Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Российский университет дружбы народов
Российский фонд фундаментальных исследований
Математический Фонд Крыма

Сборник материалов международной конференции

КРОМШ-2017

XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам

Секции 1 - 4

Секция 1. Общая теория операторов
Секция 2. Спектральная теория операторов
Секция 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения и динамические системы
Секция 4. Дифференциальные уравнения в частных производных

Симферополь
«ДИАЙПИ»
2017

УДК 517.9:519.2
С 23

Печатается по решению Организационного комитета XXVII Крымской Осенней Математической Школы-симпозиума по спектральным и эволюционным задачам (ȿ ƫ ʆ ʄ ʐ -2017).

Ответственный за выпуск:

Копачевский Николай Дмитриевич, председатель Организационного комитета КРОМШ-2017, д.ф.-м.н., профессор.

Ответственный редактор:

Войтицкий Виктор Иванович, к.ф.-м.н., доцент.

Редакционная коллегия:

Копачевский Н. Д., Муратов М. А., Скубачевский А.Л., Шкаликов А. А.,
Войтицкий В. И., Пашкова Ю. С., Сёмкина Е. В., Ситшаева З. З., Старков П. А.

С 23 Сборник материалов международной конференции “XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральными эволюционным задачам” (КРОМШ-2017). Секции1–4.– Симферополь: ДИАЙПИ, 2017. – 154 с.

ISBN 978-5-9500828-0-1

В сборнике представлены материалы работ участников международной конференции “Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2017)”, посвященных различным направлениям исследований в области математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, финансовой математики, оптимального управления, теории игр, математического моделирования, дискретной математикии методики преподавания.

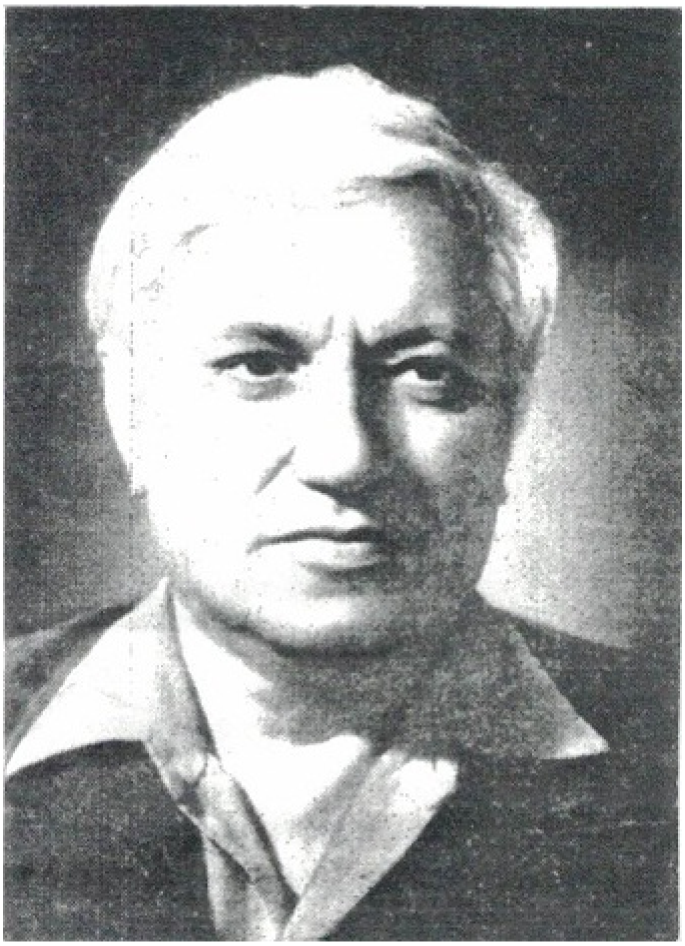
В книге сохранена авторская редакция статей, выполнено лишь частичное техническое редактирование; в связи с этим редакционная коллегия не несет ответственности за возможные неточности.

Материал, представленный в сборнике, может быть полезен научным сотрудникам, работникам высшего образования, аспирантам и студентам.

УДК 517.9:519.2

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-20489 Г).

ISBN 978-5-9500828-0-1



15 июля 2017 года исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося советского математика, ученого, учителя и замечательного человека Селима Григорьевича Крейна. Будучи доктором технических наук, профессором, первым заместителем директора по научной работе НИИ математики Воронежского государственного университета, Селим Григорьевич является основателем знаменитой Воронежской математической школы по функциональному анализу (вместе с профессорами Марком Александровичем Красносельским и Владимиром Ивановичем Соболевым). Об успешности этой школы и заслугах Селима Григорьевича говорит хотя бы тот факт, что по данным Американского Математического Общества первое место в мире по количеству учеников, имеющих ученую степень, за все времена занимает С.Г. Крейн. Под его руководством подготовлена 81 диссертация, 18 его учеников стали докторами наук, а двое из них — Ю.М. Березанский и Ю.Л. Далецкий стали действительными членами АН Украины.

В 1967 году по его инициативе и под его руководством впервые в Воронеже была проведена зимняя математическая школа. Эта конференция оказала значительное влияние на развитие контактов между математиками из разных городов и стран, а также на воспитание плеяды молодых математиков, ставших впоследствии известными учеными. До 1991 года Воронежские зимние математические школы проводились ежегодно. Крымская осенняя математическая школа во многом продолжает традиции Воронежской зимней математической школы и проводится с 1990 года. Селим Григорьевич был одним из инициаторов проведения математических школ в Крыму и участником КРОМШ в 1991 году.

Организационный комитет Крымской осенней математической школы посвящает конференцию 2017 года ***памяти Селима Григорьевича Крейна***.

[12] Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях / Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. // Труды Средневолжского математического общества. —2015. —Т. 17, № 3. — С. 12–17.

[13] Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О.В. Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором / Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. // Труды Московского математического общества. —2015. —Т. 76, № 2. — С. 271–286.

[14] Гринес В.З., Жужома Е.В., Починка О.В. Грубые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один / Гринес В. З., Жужома Е. В., Починка О. В. // СМФН. —2015. —Т. 57. —С. 5-–30.

УДК: 517+531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Шамолин М. В.

доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова (Российская Федерация, Москва)

E-mail: shamolin@rambler.ru

Во многих задачах динамики возникают механические системы с пространствами положений — двумерными многообразиями (сферами, более общими поверхностями вращения, цилиндрами и т.д.). Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

1. Уравнения геодезических и их первые интегралы

Как известно, в случае двумерного риманова многообразия M^2 с координатами (α, β) и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^2\{\dot\alpha, \dot\beta; \alpha, \beta\}$ примут следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0,$$
$$\ddot\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta + \Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0.$$

Рассмотрим замену координат касательного пространства: $\dot\alpha = R_1z_1 + R_2z_2,\ \dot\beta = R_3z_1 + R_4z_2$, которую можно обратить: $z_1 = T_1\dot\alpha + T_2\dot\beta,\ z_2 = T_3\dot\alpha + T_4\dot\beta$, при этом $R_k, T_k, k = 1, \ldots, 4,$ — функции от α, β. Назовем эти уравнения *новыми кинематическими соотношениями.* Справедливы тождества:

$$\dot z_1 = \dot\alpha^2\{T_{1\alpha} - T_1\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} - T_2\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}\} + \dot\alpha\dot\beta\{T_{1\beta} + T_{2\alpha} - 2T_1\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - 2T_2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\} + \dot\beta^2\{T_{2\beta} - T_1\Gamma^\alpha_{\beta\beta} - T_2\Gamma^\beta_{\beta\beta}\},$$
$$\dot z_2 = \dot\alpha^2\{T_{3\alpha} - T_3\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} - T_4\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}\} + \dot\alpha\dot\beta\{T_{3\beta} + T_{4\alpha} - 2T_3\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - 2T_4\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\} + \dot\beta^2\{T_{4\beta} - T_3\Gamma^\alpha_{\beta\beta} - T_4\Gamma^\beta_{\beta\beta}\},$$

где $T_{k\alpha} = \partial T_k/\partial\alpha,\ T_{k\beta} = \partial T_k/\partial\beta,\ k = 1, \ldots, 4.$

Рассмотрим достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде: $\dot\alpha = -z_2,\ \dot\beta = z_1 f(\alpha)$, где $f(\alpha)$ — гладкая функция (см. также [1, 2]). Если выполнены следующие свойства $\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta) \equiv 0$, то система, эквивалентная уравнениям геодезических, может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_2, \\ \dot z_2 = \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta = z_1 f(\alpha). \end{cases} \tag{1}$$

Предложение 1. *Если всюду справедливо равенство*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)+2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\equiv 0, \tag{2}$$

то система (1) имеет аналитический первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_1(z_2,z_1)=z_1^2+z_2^2=C_1^2=const. \tag{3}$$

Предложение 2. *Если функция* $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ *является функцией лишь* α*:*

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{4}$$

то система (1) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_2(z_1;\alpha)=z_1\Phi_0(\alpha)=C_2=const,\ \Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)db\right\}. \tag{5}$$

Если выполнено свойство (4) и функция $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также является функцией лишь α: $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)$, то в системе (1) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на $\dot\beta$ отделяется). В частности, если выполнены свойства (2), (4), то такая независимая подсистема появляется.

Предложение 3. *Если выполнены условия (2), (4), то система (1) имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta)=\beta\pm\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2f(a)}{\sqrt{C_1^2\Phi_0^2(a)-C_2^2}}\,da=C_3=const, \tag{6}$$

где, после взятия интеграла (6), вместо постоянных C_1,C_2 *нужно подставить левые части равенств (3), (5), соответственно (см. также* [3]*).*

2. Динамика на касательном расслоении к двумерному многообразию в силовом поле с диссипацией

Несколько модифицируем систему (1), получив систему с диссипацией. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $bg(\alpha), b>0$, в первом уравнении системы (7). Добавляется также потенциальное поле сил в виде коэффициента $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (7). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^2\{z_2,z_1;\alpha,\beta\}$ примет вид

$$\begin{cases}\dot\alpha=-z_2+bg(\alpha),\\ \dot z_2=F(\alpha)+\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_1^2,\\ \dot z_1=\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2,\\ \dot\beta=z_1f(\alpha).\end{cases} \tag{7}$$

Система (7) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha-bg'(\alpha)\dot\alpha+F(\alpha)+\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2=0,\ \ddot\beta-bg(\alpha)f(\alpha)\dot\beta+2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta=0.$$

Перейдем теперь к интегрированию системы (7) при выполнении свойств (2), (4).

Теорема. *Пусть для некоторых* $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)=\kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|g(\alpha)|,\ F(\alpha)=\lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{g^2(\alpha)}{2}. \tag{8}$$

Тогда система (7) обладает тремя независимыми трансцендентными первыми интегралами (см. также [4, 5]*).*

Действительно, для начала сопоставим рассматриваемой системе третьего порядка неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dz_2}{d\alpha}=\frac{F(\alpha)+\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)z_1^2}{-z_2+bg(\alpha)},\ \frac{dz_1}{d\alpha}=\frac{\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2}{-z_2+bg(\alpha)}. \tag{9}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам $z_k = u_k g(\alpha),\ k = 1, 2$, приводим систему (9) к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
g(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} &= \frac{F_3(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) g(\alpha) u_1^2 + g'(\alpha) u_2^2 - b g'(\alpha) u_2}{-u_2 + b},\ F_3(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{g(\alpha)},\\
g(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{-\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) g(\alpha) u_1 u_2 + g'(\alpha) u_1 u_2 - b g'(\alpha) u_1}{-u_2 + b},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

А вот теперь для интегрирования системы (10) потребуем выполнения условий (8). Действительно, после выполнения условий (8) система (10) приводится к уравнению первого порядка

$$
\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda + \kappa u_1^2 + u_2^2 - b u_2}{(1-\kappa) u_1 u_2 - b u_1}. \tag{11}
$$

Уравнение Абеля (11), в частности, при $\kappa = -1$ имеет следующий первый интеграл:

$$
\frac{u_2^2 + u_1^2 - b u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \mathrm{const},
$$

который в прежних переменных выглядит как

$$
\Theta_1(z_2, z_1; \alpha) = \frac{z_2^2 + z_1^2 - b z_2 g(\alpha) + \lambda g^2(\alpha)}{z_1 g(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{12}
$$

Находятся и два других первых интеграла, которые будут иметь следующий структурный вид:

$$
\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = G\left(\frac{z_2}{g(\alpha)}, \frac{z_1}{g(\alpha)}, g(\alpha)\right) = C_2,\ \Theta_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = H\left(\frac{z_2}{g(\alpha)}, \frac{z_1}{g(\alpha)}, \alpha, \beta\right) = C_3.
$$

3. Заключение

Напомним, что самому понятию интегрируемости придают различные значения в соответствии с тем, в каких функциях производится интегрирование (аналитических, гладких, мероморфных и др.), каким образом понимается смысл интегрируемости. В данной работе обсуждается вопрос интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классе трансцендентных функций, т.е. функций, которые после продолжения в комплексную область имеют существенно особые точки. Понятие интегрируемости в классе трансцендентных функций возникает по причине наличия у системы асимптотических (притягивающих или отталкивающих) предельных множеств, т.е. множеств, окрестности которых состоят из многообразий размерности выше 1, полностью притягиваемых или отталкиваемых данными предельными множествами.

Более того, если разрыв трансцендентных интегралов происходит на асимптотических предельных множествах (т.е. на целых многообразиях), то удается выяснить наличие в системе предельных циклов. И хотя в последнем случае трансцендентный первый интеграл, как правило, не выражается через элементарные функции, он имеет многообразие неизолированных существенно особых точек.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-00848-а).

Список литературы

[1] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела / М. В. Шамолин. – М.: Экзамен, 2007. – 352 с.

[2] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения / М. В. Шамолин // Фундам. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14, вып. 3. – С. 3–237.

[3] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем / В. В. Трофимов // Фундам. и прикл. матем. – 2010. – Т. 16, вып. 4. – С. 3–229.

[4] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / М. В. Шамолин // Итоги науки и техники. Сер. “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”. – 2013. – Т. 125. – С. 3–254.

[5] Шамолин М.В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения / М. В. Шамолин // Фундам. и прикл. матем. – 2015. – Т. 20, вып. 4. – С. 3–231.