ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 477, № 2, с. 168–172

МЕХАНИКА

УДК 525.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТРЁХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2017 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 01.06.2017 г.

Поступило 05.06.2017 г.

Показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к трёхмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

DOI: 10.7868/S0869565217320081

ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах динамики возникают механические системы с пространствами положений – трёхмерными многообразиями. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение четырёхмерного обобщённого сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к трёхмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3].

Известен также класс задач о движении точки по трёхмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удаётся найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРИ ЗАМЕНЕ КООРДИНАТ

Как известно, в случае трехмерного риманова многообразия M^3 с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении T_*M^3 $\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$x^{i\bullet\bullet} + \sum_{j,k=1}^{3} \Gamma^i_{jk}(x) x^{j\bullet} x^{k\bullet} = 0, \ i = 1, 2, 3. \qquad (1)$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^3. Рассмотрим замену координат касательного пространства

$$x^{i\bullet} = \sum_{j=1}^{3} R^{ij} z_j, \qquad (2)$$

которую можно обратить: $z_j = \sum_{i=1}^{3} T_{ji} x^{i\bullet}$, при этом R^{ij}, T_{ji}, $i, j = 1, 2, 3,$ – функции от x, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^3.

Справедливы равенства

$$z_i^{\bullet} = \sum_{j,k=1}^{3} T_{ij,k} x^{j\bullet} x^{k\bullet} - \sum_{j,p,q=1}^{3} T_{ij} \Gamma^j_{pq} x^{p\bullet} x^{q\bullet}, \qquad (3)$$

где $T_{ji,k} = \dfrac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}$, $j, i, k = 1, 2, 3$, при этом в последней системе вместо $x^{i\bullet}$, $i = 1, 2, 3$, надо подставить формулы (2).

П р е д л о ж е н и е 1. *Система* (1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (2), (3).

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (3) зависит как от замены переменных (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^{\bullet} = -z_3, \;\; \beta_1^{\bullet} = z_2 f_1(\alpha), \;\; \beta_2^{\bullet} = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \quad (4)$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\alpha)$ – гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2, z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [4, 5] (в частности, на поверхностях вращения):

$$\begin{gathered}\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0,\\ \beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} + \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0, \quad (5)\\ \beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + 2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet} = 0,\end{gathered}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (4) уравнения (3) примут вид

$$\begin{gathered}z_1^{\bullet} = \left[2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 -\\ - \left[2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1(\alpha) z_1 z_2,\\ z_2^{\bullet} = \left[2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \quad (6)\\ - \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) z_1^2,\\ z_3^{\bullet} = \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) z_2^2 +\\ + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2,\end{gathered}$$

и уравнения (5) почти всюду эквивалентны составной системе (4), (6) на многообразии $T{*}M^3$ $\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

Для полного интегрирования системы (4), (6) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов.

П р е д л о ж е н и е 2. *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$\begin{gathered}2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0,\\ 2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \quad (7)\\ + \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0,\\ \left[2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f_1^2(\alpha) +\\ + \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0,\end{gathered}$$

то система (4), (6) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1^2 = \text{const}. \quad (8)$$

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы (7) для наличия аналитического интеграла (8) для системы (4), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией все условия (7) нам не потребуются. Тем не менее далее будем предполагать в уравнениях (4) выполнение условия

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha), \quad (9)$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из (7):

$$2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) \equiv 0. \quad (10)$$

Таким образом, функция $g(\beta_1)$ зависит от коэффициентов связности, а вот ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

П р е д л о ж е н и е 3. *Если выполнены свойства* (9), (10), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad (11)$$

то система (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered}\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const},\\ \Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}. \quad (12)\end{gathered}$$

П р е д л о ж е н и е 4. *Если выполнено свойство* (9), *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \quad (13)$$

а также второе равенство из (11) $\left(\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha)\right)$, *то система* (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\begin{gathered}\Phi_3(z_1; \alpha, \beta_1) = z_1\Phi_0(\alpha)\Phi(\beta_1) = C_3 = \text{const},\\ \Phi(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}. \quad (14)\end{gathered}$$

Предложение 5. *Если выполнены условия* (9)–(11), (13), *то система* (4), (6) *имеет первый интеграл вида*

$$\Phi_4(z_2, z_1; \beta) =$$
$$= \beta_2 \pm \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}, \quad (15)$$

где после взятия интеграла (15) *вместо постоянных* C_2, C_3 *нужно подставить левые части равенств* (12), (14) *соответственно.*

При перечисленных выше условиях система (4), (6) обладает полным набором (четырьмя) независимых первых интегралов вида (8), (12), (14), (15).

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЕХМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Теперь несколько модифицируем систему (4), (6) при условиях (9)–(11), (13), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (16) при $b = 0$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $T{*}M^3$ $\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet} = -z_3 + b\delta(\alpha),\\
z_3^{\bullet} = F(\alpha) + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_2^2 +\\
+ \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2,\\
z_2^{\bullet} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 -\\
- \Gamma_{22}^{1}(\beta_1) f(\alpha) g^2(\beta_1) z_1^2, \qquad (16)\\
z_1^{\bullet} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 -\\
- \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha) z_1 z_2,\\
\beta_1^{\bullet} = z_2 f(\alpha),\\
\beta_2^{\bullet} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1),
\end{gathered}$$

и она при $b = 0$ почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} + F(\alpha) + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} + \Gamma_{22}^{1}(\beta_1)\beta_2^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + 2\Gamma_2(\beta_1)\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet} = 0.
\end{gathered}$$

Предложение 6. *Если выполнены условия предложения* 2, *то система* (16) *при* $b = 0$ *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1, \alpha) =$$
$$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad (17)$$
$$F_1(\alpha) = 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)\,da.$$

Предложение 7. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, *то система* (16) *при* $b = 0$ *имеет два гладких первых интеграла вида* (12), (14).

Предложение 8. *Если выполнены условия предложения* 5, *то система* (16) *при* $b = 0$ *имеет первый интеграл вида* (15).

При перечисленных условиях система (16) при $b = 0$ обладает полным набором (четырьмя) независимых первых интегралов вида (17), (12), (14), (15).

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ДВУМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

Теперь рассмотрим систему (16) при $b \neq 0$. При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $b\delta(\alpha)$ в первом уравнении системы (16), которая почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - b\alpha^{\bullet}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} +\\
+ \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_1^{\bullet\bullet} - b\beta_1^{\bullet}\delta(\alpha) f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} +\\
+ \Gamma_{22}^{1}(\beta_1)\beta_2^{\bullet 2} = 0,\\
\beta_2^{\bullet\bullet} - b\beta_2^{\bullet}\delta(\alpha) f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} +\\
+ 2\Gamma_2(\beta_1)\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet} = 0.
\end{gathered}$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (16) при условии (10), а также при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta) = \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \quad (18)$$

Введем также (по аналогии с (10)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$. Она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (7)

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) \equiv 0. \quad (19)$$

Для полного ее интегрирования необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z, z_*, \; z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \; z_* = \frac{z_2}{z_1},$$

система (16) распадается следующим образом:

$$\begin{gathered} \alpha^{\bullet} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ z_3^{\bullet} = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) z^2, \\ z^{\bullet} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z z_3, \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} z_*^{\bullet} = (\pm) z\sqrt{1+z_*^2}\, f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \beta_1^{\bullet} = (\pm)\frac{zz_*}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha), \end{gathered} \tag{21}$$

$$\beta_2^{\bullet} = (\pm)\frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{22}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (20)–(22) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (20), один – системы (21), и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (22) (т.е. всего четыре).

Т е о р е м а. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$\begin{gathered} \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|; \\ F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \end{gathered} \tag{23}$$

Тогда система (16) *при выполнении равенств* (10), (18), (19) *обладает полным набором (четырьмя) независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\kappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов для системы (20) таков:

$$\Theta_1(z_3, z; \alpha) = G_1\left(\frac{z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{z}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{z_3^2 + z^2 - bz_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{24}$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (20) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{z}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}, \tag{25}$$

и при $\kappa = -1$ он найдется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b-u_3)du_3}{2(\lambda - bu_3 + u_3^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - bu_3 + u_3^2)}\}/2},$$

где $u_3 = z_3/\delta(\alpha)$. При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 необходимо подставить левую часть равенства (24). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости от функции $g(\alpha)$. Поэтому выражение первых интегралов (24), (25) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $g(\alpha)$.

Первый интеграл для системы (21) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}; \tag{26}$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (14). А дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (22), находится по аналогии с (15):

$$\Theta_4(z_*; \beta) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3^2\Phi^2(b) - 1}} db = C_4 = \text{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо C_3 необходимо подставить левую часть равенства (26).

СТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α – периодическая координата периода 2π, то система (20) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [1–3]. При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (17), (12). В силу (23)

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1, \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)\, da \cong z^2 + z_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha), \tag{27}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (19) и (23)

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\, f(\alpha) \exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b)\, db\right\} \cong z\delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{28}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (27), (28) (или (17), (12)) также является первым интегралом системы (20) при $b = 0$. Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$z^2 + z_3^2 - bz_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha) \qquad (29)$$

и (28) по отдельности не является первым интегралом системы (20). Однако отношение функций (29), (28) является первым интегралом системы (20) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [1, 3, 6].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (30)$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \qquad (31)$$

Случай (30) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного четырёхмерного твёрдого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [7, 8]. Случай (31) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на трёхмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [9]. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на трёхмерной сфере. В случае (30), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает пространственное движение четырёхмерного твёрдого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [1–3]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает также обобщенный четырёхмерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3, 7, 8].

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15–01–00848-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2013. Т. 125. С. 5–254.
2. *Шамолин М.В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фундам. и прикл. математика. 2015. Т. 20. В. 4. С. 3–231.
3. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14. В. 3. С. 3–237.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
5. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа // ДАН. 1984. Т. 219. № 2. С. 228–237.
6. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.
7. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // ДАН. 2011. Т. 437. № 2. С. 190–193.
8. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // ДАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
9. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трёхмерной сферам // ДАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.