М. В. Шамолин, Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 2016, выпуск 31, 257–323

М. В. Шамолин*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ**

ВВЕДЕНИЕ

Работа представляет собой развитие результатов по интегрированию динамической части уравнений движения трехмерного ($3D$-) твердого тела, находящегося в некотором поле сил, построенном при условии квазистационарного взаимодействия твердого тела со средой [19, 25, 27—29]. Отметим также ряд работ автора по интегрированию аналогичных уравнений движения двумерного ($2D$-) [32, 33] и четырехмерного ($4D$-) твердого тела [37, 42, 46, 50], находящегося в неконсервативном поле сил.

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получены новые случаи интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

и отталкивающих фокусов или узлов, предельных циклов) (см. также [1, 15, 16, 18, 20, 21]).

Ранее [44, 45] были изучены системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Приводился достаточно общий вид таких систем третьего порядка, которые допускают наличие трансцендентных первых интегралов [35, 36, 43].

Во многих задачах многомерной динамики возникают механические системы, пространствами положений которых являются сферы конечной размерности. Соответственно, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к таким сферам. Так, например, физический маятник на цилиндрическом шарнире в плоскопараллельном силовом поле может быть рассмотрен на своем фазовом цилиндре, а изучение пространственного (трехмерного) маятника на сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере.

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики n-мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле породили системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. В работе будет тщательно разобран индуктивный переход от систем на касательных расслоениях к маломерным сферам до систем на касательных расслоениях к сферам произвольной размерности. При этом исследование начинается для систем при отсутствии силового поля и продолжается системами при наличии некоторых неконсервативных силовых полей (см. также [24, 30, 31, 48, 49]).

В [19, 45] автором была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [40, 47, 53, 58, 60—62] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

Далее [51, 52, 54—57, 59], была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску.

В настоящей работе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РАССУЖДЕНИЯ

1. Случаи динамической симметрии многомерного тела. Пусть n-мерное твердое тело Θ массы m с гладкой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Theta$ находится в некотором (вообще говоря, неконсервативном) поле сил (это можно интерпретировать как движение тела в сопротивляющейся среде, заполняющей n-мерную область евклидова пространства $\mathbf{E}^n$).

Предположим, что оно является динамически симметричным. Так, например, для четырехмерного тела имеются две логические возможности представления его тензора инерции в случае наличия *двух* независимых равенств главных моментов инерции: в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\} \tag{1}$$

(так называемый случай (1—3)), либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\} \tag{2}$$

(случай (2—2)). В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии), а во втором случае двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 являются плоскостями динамической симметрии тела.

Для пятимерного тела было бы логично рассмотреть случаи *трех* независимых равенств главных моментов инерции: в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$ оператор инерции имеет либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2, I_2\} \tag{3}$$

(случай (1—4)), либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3, I_3\} \tag{4}$$

(случай (2—3)). В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4x_5$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии), а во втором случае двумерная и трехмерная плоскости Dx_1x_2 и $Dx_3x_4x_5$ являются плоскостями динамической симметрии тела.

Соответственно, для n-мерного тела было бы логично рассмотреть случаи $n-1$ независимых равенств главных моментов инерции. При этом возможны $[n/2]$ (здесь $[\ldots]$ — целая часть) вариантов вида (1), (2) (или (3), (4)). Так, например, для шестимерного тела возможны три случая: (1—5), (2—4), (3—3).

Для случая n-мерного твердого тела нас будет прежде всего интересовать случай $(1—(n-1))$, т. е. когда в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1\ldots x_n$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, \ldots, I_2\}, \tag{5}$$

а именно — в гиперплоскости $Dx_2\ldots x_n$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии).

2. Динамика на $\mathrm{so}(n)$ и $\mathbf{R}^n$. Конфигурационным пространством свободного n-мерного твердого тела является прямое произведение пространства $\mathbf{R}^n$ (определяющего координаты центра масс тела) на группу его вращений $\mathrm{SO}(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс)

$$\mathbf{R}^n \times \mathrm{SO}(n), \tag{6}$$

и оно имеет размерность

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Соответственно, размерность фазового пространства равна $n(n+1)$.

В частности, если Ω — тензор угловой скорости n-мерного твердого тела (а он является тензором второго ранга [7—9]), $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли* $\mathrm{so}(n)$, имеет следующий вид $[3, 4, 11, 13, 22, 23]$:

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega,\, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{7}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{8}$$

$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + \ldots + I_n}{2}, \ldots,$$
$$\lambda_{n-1} = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-2} - I_{n-1} + I_n}{2}, \quad \lambda_n = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n}{2},$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроецированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, $[\,,\,]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(n)$. Так, например, кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга) $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$.

При этом, очевидно, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i \tag{10}$$

для любых $i, j = 1, \ldots, n$.

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathrm{so}(n), \tag{11}$$

переводящее пару векторов

$$(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \tag{12}$$

из $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$, где

$$\mathbf{DN} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}, \quad \mathbf{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}, \tag{13}$$

$\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (здесь $\mathbf{DN}$ — вектор, идущий из начала D координат системы $Dx_1 \ldots x_n$ в точку N приложения силы). При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_n \\ F_1 & F_2 & \ldots & F_n \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Всевозможные миноры второго порядка (а их в точности $n(n-1)/2$ штук) со знаком данной матрицы — это и есть координаты момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$, а сам момент отождествляется с некоторым элементом алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$.

Поскольку введена упорядоченность координат $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, то введем такую же упорядоченность и для вычисления момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$. Действительно, первая группа G_1 координат искомого момента состоит из $n-1$ знакочередующихся миноров —

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-1} & \delta_n \\ F_{n-1} & F_n \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_n \\ F_{n-2} & F_n \end{vmatrix}, \ +\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_n \\ F_{n-3} & F_n \end{vmatrix}, \ldots, \ (-1)^n \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_n \\ F_1 & F_n \end{vmatrix}.$$

Вторая группа G_2 координат состоит из $n-2$ знакочередующихся миноров —

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_{n-1} \\ F_{n-2} & F_{n-1} \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_{n-1} \\ F_{n-3} & F_{n-1} \end{vmatrix},$$
$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-4} & \delta_{n-1} \\ F_{n-4} & F_{n-1} \end{vmatrix}, \ldots, \ (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_{n-1} \\ F_1 & F_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Продолжая далее, заключительная группа G_{n-1} координат состоит из одного минора —

$$+\begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}.$$

Как видно, первые миноры в любой группе начинаются со знака «+».

Полученное упорядоченное множество из $n(n-1)/2$ величин будем называть координатами момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$.

Исследуемые в дальнейшем динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним [39,45,46]. При этом нам потребуется практически «в лоб» исследовать часть основного уравнения динамики, а именно уравнение Ньютона. Здесь оно предстает перед нами как уравнение движения центра масс — *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству* $\mathbf{R}^n$:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{15}$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс C тела, m — его масса, при этом по многомерной формуле Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \quad \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega}, \tag{16}$$

здесь $\mathbf{w}_D$ — ускорение точки D, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Если положение тела Θ в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ определяется функциями, которые являются в следующем смысле циклическими, т. е. обобщенная сила $\mathbf{F}$ и ее момент $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ зависят лишь от обобщенных скоростей (квазискоростей, и не зависят от положения тела в пространстве), то система уравнений (7), (15) на многообразии $\mathbf{R}^n \times \mathrm{so}(n)$ определяет *замкнутую* систему динамических уравнений движения свободного n-мерного твердого тела под действием внешней силы $\mathbf{F}$. Данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (6) и может быть исследована самостоятельно.

§ 2. БОЛЕЕ ОБЩАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ СО СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

1. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного (случай (5)) твердого тела с «передним торцом» ($(n-1)$-мерным диском, «взаимодействующим со средой, заполняющей n-мерное пространство») в поле силы $\mathbf{S}$ сопротивления в условиях квазистационарности.

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр $(n-1)$-мерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), Ω — тензор угловой скорости тела, $Dx_1 \ldots x_n$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, Dx_3, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, \ldots, I_n = I_2, m$ — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \ldots x_n$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, \ldots, 0\}, \quad \mathbf{v}_D = v\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{17}$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} - \tag{18}$$

единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$.

При этом в случае (5) примем также разложение для функции воздействия среды на n-мерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, \ldots, 0\}, \tag{19}$$

т. е. в данном случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [25], см. далее), которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbf{R}^n$, при этом касательные силы воздействия среды на $(n-1)$-мерный диск отсутствуют. Так, например, в случае $n = 5$ данная система примет вид

$$\begin{gathered}\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha - \omega_{10}v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_9 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \\ - \omega_7 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_4 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ + \sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = -\frac{S}{m},\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}\, v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\ + \omega_{10}v\cos\alpha - \omega_8 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_6 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\ -\omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_9\omega_8 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) - \sigma\dot{\omega}_{10} = 0,\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\alpha}\, v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \\ - \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \omega_8 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\ - \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \\ - \sigma(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) + \sigma\dot{\omega}_9 = 0,\end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\alpha}\, v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\ + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3 - \\ - \dot{\beta}_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \omega_7 v\cos\alpha - \omega_6 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \\ + \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ + \sigma(\omega_6\omega_{10} + \omega_5\omega_9 - \omega_1\omega_4) - \sigma\dot{\omega}_7 = 0,\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + \\ + \dot{\beta}_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \omega_4 v\cos\alpha + \omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\ - \omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\ - \sigma(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) + \sigma\dot{\omega}_4 = 0,\end{gathered} \tag{24}$$

где

$$S = s(\alpha)v^2, \quad \sigma = CD, \quad v > 0. \tag{25}$$

Далее, вспомогательная матрица (14) для вычисления момента силы сопротивления примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствует алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$. Так, например, в случае $n = 5$ данная система примет вид

$$(\lambda_4 + \lambda_5)\,\dot\omega_1 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_4\omega_7 + \omega_3\omega_6 + \omega_2\omega_5) = 0, \tag{27}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_5)\,\dot\omega_2 + (\lambda_5 - \lambda_3)(\omega_1\omega_5 - \omega_3\omega_8 - \omega_4\omega_9) = 0, \tag{28}$$

$$(\lambda_2 + \lambda_5)\,\dot\omega_3 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_4\omega_{10} - \omega_2\omega_8 - \omega_1\omega_6) = 0, \tag{29}$$

$$\begin{gathered}(\lambda_1 + \lambda_5)\,\dot\omega_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) = \\ = -x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2,\end{gathered} \tag{30}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_4)\,\dot\omega_5 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_7\omega_9 + \omega_6\omega_8 + \omega_1\omega_2) = 0, \tag{31}$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\,\dot\omega_6 + (\lambda_4 - \lambda_2)(\omega_5\omega_8 - \omega_7\omega_{10} - \omega_1\omega_3) = 0, \tag{32}$$

$$\begin{gathered}(\lambda_1 + \lambda_4)\,\dot\omega_7 + (\lambda_1 - \lambda_4)(\omega_1\omega_4 - \omega_6\omega_{10} - \omega_5\omega_9) = \\ = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2,\end{gathered} \tag{33}$$

$$(\lambda_2 + \lambda_3)\,\dot\omega_8 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_9\omega_{10} + \omega_5\omega_6 + \omega_2\omega_3) = 0, \tag{34}$$

$$\begin{gathered}(\lambda_1 + \lambda_3)\,\dot\omega_9 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) = \\ = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2,\end{gathered} \tag{35}$$

$$\begin{gathered}(\lambda_1 + \lambda_2)\,\dot\omega_{10} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_8\omega_9 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) = \\ = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2.\end{gathered} \tag{36}$$

Таким образом, фазовым пространством системы (20)—(24), (27)—(36) 15-го порядка является прямое произведение 5-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(5)$:

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^4 \times \mathrm{so}(5), \tag{37}$$

а в общем случае это пространство

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^{n-1} \times \mathrm{so}(n). \tag{38}$$

2. Следствия динамической симметрии. Сразу же заметим, что система (7), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \ldots = I_n, \tag{39}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \mathrm{const}, \ldots, \ \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \mathrm{const}, \quad s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{40}$$

При этом $k_1 = 1, \ldots, k_s$ — некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$. Рассмотрим набор (40) первых интегралов на своих нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = \ldots = \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{41}$$

В частности, система (20)—(24), (27)—(36) обладает первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0, \quad \omega_3 \equiv \omega_3^0, \quad \omega_5 \equiv \omega_5^0, \quad \omega_6 \equiv \omega_6^0, \quad \omega_8 \equiv \omega_8^0, \tag{42}$$

рассматриваемых на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0. \tag{43}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось

$$p = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n - 1$$

штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества W_1, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

3. Неинтегрируемая связь и выбор следящей силы. Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [19, 28])

$$v \equiv \mathrm{const}, \tag{44}$$

то в системе (7), (15) (или, в частности, при $n = 5$ в системе (20)—(24), (27)—(36)) вместо F_1 будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2, \quad \sigma = DC. \tag{45}$$

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (44). Действительно, формально выражая величину T, в силу системы (7), (15) получим при $\cos\alpha \neq 0$, $n > 2$

$$\begin{gathered} T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = m\sigma(\omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_p}^2) + \\ + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma}{(n-2)I_2} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \end{gathered} \tag{46}$$

где

$$\begin{gathered} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = \big(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\big) = \\ = 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN} \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}). \end{gathered} \tag{47}$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \ldots, n$ $(i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0)$, — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ (заданной равенством (44)), а именно:

$$\begin{gathered} \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ i_{2N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{3N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ \ldots \\ i_{n-1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{nN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} \cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right) \end{gathered} \tag{48}$$

(см. (18)).

При получении равенства (46) используются условия (40)—(44).

4. Редукции в системе. На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (44). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (7), (15) в результате действий (выполнение равенств (44), (40), (41)) порождает независимую систему порядка

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1=2\,(n-1) \tag{49}$$

или, в частности, при $n=5$ система (20)—(24), (27)—(36) в результате действий порождает независимую систему восьмого порядка следующего вида:

$$\dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1-\dot{\beta}_1v\sin\alpha\sin\beta_1+\omega_{10}v\cos\alpha-\sigma\dot{\omega}_{10}=0, \tag{50}$$

$$\begin{gathered}\dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\dot{\beta}_1v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2-\\-\dot{\beta}_2v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2-\omega_9v\cos\alpha+\sigma\dot{\omega}_9=0,\end{gathered} \tag{51}$$

$$\begin{gathered}\dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot{\beta}_1v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\\+\dot{\beta}_2v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3-\dot{\beta}_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\\+\omega_7v\cos\alpha-\sigma\dot{\omega}_7=0,\end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered}\dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot{\beta}_1v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\\+\dot{\beta}_2v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3+\}\dot{\beta}_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\\-\omega_4v\cos\alpha+\sigma\dot{\omega}_4=0,\end{gathered} \tag{53}$$

$$3I_2\dot{\omega}_4=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{54}$$

$$3I_2\dot{\omega}_7=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{55}$$

$$3I_2\dot{\omega}_9=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{56}$$

$$3I_2\dot{\omega}_{10}=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{57}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v.

Система (50)—(57) эквивалентна

$$\begin{gathered}\dot\alpha v\cos\alpha + \\ + v\cos\alpha\{\omega_{10}\cos\beta_1 + [(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2]\sin\beta_1\} + \\ + \sigma\{-\dot\omega_{10}\cos\beta_1 + [\dot\omega_9\cos\beta_2 - (\dot\omega_7\cos\beta_3 - \dot\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2]\sin\beta_1\} = 0,\end{gathered} \tag{58}$$

$$\begin{gathered}\dot\beta_1 v\sin\alpha + \\ + v\cos\alpha\{[(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2]\cos\beta_1 - \omega_{10}\sin\beta_1\} + \\ + \sigma\{[\dot\omega_9\cos\beta_2 - (\dot\omega_7\cos\beta_3 - \dot\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2]\cos\beta_1 + \dot\omega_{10}\sin\beta_1 t\} = 0,\end{gathered} \tag{59}$$

$$\begin{gathered}\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\ + v\cos\alpha\{[\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3]\cos\beta_2 + \omega_9\sin\beta_2\} + \\ + \sigma\{-[\dot\omega_7\cos\beta_3 - \dot\omega_4\sin\beta_3]\cos\beta_2 - \dot\omega_9\sin\beta_2\} = 0,\end{gathered} \tag{60}$$

$$\begin{gathered}\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + v\cos\alpha\,\{-\omega_4\cos\beta_3 - \omega_7\sin\beta_3\} + \\ + \sigma\,\{\dot\omega_4\cos\beta_3 + \dot\omega_7\sin\beta_3\} = 0,\end{gathered} \tag{61}$$

$$\dot\omega_4 = -\frac{v^2}{3I_2}x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{62}$$

$$\dot\omega_7 = \frac{v^2}{3I_2}x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{63}$$

$$\dot\omega_9 = -\frac{v^2}{3I_2}x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{64}$$

$$\dot\omega_{10} = \frac{v^2}{3I_2}x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha). \tag{65}$$

5. Новые квазискорости в системе. Введем новые квазискорости в системе (7), (15). Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции следующих $n-2$ поворотов:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1}\end{pmatrix} = \\ = T_{n-2,n-1}(-\beta_1)\circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2)\circ\ldots\circ T_{1,2}(-\beta_{n-2})\begin{pmatrix}\omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}}\end{pmatrix},\end{gathered} \tag{66}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{67}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix},$$

$$m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\beta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\beta.$$

В частности, при $n = 5$ вводятся новые квазискорости в системе (20)—(24), (27)—(36). Для этого преобразуются величины ω_4, ω_7, ω_9, ω_{10} посредством композиции следующих трех поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = T_{3,4}(-\beta_1) \circ T_{2,3}(-\beta_2) \circ T_{1,2}(-\beta_3) \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix}, \tag{68}$$

где

$$T_{3,4}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

$$T_{2,3}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{1,2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в частности, для системы (20)—(24), (27)—(36) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
z_1 = \omega_4\cos\beta_3 + \omega_7\sin\beta_3,\\
z_2 = (\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\cos\beta_2 + \omega_9\sin\beta_2,\\
z_3 = [(-\omega_7\cos\beta_3 + \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 + \omega_9\cos\beta_2]\cos\beta_1 + \omega_{10}\sin\beta_1,\\
z_4 = [(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2]\sin\beta_1 + \omega_{10}\cos\beta_1.
\end{gathered}\tag{69}$$

6. Системы нормального вида. Как видно из (58)—(65), на многообразии

$$\begin{aligned}
O_1 = \Big\{&(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\omega_4,\omega_7,\omega_9,\omega_{10}) \in \mathbf{R}^8 :\\
&\alpha = \frac{\pi}{2}k,\ \beta_1 = \pi l,\ \beta_2 = \pi m,\ k,l,m \in \mathbf{Z}\Big\}
\end{aligned}\tag{70}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot\alpha$, $\dot\beta_1$, $\dot\beta_2$, $\dot\beta_3$. Формально, таким образом, на многообразии (70) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном и любых l, m неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v,\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (58) вырождается.

Из этого следует, что система (58)—(65) вне и только вне многообразия (70) эквивалентна системе

$$\dot\alpha = -z_4 + \frac{\sigma v}{3I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),\tag{71}$$

$$\begin{gathered}
\dot z_4 = \frac{v^2}{3I_2}\,s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) - (z_1^2+z_2^2+z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +\\
+ \frac{\sigma v}{3I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Big\{-z_3\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) +\\
+ z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) - z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\Big\},
\end{gathered}\tag{72}$$

$$\begin{gathered}
\dot z_3 = z_3z_4\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +\\
+ \frac{\sigma v}{3I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Big\{z_4\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) -
\end{gathered}$$

$$
\left.- z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\} -
$$

$$
- \frac{v^2}{3I_2}\, s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{73}
$$

$$
\begin{gathered}
\dot z_2 = z_2 z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\
+ \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_4 + z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\} + \\
+ \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\} + \\
+ \frac{v^2}{3I_2}\, s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),
\end{gathered} \tag{74}
$$

$$
\begin{gathered}
\dot z_1 = z_1 z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\
+ \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{z_4 - z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\} - \\
- \frac{v^2}{3I_2}\, s(\alpha)\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),
\end{gathered} \tag{75}
$$

$$
\dot\beta_1 = z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{76}
$$

$$
\dot\beta_2 = -z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{77}
$$

$$
\begin{gathered}
\dot\beta_3 = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} + \\
+ \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),
\end{gathered} \tag{78}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1 + \frac{\pi}{2},\beta_2,\beta_3\right)\right), \\
\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2 + \frac{\pi}{2},\beta_3\right)\right), \\
\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\beta_3 + \frac{\pi}{2}\right)\right),
\end{gathered} \tag{79}
$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ представляется в виде (47).

На многообразии

$$O_1' = \Big\{(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}) \in \mathbf{R}^{2(n-1)}:$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}k,\ \beta_1 = \pi l_1, \ldots, \beta_{n-3} = \pi l_{n-3},\ k, l_1, \ldots, l_{n-3} \in \mathbf{Z}\Big\} \tag{80}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot\alpha, \dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_{n-2}$. Формально, таким образом, на многообразии (80) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном и любых $l_1, \ldots, l_{n-3}$ неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом одно уравнение вырождается.

Из этого следует, что система (7), (15) вне и только вне многообразия (80) может быть приведена к следующему виду ($n > 2$):

$$\dot\alpha = -z_{n-1} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right), \tag{81}$$

$$\dot z_{n-1} = \frac{v^2}{(n-2)I_2}\, s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) -$$
$$- (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$
$$+ \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^s z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\right\}, \tag{82}$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$
$$+ \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\left\{z_{n-1}\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) +\right.$$
$$\left.+ \sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1} z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\} -$$
$$- \frac{v^2}{(n-2)I_2}\, s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right), \tag{83}$$

$$\dot z_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-3}z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$
$$- (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$

$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\left\{\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\left[-z_{n-1}+z_{n-2}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^s z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}-$$

$$+\frac{v^2}{(n-2)I_2}\,s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \tag{84}$$

. . . .

$$\dot z_1=\dot\beta_{n-2}(-\omega_{r_1}\sin\beta_{n-2}+\omega_{r_2}\cos\beta_{n-2})+$$

$$+(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}\,s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$

$$=z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$

$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^s z_{n+1-s}\,\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$

$$+(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}\,s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \tag{85}$$

$$\dot\beta_1=z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \tag{86}$$

$$\dot\beta_2=-z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+$$

$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{87}$$

. . . .

$$\dot\beta_{n-2}=(-1)^{n+1}z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}+$$

$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \tag{88}$$

где

$$
\begin{gathered}
\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),\\
\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (89)\\
\Delta_{v,n-3}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-3}+\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}\right)\right),\\
\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}+\frac{\pi}{2}\right)\right),
\end{gathered}
$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ представляется в виде (47).

Здесь и далее зависимость от групп переменных

$$\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)$$

понимается как сложная зависимость от

$$\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{z_1}{v},\ldots,\frac{z_{n-1}}{v}\right)$$

в силу (68).

7. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (81)—(88) после общего множителя

$$\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$, $s=1,\ldots,n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $n-2$ штуки). Так, например, в уравнении (82) (с левой частью $\dot z_{n-1}$) функции (89) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т. е.

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2. \tag{90}$$

А вот далее в уравнениях (83)—(85) появление набора функций (89) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для $\dot z_{n-2}$ по-прежнему входит набор функций (89) с индексами (90). А в уравнение для $\dot z_{n-3}$ входит уже набор с индексами

$$2\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2, \tag{91}$$

т. е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается таблицей 1.

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (89)

Левая часть системы (81)—(88)	Распределение индексов s набора функций (89)					
$\dot{z}_{n-2}$	1	2	3	4	$\ldots$	$n-2$
$\dot{z}_{n-3}$	2	2	3	4	$\ldots$	$n-2$
$\dot{z}_{n-4}$	3	3	3	4	$\ldots$	$n-2$
$\dot{z}_{n-5}$	4	4	4	4	$\ldots$	$n-2$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\dot{z}_1$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$\ldots$	$n-2$

Так, минор

$$(1)$$

первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n = 3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (89) (при $s = 1$). Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (89) (при $s = 1, 2$). Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (71)—(78) функций (89) (при $s = 1, 2, 3$) и т. д.

8. Нарушение теоремы единственности. Нарушение теоремы единственности для системы (7), (15) на многообразии (80) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (80) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (7), (15), пересекая многообразие (80) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (44) необходимо выбрать значение T при $\cos\alpha \neq 0$ в виде (46).

Пусть

$$\lim_{\alpha\to\pi/2} \frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = L\left(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right). \tag{92}$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha\to\pi/2}\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)\right)\right| < +\infty. \tag{93}$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega\right) = m\sigma(\omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{n-1}^2) - \frac{m\sigma L v^2}{(n-2)I_2}, \quad n > 2, \tag{94}$$

где значения $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{n-1}$ произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W, необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_0}, \tag{95}$$

где R_0 — расстояние CW.

Равенства (94) и (95) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (80), что и доказывает сделанное замечание.

§ 3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К КОНЕЧНОМЕРНОЙ СФЕРЕ

1. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [25], пользуясь (48), динамические функции $s, x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{96}$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$). При этом функции

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right), \quad \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right), \quad s = 1, \ldots, n-2,$$

входящие в систему (81)—(88), примут следующий вид:

$$\begin{gathered} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = R(\alpha) = A\sin\alpha, \\ \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) \equiv 0, \quad s = 1, \ldots, n-2. \end{gathered} \tag{97}$$

Тогда, благодаря неинтегрируемой связи (44), вне и только вне многообразия (80) динамическая часть уравнений движения (система (81)—(88)) примет вид аналитической системы

$$\dot\alpha = -z_{n-1} + \frac{\sigma ABv}{(n-2)I_2}\sin\alpha, \tag{98}$$

$$\dot z_{n-1} = \frac{ABv^2}{(n-2)I_2}\sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{99}$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{100}$$

$$\begin{gathered} \dot z_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{101}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot z_1 = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{102}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{103}$$

$$\dot\beta_2 = -z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{104}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot\beta_{n-3} = (-1)^n z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{105}$$

$$\dot\beta_{n-2} = (-1)^{n+1}z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \tag{106}$$

Вводя далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$\begin{gathered} z_k \mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2} \quad (n > 2), \\ b = \sigma n_0, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle ' \rangle, \end{gathered} \tag{107}$$

приведем систему (98)—(106) к виду

$$\alpha' = -z_{n-1} + b \sin\alpha, \tag{108}$$

$$z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{109}$$

$$z'_{n-2} = z_{n-2} z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{110}$$

$$\begin{gathered} z'_{n-3} = z_{n-3} z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-3} z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{111}$$

. . . .

$$z'_1 = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} z_{n-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\}, \tag{112}$$

$$\beta'_1 = z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{113}$$

$$\beta'_2 = -z_{n-3} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{114}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-4}}, \tag{115}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}}. \tag{116}$$

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -z_4 + b\sin\alpha, \tag{117}$$

$$z'_4 = \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{118}$$

$$z'_3 = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{119}$$

$$z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{120}$$

$$z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{121}$$

$$\beta_1' = z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{122}$$

$$\beta_2' = -z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{123}$$

$$\beta_3' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{124}$$

Видно, что в системе (108)—(116) порядка $2(n-1)$, которую можно рассматривать на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$, образовалась независимая система (108)—(115) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$-мерном многообразии (в частности, в системе восьмого порядка (117)—(124), которую можно рассматривать на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4$ к четырехмерной сфере $\mathbf{S}^4$, образовалась независимая система седьмого порядка (117)—(123) на своем семимерном многообразии). В общем случае справедлива

Теорема 3.1. *Система* (7), (15) *при условиях* (44), (40), (41) *редуцируется к динамической системе* (81)—(88) *на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ *$(n-1)$-мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$.

2. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы (108)—(116) порядка $2(n-1)$ необходимо, вообще говоря, знать $2n-3$ независимых первых интегралов (в частности, для полного интегрирования системы восьмого порядка (117)—(124) необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов). Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n (в частности, до пяти) для интегрирования систем.

2.1. Система при отсутствии силового поля. Для начала рассмотрим систему (117)—(124) на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^4\{z_4,z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$$

четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (47) тождественно равна нулю (в частности, $b = 0$, а также коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (118) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -z_4, \tag{125}$$

$$z_4' = -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{126}$$

$$z_3' = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{127}$$

$$z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{128}$$

$$z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{129}$$

$$\beta_1' = z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{130}$$

$$\beta_2' = -z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{131}$$

$$\beta_3' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{132}$$

Система (125)—(132) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 3.2. *Система* (125)—(132) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{133}$$

$$\Phi_2(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{134}$$

$$\Phi_3(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{135}$$

$$\Phi_4(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = z_1 \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{136}$$

$$\Phi_5(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{137}$$

Первые четыре первых интеграла (133)—(136) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются четыре (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости пятимерного твердого тела, а именно:

$$\omega_4 \equiv \omega_4^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_7 \equiv \omega_7^0 = \mathrm{const}, \\ \omega_9 \equiv \omega_9^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0 = \mathrm{const}. \tag{138}$$

В частности, наличие первого интеграла (133) объясняется равенством

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = \omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2 \equiv C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{139}$$

Пятый первый интеграл (137) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = -\frac{z_1}{z_2}\,\frac{1}{\sin\beta_2}, \tag{140}$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (135), (136) и получить равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}, \tag{141}$$

то квадратура (140) примет вид

$$\beta_3 = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_3^2}{C_4^2} - 1\right) - \frac{C_3^2}{C_4^2}u^2}}, \quad u = \cos\beta_2. \tag{142}$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\beta_3 + C_5 = \pm\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos\beta_2}{\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}}, \quad C_5 = \mathrm{const}, \tag{143}$$

позволяющему получить первый интеграл (137). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\mathrm{tg}^2(\beta_3 + C_5) = \frac{C_4^2}{(C_3^2 - C_4^2)\,\mathrm{tg}^2\beta_2 - C_4^2}. \tag{144}$$

Теперь перефразируем теорему 3.2.

Теорема 3.3. *Система* (125)—(132) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \sin \alpha} = C_1' = \text{const}, \tag{145}$$

$$\Psi_2(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \text{const}, \tag{146}$$

$$\Psi_3(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \sin \beta_2} = C_3' = \text{const}, \tag{147}$$

$$\Psi_4(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \sin \beta_1} = C_4' = \text{const}, \tag{148}$$

$$\Psi_5(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \text{const}. \tag{149}$$

Пятый первый интеграл (149) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_3, а функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 3.3 (в отличие от теоремы 3.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (145)—(149) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 3.3 преобразованный набор первых интегралов (145)—(149) системы (125)—(132) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (125)—(132) восьмого порядка необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$\begin{pmatrix} z_4 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \tag{150}$$
$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}},$$

система (125)—(132) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4, \tag{151}$$

$$w_4' = -w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{152}$$

$$w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{153}$$

$$\begin{gathered} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_2^2}{w_2} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{154}$$

$$\begin{gathered} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_1^2}{w_1} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{155}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{156}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = Z_3(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = -Z_2(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \\ d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = Z_1(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{157}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, \text{ —} \tag{158}$$

функции в силу замены (150).

Видно, что система восьмого порядка (151)—(156) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (151)—(153) — третьего, а системы (154), (155) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (151)—(156) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (151)—(153), по одному для систем (154), (155) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (156) (*т. е. всего пять*).

Замечание 3.1. Выпишем первые интегралы (145)—(149) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 в силу (150). Получим:

$$\Theta_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2}{w_3 \sin\alpha} = C_1'' = \mathrm{const}, \tag{159}$$

$$\Theta_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = w_3 \sin\alpha = C_2'' = \mathrm{const}, \tag{160}$$

$$\Theta_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \mathrm{const}, \tag{161}$$

$$\Theta_4(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \mathrm{const}, \tag{162}$$

$$\Theta_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \mathrm{const}. \tag{163}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (159), (160) достаточны для интегрирования системы (151)—(153), первые интегралы (161), (162) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{164}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (154), (155), и, наконец, первый интеграл (163) достаточен для «привязывания» уравнения (156). Доказана

Теорема 3.4. *Система* (125)—(132) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов.*

2.2. Система при наличии консервативного силового поля. Теперь рассмотрим систему (117)—(124) при условии $b = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin\alpha \cos\alpha$ в уравнении (118) (в отличие от системы (125)—(132)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -z_4, \tag{165}$$

$$z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{166}$$

$$z_3' = z_3 z_4\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + z_2^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{167}$$

$$z_2' = z_2 z_4\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{168}$$

$$z_1' = z_1 z_4\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{169}$$

$$\beta_1' = z_3\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{170}$$

$$\beta_2' = -z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{171}$$

$$\beta_3' = z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{172}$$

Итак, система (165)—(172) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 3.5. *Система* (165)—(172) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида*:

$$\begin{gathered}\Phi_1(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + \sin^2\alpha = C_1 = \mathrm{const},\end{gathered} \tag{173}$$

$$\begin{gathered}\Phi_2(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const},\end{gathered} \tag{174}$$

$$\begin{gathered}\Phi_3(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const},\end{gathered} \tag{175}$$

$$\Phi_4(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{176}$$

$$\Phi_5(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{177}$$

Первый интеграл (173) является интегралом полной энергии. Пятый первый интеграл (177) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 3.5.

Теорема 3.6. *Система* (165)—(172) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + \sin^2\alpha}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{178}$$

$$\Psi_2(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{179}$$

$$\Psi_3(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \sin\beta_2} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{180}$$

$$\Psi_4(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \\ = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \mathrm{const}, \tag{181}$$

$$\Psi_5(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \mathrm{const}. \tag{182}$$

Функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 3.6 (в отличие от теоремы 3.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (178)—(182) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 3.6 преобразованный набор первых интегралов (178)—(182) системы (165)—(172) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (165)—(172) восьмого порядка необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (150) система (165)—(172) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4, \tag{183}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{184}$$

$$w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{185}$$

$$\begin{gathered} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_2^2}{w_2} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{186}$$

$$\begin{gathered} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_1^2}{w_1} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{187}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{188}$$

где выполнены условия (157).

Видно, что система восьмого порядка (183)—(188) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (183)—(185) — третьего, а системы (186), (187) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (183)—(188) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (183)—(185), по одному для систем (186), (187) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (188) (*т. е. всего пять*).

Замечание 3.2. Выпишем первые интегралы (178)—(182) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 в силу (150). Получим:

$$\begin{gathered} \Theta_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = \frac{w_3^2 + w_4^2 + \sin^2\alpha}{w_3 \sin\alpha} = C_1'' = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{189}$$

$$\Theta_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = w_3 \sin\alpha = C_2'' = \mathrm{const}, \tag{190}$$

$$\Theta_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \mathrm{const}, \tag{191}$$

$$\Theta_4(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \mathrm{const}, \tag{192}$$

$$\Theta_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \mathrm{const}. \tag{193}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (189), (190) достаточны для интегрирования системы (183)—(185), первые интегралы (191), (192) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{194}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (186), (187), и, наконец, первый интеграл (193) достаточен для «привязывания» уравнения (188). Доказана

Теорема 3.7. *Система* (165)—(172) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов.*

3. Полный список инвариантных соотношений. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (117)—(124) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (117)—(124) восьмого порядка необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (150) система (117)—(124) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b\sin\alpha, \tag{195}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{196}$$

$$w_3' = w_3 w_4\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{197}$$

$$\begin{gathered} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\,\frac{1 + w_2^2}{w_2}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{198}$$

$$\begin{gathered} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\,\frac{1 + w_1^2}{w_1}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{199}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{200}$$

где выполнены условия (157).

Видно, что система восьмого порядка (195)—(200) распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (195)—(197) — третьего, а системы (198), (199) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (195)—(200) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (195)—(197), по одному для систем (198), (199) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (200) (*т. е. всего пять*).

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (195)—(197) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered}\frac{dw_4}{d\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b\sin\alpha},\\ \frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{w_3 w_4\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b\sin\alpha}.\end{gathered} \tag{201}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (201) в алгебраическом виде

$$\frac{dw_4}{d\tau} = \frac{\tau - w_3^2/\tau}{-w_4 + b\tau}, \quad \frac{dw_3}{d\tau} = \frac{w_3 w_4/\tau}{-w_4 + b\tau}. \tag{202}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1\tau, \quad w_4 = u_2\tau, \tag{203}$$

приводим систему (202) к следующему виду:

$$\tau\,\frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{1 - u_1^2}{-u_2 + b}, \quad \tau\,\frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{u_1 u_2}{-u_2 + b}, \tag{204}$$

что эквивалентно

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 + b}, \quad \tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b}. \tag{205}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (205) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{206}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{207}$$

Итак, уравнение (206) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{208}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4 \sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_3 \sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \qquad (209)$$

Замечание 3.3. При $b = 0$ первый интеграл (209) системы (195)—(197) совпадает с первым интегралом (189) системы (183)—(185), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (209), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (195)—(197) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель и знаменатель выражения (209) являются первыми интегралами системы (183)—(185)).

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (195)—(197). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (208) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \qquad (210)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \qquad (211)$$

и фазовое пространство системы (195)—(197) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых в координатах u_1, u_2 равенством (210).

Таким образом, в силу соотношения (208) первое уравнение системы (205) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \qquad (212)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\Big\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\Big\}, \qquad (213)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (211).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (195)—(197) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(b - u_2)\, du_2}{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\}/2}. \qquad (214)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \qquad (215)$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \tag{216}$$

то правая часть равенства (214) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b}{2}I_1, \tag{217}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{218}$$

При вычислении интеграла (218) возможны три случая.

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{219}$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b^2}}\arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{220}$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{221}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{r_3}{\sin\alpha} - \frac{b}{2}, \tag{222}$$

имеем следующий окончательный вид для величины I_1.

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2 - 4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{223}$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{224}$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{225}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (195)—(197) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных [2, 5, 6, 10, 12, 14, 17].

Замечание 3.4. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (208). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_4}{\sin\alpha}, \frac{w_3}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{226}$$

Итак, найдены два первых интеграла (209), (226) независимой системы третьего порядка (195)—(197). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (198), (199) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (200).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (191)—(193), а именно:

$$\Theta_3(w_2; \beta_2) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3 = \text{const}, \tag{227}$$

$$\Theta_4(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4 = \text{const}, \tag{228}$$

$$\Theta_5(w_2, w_1; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \\ = \beta_3 \pm \operatorname{arctg} \frac{C_4\cos\beta_2}{\sqrt{C_3^2\sin^2\beta_2 - C_4^2}} = C_5 = \text{const}, \tag{229}$$

при этом в левую часть равенства (229) вместо C_3, C_4 необходимо подставить интегралы (227), (228).

Теорема 3.8. *Система* (195)—(200) *восьмого порядка обладает достаточным количеством* (*пятью*) *независимых первых интегралов* (209), (226), (227)—(229).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (20)—(24), (27)—(36) при условии (96) имеет 12 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (44), циклические первые интегралы вида (42), (43), первый интеграл вида (209), первый интеграл, выражающийся соотношениями (219)—(226), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (227)—(229).

Теорема 3.9. *Система* (20)—(24), (27)—(36) *при условиях* (44), (96), (42), (43) *обладает* 12 *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

4. Структура уравнений на касательных расслоениях к конечномерной сфере. Исследование полной системы (117)—(124) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ было начато с исследования упрощенной системы (125)—(132), которая описывает динамику при отсутствии какого-либо силового поля. Таким образом, коэффициенты в правой части системы (125)—(132) носят лишь геометрический смысл и порождаются выбором координат z_4, z_3, z_2, z_1; α, β_1, β_2, β_3 на касательном расслоении.

Поставим вопрос: как меняются коэффициенты соответствующих систем при индуктивном увеличении размерности $n-1$ сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$? Другими словами, системами какого вида описываются фазовые (геодезические) потоки на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ именно в выбранных нами координатах $z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$?

Несмотря на то, что (и в этой работе, и в ряде предыдущих работ автора) нами рассмотрена явно структура соответствующих уравнений до $n=5$ включительно, начнем со случая $n=2$. Это позволит произвести индуктивный переход от n к $n+1$ и «конструировать» аналогичные системы любого высокого порядка.

Замечание 3.5 (об аналитических первых интегралах при отсутствии силового поля). При построении систем на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ используется факт наличия в системе следующего набора аналитических первых интегралов:

$$
\begin{gathered}
\Phi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\
= \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2} = C_1 = \mathrm{const}, \\
\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\
= \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \\
\Phi_3(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\
= \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_{n-2}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\
= \sqrt{z_1^2+z_2^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \mathrm{const}, \\
\Phi_{n-1}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\
= z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}.
\end{gathered}
\tag{230}
$$

Первые интегралы (230) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются $n-1$ (вообще говоря, ненулевые) компонента тензора угловой скорости n-мерного твердого тела, а именно:

$$
\omega_{r_1} \equiv \omega_{r_1}^0 = \mathrm{const},\ldots,\ \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega_{r_{n-1}}^0 = \mathrm{const}. \tag{231}
$$

В частности, наличие первого интеграла

$$
\Phi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_1
$$

из (230) объясняется равенством

$$
z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2 = \omega_{r_1}^2+\ldots+\omega_{r_{n-1}}^2 \equiv C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{232}
$$

При этом первые интегралы (230) являются функциями от компонент $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_{n-1}}$.

4.1. Начало при $n = 2$. Итак, при $n=2$ следующая система задает геодезический поток на двумерном цилиндре $T_*\mathbf{S}^1\{z_1;\alpha\}$ как касательном расслоении одномерной сферы $\mathbf{S}^1\{\alpha\}$:

$$
\alpha' = -z_1, \quad z_1' = 0, \tag{233}
$$

при этом в силу замечания 3.5 существует естественный первый интеграл

$$z_1 = C_1 = \mathrm{const}. \tag{234}$$

Уравнение $\dot{\alpha} = -z_1$ является кинематическим соотношением и задает координаты α, z_1 в фазовом пространстве системы (233) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^1\{z_1;\alpha\}$).

4.2. Переход по n: 2 $\longrightarrow$ 3. При переходе от $n = 2$ к $n = 3$ производится переобозначение

$$z_1 \mapsto z_2,$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 3.1. *При $n = 3$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta_1\}$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\alpha, \beta_1\}$:*

$$\alpha' = -z_2, \tag{235}$$

$$z_2' = \underline{-z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}, \tag{236}$$

$$\underline{z_1' = z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}, \tag{237}$$

$$\beta_1' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{238}$$

при этом в силу замечания 3.5 *существуют первые интегралы*

$$z_1^2 + z_2^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{239}$$

$$z_1 \sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}. \tag{240}$$

Действительно, в силу (239) имеем

$$z_1' z_1 + z_2' z_2 = 0,$$

поэтому существует такая функция $N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2)$, что

$$z_2' = -z_1 N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2), \quad z_1' = z_2 N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2),$$

а в силу (240) должно выполняться равенство (в силу системы (235)—(238))

$$z_1' \sin\alpha + z_1 \alpha' \cos\alpha = z_2 N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2) \sin\alpha - z_1 z_2 \cos\alpha = 0,$$

откуда

$$N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2) = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

что и требовалось.

Уравнения (235), (238) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, z_1, z_2 в фазовом пространстве системы (235)—(238) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta_1\}$).

4.3. Переход по n: 3 → 4. При переходе от $n = 3$ к $n = 4$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 3.2. *При $n = 4$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ трехмерной сферы $\mathbf{S}^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$:*

$$\alpha' = -z_3, \tag{241}$$

$$z_3' = -(z_2^2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{242}$$

$$z_2' = z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \underline{z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}}, \tag{243}$$

$$\underline{z_1' = z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}}, \tag{244}$$

$$\beta_1' = z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{245}$$

$$\beta_2' = -z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \tag{246}$$

при этом в силу замечания 3.5 существуют первые интегралы

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1 = \text{const}, \tag{247}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \sin\alpha = C_2 = \text{const}, \tag{248}$$

$$z_1 \sin\alpha \sin\beta_1 = C_3 = \text{const}. \tag{249}$$

Действительно, в силу (247), (248) аналогично доказательству предложения 3.1 находится подчеркнутый коэффициент в уравнении (242), а также делается вывод об уравнениях (243) и (244), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} z_2' &= z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_2(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3), \\ z_1' &= z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_2(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3). \end{aligned} \tag{250}$$

Далее, в силу (249) должно выполняться равенство (в силу системы (241)—(246))

$$\begin{gathered} z_1' \sin\alpha \sin\beta_1 + z_1 \alpha' \cos\alpha \sin\beta_1 + z_1 \beta_1' \sin\alpha \cos\beta_1 = \\ = z_1 z_2 \cos\alpha[\cos\beta_1 - N_2(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3) \sin\beta_1] = 0, \end{gathered}$$

откуда

$$N_2(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1, z_2, z_3) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$

что и требовалось.

Уравнения (241), (245), (246) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, β_2, z_1, z_2, z_3 в фазовом пространстве системы (241)—(246) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$).

4.4. Переход по n: 4 $\to$ 5. При переходе от $n = 4$ к $n = 5$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_4 \\ z_3 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 3.3. *При $n = 5$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$:*

$$\alpha' = -z_4, \tag{251}$$

$$z_4' = -(z_3^2 + z_2^2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{252}$$

$$z_3' = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_2^2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{253}$$

$$z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2 \underline{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}}, \tag{254}$$

$$\underline{z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}}, \tag{255}$$

$$\beta_1' = z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{256}$$

$$\beta_2' = -z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \tag{257}$$

$$\beta_3' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2}, \tag{258}$$

при этом в силу замечания 3.5 *существуют первые интегралы*

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{259}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\, \sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{260}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\, \sin\alpha \sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{261}$$

$$z_1 \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}. \tag{262}$$

Действительно, в силу (259)—(261) аналогично доказательству предложений 3.1, 3.2 находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнениях (252), (253), а также делается вывод об уравнениях (254) и (255), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered} z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4), \\ z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4). \end{gathered} \tag{263}$$

Далее, в силу (262) должно выполняться равенство (в силу системы (251)—(258))

$$z_1' \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 + z_1\alpha' \cos\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 +$$
$$+ z_1\beta_1' \sin\alpha \cos\beta_1 \sin\beta_2 + z_1\beta_2' \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 =$$
$$= z_1 z_2 \cos\alpha [N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4) \sin\beta_1 \sin\beta_2 - \cos\beta_2] = 0,$$

откуда

$$N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},$$

что и требовалось.

Уравнения (251), (256)—(258) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, β_2, β_3, z_1, z_2, z_3, z_4 в фазовом пространстве системы (251)—(258) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$).

4.5. Переход по n: 5 $\to$ 6. При переходе от $n = 5$ к $n = 6$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} z_4 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_5 \\ z_4 \\ z_3 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 3.4. *При $n = 6$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{z_5, z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$:*

$$\alpha' = -z_5, \tag{264}$$

$$z_5' = -(z_4^2 + z_3^2 + z_2^2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{265}$$

$$z_4' = z_4 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_3^2 + z_2^2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{266}$$

$$z_3' = z_3 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (z_2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{267}$$

$$z_2' = z_2 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \underline{+ z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3}}, \tag{268}$$

$$\underline{z_1' = z_1 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} -} \underline{- z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3}}, \tag{269}$$

$$\beta_1' = z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{270}$$

$$\beta_2' = -z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{271}$$

$$\beta_3' = z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{272}$$

$$\beta_4' = -z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3}, \tag{273}$$

при этом в силу замечания 3.5 *существуют первые интегралы*

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{274}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{275}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{276}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{277}$$

$$z_1 \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 = C_5 = \mathrm{const}. \tag{278}$$

Действительно, в силу (274)—(277) аналогично доказательству предложений 3.1—3.3 находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнениях (265)—(267), а также делается вывод об уравнениях (268) и

(269), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
z_2' = z_2 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\
+ z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_4(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5), \\
z_1' = z_1 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \\
- z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_4(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).
\end{gathered} \tag{279}$$

Далее, в силу (278) должно выполняться равенство (в силу системы (264)—(273))

$$\begin{gathered}
z_1' \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 + z_1 \alpha' \cos\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 + \\
+ z_1 \beta_1' \sin\alpha \cos\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 + z_1 \beta_2' \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 \sin\beta_3 + \\
+ z_1 \beta_3' \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos\beta_3 = z_1 z_2 \cos\alpha[\cos\beta_3 - \\
- N_4(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3] = 0,
\end{gathered}$$

откуда

$$N_4(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = \frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3},$$

что и требовалось.

Уравнения (264), (270)—(273) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, β_2, β_3, β_4, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 в фазовом пространстве системы (264)—(273) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{z_5, z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$).

4.6. Переход по n: $n \to n+1$. При индуктивном переходе от n к $n+1$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \dots \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \dots \\ z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 3.5. *При $n > 2$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении*

$$T_*\mathbf{S}^n\{z_n, z_{n-1}, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$$

n-мерной сферы $\mathbf{S}^n\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$:

$$\alpha' = -z_n, \tag{280}$$

$$z_n' = -(z_{n-1}^2 + \ldots + z_2^2 + \underline{z_1^2})\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{281}$$

$$z_{n-1}' = z_{n-1}z_n\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_{n-2}^2 + \ldots + z_2^2 + \underline{z_1^2})\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{282}$$

$$\begin{gathered} z_{n-2}' = z_{n-2}z_n\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-2}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - (z_{n-3}^2 + \ldots + z_2^2 + \underline{z_1^2})\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{283}$$

. . . .

$$\begin{gathered} z_2' = z_2 z_n\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + z_2 z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \ldots + \\ + (-1)^{n+1} z_2 z_3\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\,\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} + \\ + (-1)^{n+1} z_1^2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}\,\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}, \end{gathered} \tag{284}$$

$$\begin{gathered} z_1' = z_1 z_n\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + z_1 z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \ldots + \\ + (-1)^{n+1} z_1 z_3\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\,\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} + \\ + (-1)^{n} z_1 z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}\,\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}, \end{gathered} \tag{285}$$

$$\beta_1' = z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{286}$$

$$\beta_2' = -z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{287}$$

. . . .

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{288}$$

$$\beta'_{n-1} = (-1)^n z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2}}, \tag{289}$$

при этом в силу замечания 3.5 *существуют первые интегралы*

$$z_1^2 + \ldots + z_n^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{290}$$

$$\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\, \sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{291}$$

$$\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\, \sin\alpha \sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{292}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\, \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}. \tag{293}$$

$$z_1 \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2} = C_n = \mathrm{const}. \tag{294}$$

Действительно, в силу (290)—(293) аналогично доказательству предложений 3.1—3.4 находятся подчеркнутые коэффициенты во всех уравнениях до (284) и (285), а также делается вывод об уравнениях (284) и (285), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
z'_2 = z_2 z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\
+ z_2 z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \ldots + \\
+ (-1)^{n+1} z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \ldots \frac{1}{\sin\beta_{n-4}} \frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} + \\
+ (-1)^{n+1} z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_{n-1}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, z_1, \ldots, z_n), \\
z'_1 = z_1 z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\
+ z_1 z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \ldots + \\
+ (-1)^{n+1} z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \ldots \frac{1}{\sin\beta_{n-4}} \frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} + \\
+ (-1)^n z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_{n-1}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, z_1, \ldots, z_n).
\end{gathered} \tag{295}$$

Далее, в силу (294) должно выполняться равенство (в силу системы (280)—(289))

$$\begin{gathered}
z'_1 \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2} + z_1 \alpha' \cos\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2} + \\
+ z_1 \beta'_1 \sin\alpha \cos\beta_1 \sin\beta_2 \ldots \sin\beta_{n-2} + \ldots +
\end{gathered}$$

$$+ z_1\beta'_{n-3}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}\cos\beta_{n-3}\sin\beta_{n-2} +$$
$$+ z_1\beta'_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} = z_1z_2\cos\alpha[\cos\beta_{n-2} -$$
$$- N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},z_1,\ldots,z_n)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}] = 0,$$

откуда

$$N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{1}{\sin\beta_2}\ldots\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}},$$

что и требовалось.

Уравнения (280), (286)—(289) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, $\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$, $z_1,\ldots,z_n$ в фазовом пространстве системы (280)—(289) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$).

5. Общие замечания об интегрируемости системы при любом конечном n. Как уже было указано, для полного интегрирования системы (108)—(116) порядка $2(n-1)$ необходимо, вообще говоря, знать $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем.

5.1. Система при отсутствии силового поля. Рассмотрим систему (108)—(116) на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ и получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (47) тождественно равна нулю (в частности, $b=0$, а также коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (109) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -z_{n-1}, \tag{296}$$

$$z'_{n-1} = -(z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{297}$$

$$z'_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{298}$$

$$z'_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-3}z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$
$$- (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{299}$$

. . . .

$$z'_1 = z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\,\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{300}$$

$$\beta'_1 = z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{301}$$

$$\beta'_2 = -z_{n-3}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{302}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{303}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \tag{304}$$

Система (296)—(304) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 3.10. *Система* (296)—(304) *обладает n независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =$$
$$= \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{305}$$

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =$$
$$= \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{306}$$

$$\Phi_3(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =$$
$$= \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{307}$$

. . . .

$$\Phi_{n-2}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =$$
$$= \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \mathrm{const}, \tag{308}$$

$$\Phi_{n-1}(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= z_1 \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}, \qquad (309)$$

$$\Phi_n(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}. \qquad (310)$$

Первые $n-1$ первых интеграла (305)—(309) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются четыре (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости пятимерного твердого тела, а именно:

$$\omega_{r_1} \equiv \omega^0_{r_1} = \mathrm{const}, \ldots, \ \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega^0_{r_{n-1}} = \mathrm{const}. \qquad (311)$$

В частности, наличие первого интеграла (305) объясняется равенством

$$z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 = \omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_{n-1}}^2 \equiv C_1^2 = \mathrm{const}. \qquad (312)$$

Последний первый интеграл (310) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_{n-2} и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{z_1}{z_2}\,\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}, \qquad (313)$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (308), (309) и получить равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\beta_{n-3} - 1}, \qquad (314)$$

то квадратура (313) примет вид

$$\beta_{n-2} = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2} - 1\right) - \frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}u^2}}, \quad u = \cos\beta_{n-3}. \qquad (315)$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\beta_{n-2} + C_n = \pm\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\beta_{n-3} - 1}}, \quad C_n = \mathrm{const}, \qquad (316)$$

позволяющему получить первый интеграл (310). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\mathrm{tg}^2(\beta_{n-2} + C_n) = \frac{C_{n-1}^2}{(C_{n-2}^2 - C_{n-1}^2)\,\mathrm{tg}^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}. \qquad (317)$$

Теперь перефразируем теорему 3.10.

Теорема 3.11. *Система* (296)—(304) *обладает* n *независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{318}$$

$$\Psi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{319}$$

$$\Psi_3(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\sin\beta_{n-3}} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{320}$$

. . . .

$$\Psi_{n-2}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2}\sin\beta_2} = C_{n-2}' = \mathrm{const}, \tag{321}$$

$$\Psi_{n-1}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\sin\beta_1} = C_{n-1}' = \mathrm{const}, \tag{322}$$

$$\Psi_n(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_n' = \mathrm{const}. \tag{323}$$

Последний первый интеграл (323) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_{n-2}, а функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 3.11 (в отличие от теоремы 3.10) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (318)—(323) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 3.11 преобразованный набор первых интегралов (318)—(323) системы (296)—(304) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (296)—(304) восьмого порядка необходимо, вообще говоря, знать $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \ldots \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered} w_{n-1} = z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}, \\ w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \ldots, \\ w_2 = \frac{z_{n-3}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}}, \end{gathered} \tag{324}$$

система (296)—(304) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1}, \tag{325}$$

$$w'_{n-1} = -w_{n-2}^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{326}$$

$$w'_{n-2} = w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{327}$$

$$\begin{gathered} w'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \quad s = 1, \ldots, n-3, \end{gathered} \tag{328}$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{329}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = -Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = (-1)^{n+1} Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}}, \end{gathered} \tag{330}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1), \quad k = 1, \ldots, n-2, \text{ —} \tag{331}$$

функции в силу замены (324).

Видно, что система (325)—(329) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (325)—(327) — третьего, а системы (328) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (325)—(329) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (325)—(327), по одному для систем (328) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (329) (*т. е. всего* n).

Замечание 3.6. Выпишем первые интегралы (318)—(323) в переменных $w_1, \ldots, w_{n-1}$ в силу (324). Получим:

$$\Theta_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2}{w_{n-2} \sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{332}$$

$$\Theta_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = w_{n-2} \sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{333}$$

$$\Theta_{s+2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} =$$
$$= C_{s+2}'' = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{334}$$

$$\Theta_n(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n'' = \text{const}. \tag{335}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (332), (333) достаточны для интегрирования системы (325)—(327), первые интегралы (334) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{336}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (328), и, наконец, первый интеграл (335) достаточен для «привязывания» уравнения (329). Доказана

Теорема 3.12. *Система* (296)—(304) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

5.2. Система при наличии консервативного силового поля. Теперь рассмотрим систему (108)—(116) при условии $b = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (109) (в отличие от системы (296)—(304)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -z_{n-1}, \tag{337}$$

$$z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{338}$$

$$z'_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{339}$$

$$\begin{gathered} z'_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-3}z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ -(z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{340}$$

....

$$z'_1 = z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\,\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{341}$$

$$\beta'_1 = z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{342}$$

$$\beta'_2 = -z_{n-3}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{343}$$

....

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{344}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \tag{345}$$

Итак, система (337)—(345) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 3.13. *Система* (337)—(345) *обладает* n *независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида*:

$$\begin{gathered} \Phi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\ = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + \sin^2\alpha = C_1 = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{346}$$

$$\begin{gathered} \Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\ = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{347}$$

$$\Phi_3(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2} \sin\alpha \sin\beta_1 = C_3 = \text{const}, \tag{348}$$

....

$$\Phi_{n-2}(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \text{const}, \tag{349}$$

$$\Phi_{n-1}(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= z_1 \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \text{const}, \tag{350}$$

$$\Phi_n(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n = \text{const}. \tag{351}$$

Первый интеграл (346) является интегралом полной энергии. Последний первый интеграл (351) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_{n-2} и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 3.13.

Теорема 3.14. *Система* (337)—(345) *обладает* n *независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + \sin^2\alpha}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2} \sin\alpha} = C_1' = \text{const}, \tag{352}$$

$$\Psi_2(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_2' = \text{const}, \tag{353}$$

$$\Psi_3(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \sin\beta_{n-3}} = C_3' = \text{const}, \tag{354}$$

....

$$\Psi_{n-2}(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2} \sin\beta_2} = C_{n-2}' = \text{const}, \tag{355}$$

$$\Psi_{n-1}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\sin\beta_1} = C'_{n-1} = \mathrm{const}, \tag{356}$$

$$\Psi_n(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C'_n = \mathrm{const}. \tag{357}$$

Функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 3.14 (в отличие от теоремы 3.13) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (352)—(357) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 3.14 преобразованный набор первых интегралов (352)—(357) системы (337)—(345) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (337)—(345) порядка $2(n-1)$ необходимо, вообще говоря, знать $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (324) система (337)—(345) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1}, \tag{358}$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{359}$$

$$w'_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{360}$$

$$w'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\,\frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s},$$
$$\beta'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\quad s=1,\ldots,n-3, \tag{361}$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{362}$$

где выполнены условия (330).

Видно, что система (358)—(362) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (358)—(360) — третьего, а системы (361) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (358)—(362) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (358)—(360), по одному для систем (361) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (362) (*т. е. всего* n).

Замечание 3.7. Выпишем первые интегралы (352)—(357) в переменных $w_1, \ldots, w_{n-1}$ в силу (324). Получим

$$\Theta_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2 + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1'' = \mathrm{const}, \tag{363}$$

$$\Theta_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = w_{n-2}\sin\alpha = C_2'' = \mathrm{const}, \tag{364}$$

$$\Theta_{s+2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2}'' = \mathrm{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{365}$$

$$\Theta_n(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n'' = \mathrm{const}. \tag{366}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (363), (364) достаточны для интегрирования системы (358)—(360), первые интегралы (365) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{367}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (361), и, наконец, первый интеграл (366) достаточен для «привязывания» уравнения (362). Доказана

Теорема 3.15. *Система* (337)—(345) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

6. Полный список инвариантных соотношений при любом конечном n. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (108)—(116) порядка $2(n-1)$ (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (108)—(116) порядка $2(n-1)$ необходимо, вообще говоря, знать $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

(324) система (108)—(116) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1} + b\sin\alpha, \tag{368}$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - w^2_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{369}$$

$$w'_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{370}$$

$$\begin{gathered} w'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\,\frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s},\\ \beta'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\quad s = 1,\ldots,n-3, \end{gathered} \tag{371}$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{372}$$

где выполнены условия (330).

Видно, что система (368)—(372) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (368)—(370) — третьего, а системы (371) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (368)—(372) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (368)—(370), по одному для систем (371) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (372) (*т. е. всего* n).

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (368)—(370) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered} \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - w^2_{n-2}\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_{n-1}+b\sin\alpha},\\ \frac{dw_{n-2}}{d\alpha} = \frac{w_{n-2}w_{n-1}\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_{n-1}+b\sin\alpha}. \end{gathered} \tag{373}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (373) в алгебраическом виде:

$$\begin{gathered} \frac{dw_{n-1}}{d\tau} = \frac{\tau - w^2_{n-1}/\tau}{-w_{n-1}+b\tau},\\ \frac{dw_{n-2}}{d\tau} = \frac{w_{n-2}w_{n-1}/\tau}{-w_{n-1}+b\tau}. \end{gathered} \tag{374}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2} = u_1\tau,\quad w_{n-1} = u_2\tau, \tag{375}$$

приводим систему (374) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau}+u_2&=\frac{1-u_1^2}{-u_2+b},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau}+u_1&=\frac{u_1u_2}{-u_2+b}, \end{aligned} \tag{376}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau}&=\frac{1-u_1^2+u_2^2-bu_2}{-u_2+b},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau}&=\frac{2u_1u_2-bu_1}{-u_2+b}. \end{aligned} \tag{377}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (377) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{1-u_1^2+u_2^2-bu_2}{2u_1u_2-bu_1}, \tag{378}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}\right)=0. \tag{379}$$

Итак, уравнение (378) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{380}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\begin{gathered} \Theta_1(w_{n-1},w_{n-2};\alpha)=\\ =\frac{w_{n-1}^2+w_{n-2}^2-bw_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}. \end{gathered} \tag{381}$$

Замечание 3.8. При $b=0$ первый интеграл (381) системы (368)—(370) совпадает с первым интегралом (363) системы (358)—(360), но при $b\neq 0$ ни числитель выражения (381), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (368)—(370) по отдельности (хотя при $b=0$ и числитель и знаменатель выражения (381) являются первыми интегралами системы (358)—(360)).

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (368)—(370). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (380) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{382}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0 \tag{383}$$

и фазовое пространство системы (368)—(370) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых в координатах u_1, u_2 равенством (382).

Таким образом, в силу соотношения (380) первое уравнение системы (377) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \tag{384}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\right\}, \tag{385}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (383).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (368)—(370) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(b - u_2)\, du_2}{2\,(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4\,(u_2^2 - bu_2 + 1)}\}/2}. \tag{386}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \tag{387}$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \tag{388}$$

то правая часть равенства (386) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b}{2} I_1, \tag{389}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}\,(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{390}$$

При вычислении интеграла (390) возможны три случая.

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| + \text{const}. \tag{391}$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{392}$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{393}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{r_3}{\sin\alpha} - \frac{b}{2}, \tag{394}$$

имеем окончательный вид для величины I_1.

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| + \text{const}. \tag{395}$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{396}$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{397}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (368)—(370) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 3.9. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (380). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\begin{aligned}\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = \\ = C_2 = \mathrm{const}.\end{aligned} \tag{398}$$

Итак, найдены два первых интеграла (381), (398) независимой системы третьего порядка (368)—(370). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (371) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (372).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (365), (366), а именно:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{399}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C''_n = \mathrm{const}, \tag{400}$$

при этом в левую часть равенства (400) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (399) при $s = n-4$, $s = n-3$.

Теорема 3.16. *Система* (368)—(372) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов* (381), (398)—(400).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (20)—(24), (27)—(36) при условии (96) имеет

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n^2-n+4}{2}, \quad n > 2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (44), циклические первые интегралы вида (40), (41), первый интеграл вида (381), первый интеграл, выражающийся соотношениями (391)—(398), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (399), (400).

ТЕОРЕМА 3.17. *Система* (20)—(24), (27)—(36) *при условиях* (44), (96), (40), (41) *обладает* $(n^2 - n + 4)/2$, $n > 2$, *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), n *из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247—250.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
3. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985.
4. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР. 1986. Т. 287, № 5. С. 1105—1108.
5. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. М.: Наука, 1970.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Докл. РАН. 2001. Т. 380, № 1. С. 47—50.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Докл. РАН. 2002. Т. 383, № 5. С. 635—637.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbf{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2003. № 5. С. 37—41.
10. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
11. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Интегрируемые системы. I // Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1985. Вып. 4. С. 179—284.
12. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: МГУ, 1980.
13. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38, № 1. С. 3—67.
14. *Манин Ю. И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. 1978. Вып. 11. С. 5—112.

15. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
16. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1967.
17. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
18. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1972.
19. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 3. С. 51—54.
20. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, № 1. С. 113—185.
21. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893.
22. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Динамические системы на орбитах линейных представлений и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, № 1. С. 31—39.
23. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Диссипативные системы с нетривиальными обобщенными классами Арнольда—Маслова: Тез. докл. сем. по вект. и тенз. ан. им. П. К. Рашевского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2000. № 2. С. 62.
24. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
25. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. М.: Наука, 1976.
26. *Шамолин М. В.* Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 2. С. 52—56.
27. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 1. С. 52—58.
28. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 4. С. 40—49.
29. *Шамолин М. В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 65—68.
30. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // УМН. 1997. Т. 52, вып. 3. С. 177—178.
31. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. 1998. Т. 53, вып. 3. С. 209—210.
32. *Шамолин М. В.* Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 29—37.
33. *Шамолин М. В.* Некоторые классы частных решений в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 178—189.

34. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. 1999. Т. 364, № 5. С. 627—629.

35. *Шамолин М. В.* О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией // УМН. 1999. Т. 54, № 5. С. 181—182.

36. *Шамолин М. В.* О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек // УМН. 2000. Т. 55, вып. 3. С. 187—188.

37. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Докл. РАН. 2000. Т. 375, № 3. С. 343—346.

38. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2001. № 5. С. 22—28.

39. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // УМН. 2002. Т. 57, вып. 1. С. 169—170.

40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости // Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 4. С. 482—485.

41. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикл. математика и механика. 2005. Т. 69, вып. 6. С. 1003—1010.

42. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$ // УМН. 2005. Т. 60, вып. 6. С. 233—234.

43. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учете вращательных производных момента силы ее воздействия // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 3. С. 187—192.

44. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // УМН. 2007. Т. 62, вып. 5. С. 169—170.

45. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.

46. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, вып. 3. С. 3—237.

47. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Прикл. математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 2. С. 273—287.

48. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2008. № 3. С. 43—49.

49. *Шамолин М. В.* Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. 2008. Т. 418, № 1. С. 46—51.

50. *Шамолин М. В.* Классификация случаев полной интегрируемости в динамике симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Соврем. мат. и ее прил. 2009. Т. 65. С. 132—142.

51. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. 2009. Т. 425, № 3. С. 338—342.

52. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем // Соврем. мат. и ее прил. 2009. Т. 62. С. 131—171.

53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 3. С. 339—343.

54. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // УМН. 2010. Т. 65, вып. 1. С. 189—190.

55. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. 2011. Т. 437, № 2. С. 190—193.

56. *Шамолин М. В.* Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2011. № 5 (86). С. 187—189.

57. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Докл. РАН. 2011. Т. 440, № 2. С. 187—190.

58. *Шамолин М. В.* Некоторые вопросы качественной теории в динамике систем с переменной диссипацией // Соврем. мат. и ее прил. 2012. Т. 78. С. 138—147.

59. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Докл. РАН. 2012. Т. 444, № 5. С. 506—509.

60. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Докл. РАН. 2012. Т. 442, № 4. С. 479—481.

61. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения твердого тела в сопротивляющейся среде при учете линейного демпфирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2012. № 4. С. 44—47.

62. *Шамолин М. В.* Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Соврем. мат. и ее прил. 2012. Т. 76. С. 84—99.