, *Прикл. мат. мех.* **69**, No. 6, 1003–1010 (2005).
9. М. В. Шамолин, “Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы”, *Успехи мат. наук* **62**, No. 5, 169–170 (2007).
10. М. В. Шамолин, “Об интегрируемости в трансцендентных функциях”, *Успехи мат. наук* **53**, No. 3, 209–210 (1998).


Статья поступила в редакцию 1 июля 2017 г.