

## АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРИ ТОРМОЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ\*)

М. В. Шамолин

Проводится качественный анализ плоскопараллельной и пространственной задач о движении твердых тел в сопротивляющейся среде. Построена нелинейная модель воздействия среды на твердое тело, учитывающая зависимость плеча силы от приведенной угловой скорости тела, при этом сам момент данной силы является также функцией угла атаки. Как показала обработка эксперимента о движении в воде однородных круговых цилиндров, данные обстоятельства необходимо учитывать при моделировании. При изучении плоской и пространственной моделей взаимодействия твердого тела со средой найдены достаточные условия устойчивости ключевого режима движения — прямолинейного поступательного торможения. Показано, что при некоторых условиях возможно присутствие в системе либо устойчивого, либо неустойчивого автоколебательных режимов.

**Ключевые слова:** твердое тело, сопротивляющаяся среда, прямолинейное поступательное торможение, автоколебания.

DOI 10.17377/SIBJIM.2017.20.410

**Введение.** Исследуется задача движения твердого тела, взаимодействующего со средой лишь через передний плоский участок своей внешней поверхности. При построении силового воздействия среды используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности [1]. Движение среды не изучается, а рассматривается такая задача динамики твердого тела, в которой характерное время движения тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра. По причине сложности нелинейного анализа начальным этапом такого исследования явилось пренебрежение зависимостью момента силы воздействия среды от угловой скорости тела и использование такой зависимости лишь от угла атаки [2, 3].

С практической точки зрения важен вопрос исследования устойчивости так называемого невозмущенного (прямолинейного поступательного) движения, при котором скорости точек тела перпендикулярны плоскому участку (кавитатору). Весь спектр результатов, найденных при указанном простейшем предположении, позволяет сделать вывод о невозможности нахождения таких условий, при которых у приведенных систем существовали бы решения, соответствующие угловым колебаниям тела ограниченной амплитуды.

Эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров [3, 4] подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твердое тело действительно необходимо учитывать зависимость момента силы воздействия среды и от угловой скорости тела. При этом в уравнениях движения возникают дополнительные члены, вносящие в систему диссипацию.

При изучении движения тела с конечными углами атаки основным вопросом нелинейного анализа является нахождение таких условий, при которых

---

\*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-00848-а).

существуют колебания ограниченной амплитуды возле невозмущенного движения, что подтверждает необходимость полного нелинейного исследования.

Необходимо также заметить, что в данной работе автор воплощает идею феноменологического квазистационарного подхода к моделированию движения тела в сопротивляющейся среде. Конечно, моделирование воздействия среды на твердое тело не ограничивается подходом, примененным в работе. Существуют и другие чисто нестационарные гидродинамические механизмы сопротивления, отличные от рассмотренного, например демпфирование, связанное с учетом эффекта присоединенных масс [5].

**1. Плоскопараллельное движение симметричного твердого тела в среде.** Предположим, что однородное твердое тело массы  $m$  совершает плоскопараллельное движение в однородном потоке среды и некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой плоскую пластину  $AB$ , находящуюся в условиях струйного обтекания средой. Это означает, что в случае отсутствия касательных сил воздействие среды на пластину сводится к силе  $\mathbf{S}$  (приложенной в точке  $N$ ), ортогональной к ней (рис. 1). Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластины, и не испытывает действия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа тела в воду [4, 6]. Предполагается также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления (воздействия) среды.

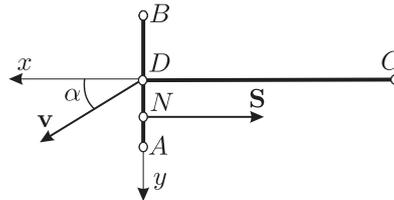


Рис. 1. Плоскопараллельное движение симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде

Свяжем с пластиной правую систему координат  $Dxyz$  (ось  $z$  перпендикулярна плоскости рисунка) и для простоты будем считать  $Dzx$  плоскостью геометрической симметрии тела. Тогда среди возможных движений существует режим прямолинейного поступательного торможения (невозмущенного движения), перпендикулярного пластине  $AB$ . При этом срединный перпендикуляр  $Dx$ , опущенный из центра тяжести  $C$  тела на плоскость пластины, принадлежит линии действия силы  $\mathbf{S}$ . При возмущении данного режима вектор скорости  $\mathbf{v}$  точки  $D$  относительно среды, вообще говоря, отклоняется от оси  $DC$  геометрической симметрии на некоторый угол (атаки)  $\alpha$ .

Для построения динамической модели введем первые три фазовые координаты:  $v$  — величина скорости точки  $D$  относительно потока среды (рис. 1), угол  $\alpha$  и  $\Omega$  — значение угловой скорости тела,  $AB = \Delta$ .

Примем, что величина силы  $\mathbf{S}$  квадратично зависит  $S = s_1 v^2$  от  $v = v_D$  с коэффициентом  $s_1$  (ньютоновское сопротивление). Обычно его представляют в виде  $s_1 = \rho P c_x / 2$ , где  $c_x$  — безразмерный коэффициент лобового сопротивления ( $\rho$  — плотность среды,  $P$  — площадь пластины). Этот коэффициент зависит от угла атаки, числа Струхала и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем вводим безразмерную фазовую переменную «типа Струхала»  $\omega \cong \Omega \Delta / v$ , а также вспомогательную функцию  $s = s_1 \operatorname{sgn} \cos \alpha$ , при этом воздействие среды на тело будет определять пара функций  $(y_N = DN, s)$ .

Ограничимся зависимостью коэффициента  $c_x$  от угла атаки, т. е. в принципе будем считать величину  $s$  функцией  $\alpha$ , а величину  $y_N$  — функцией пары безразмерных переменных  $(\alpha, \omega)$ .

Предыдущие работы (см., например, [2, 3]) посвящены такому исследованию плоского взаимодействия, при котором учитывается зависимость пары  $(y_N, s)$  лишь от угла атаки. Здесь же изучаются плоскопараллельные (и далее пространственные) движения тела в нелинейной постановке в случае зависимости величины  $s$  от угла атаки и при условии дополнительной зависимости функции  $y_N$  от приведенной угловой скорости  $\omega$ .

*1.1. Малые углы атаки и эксперимент.* Задача о свободном торможении тела (т. е. когда на тело действует лишь сила сопротивления среды) с малыми углами атаки формирует дальнейшее представление о нелинейных динамических системах, описывающих взаимодействие среды с телом при учете так называемых вращательных производных момента силы воздействия среды по угловой скорости тела. Термин «вращательная производная» употребляется в гидродинамике, когда момент силы воздействия среды зависит от угловой скорости и входит линейно по ней в уравнениях движения (ср. с [7]).

Невозмущенное движение определяется равенствами  $\alpha(t) \equiv 0$ ,  $\omega(t) \equiv 0$ . Поэтому функцию  $y_N(\alpha, \omega)$  при малых  $(\alpha, \omega)$  будем использовать в виде

$$y_N = \Delta(k\alpha - h\omega), \quad (1)$$

где  $k$  и  $h$  — некоторые постоянные. Зависимость  $s$  от  $\alpha$  в силу геометрической симметрии тела, обеспечивающей четность функции  $s$ , пренебрегаем.

Линеаризованная модель силового воздействия среды содержит три параметра  $s = s_1, k, h$ , которые определяются формой пластины в плане. Первый из этих параметров — коэффициент  $s$  — размерный, параметры  $k, h$  безразмерные в силу способа их введения. Величины  $s, k$  могут быть экспериментально определены путем весовых измерений в установках типа гидро- или аэродинамических труб. В литературе [8] имеется информация о теоретическом определении этих величин для отдельных форм пластин, позволяющая считать, что  $k > 0$ . Что же касается параметра  $h$  (который вносит в систему зависимость момента силы от угловой скорости), то даже сама необходимость введения его в модель априори не очевидна [7].

Изучение свойств движения рассматриваемых классов тел в Институте механики МГУ [4, 9] было начато экспериментами по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров. Эксперимент позволил остановиться на следующих выводах.

1. Невозмущенный режим движения тела (в воде) неустойчив, по крайней мере по отношению к углу ориентации тела. Также стало возможным определение безразмерных параметров  $k, h$  воздействия среды на твердое тело [9].

2. При моделировании воздействия среды на тело действительно необходимо учитывать дополнительный параметр, эквивалентный вращательной производной момента гидроаэродинамических сил по угловой скорости тела, который и вносит в систему дополнительную диссипацию.

Величина коэффициента демпфирующего момента уже была оценена в работе [6] для некоторых случаев движения тел в воде. Данная там оценка говорит о неустойчивости по углу атаки и угловой скорости невозмущенного движения твердого тела в воде. Чисто формально, увеличивая величину данного коэффициента, возможно достижение устойчивости такого движения, которое в некоторых средах (например, в глине) устойчиво в описанном смысле, как показывает эксперимент [7]. Возможно, данная устойчивость достигается благодаря наличию в системе значительного демпфирования со стороны среды или наличию сил, касательных к пластине.

*1.2. Полная система уравнений.* Положение тела на плоскости зададим координатами  $(x_0, y_0)$  точки  $D$  и углом отклонения  $\varphi$ . Полярные координаты  $(v, \alpha)$  конца вектора скорости точки  $D$  и алгебраическое значение проекции угловой скорости  $\Omega$  связаны с переменными  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{\varphi}, \varphi)$  (неинтегрируемыми)

кинематическими соотношениями

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \dot{x}_0 = v \cos(\alpha + \varphi), \quad \dot{y}_0 = v \sin(\alpha + \varphi). \quad (2)$$

Таким образом, фазовое состояние системы будем определять через функции  $(v, \alpha, \Omega, x_0, y_0, \varphi)$ , а первые три величины рассматривать в качестве квазискоростей.

Поскольку кинетическая энергия тела и обобщенные силы не зависят от положения тела на плоскости, координаты  $(x_0, y_0, \varphi)$  являются циклическими, что приводит к понижению порядка общей системы уравнений движения. Поэтому уравнения движения центра масс (в проекциях на связанные оси  $Dxy$ ) и изменения кинетического момента в осях Кенига образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, рассматриваемую в трехмерном фазовом пространстве квазискоростей ( $\sigma = DC$ ,  $I$  — центральный момент инерции):

$$\dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -s(\alpha)v^2/m, \quad (3)$$

$$\dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} = 0, \quad (4)$$

$$I \dot{\Omega} = y_N(\alpha, \omega) s(\alpha) v^2, \quad \omega \cong \Delta \Omega / v. \quad (5)$$

Системы (2), (3)–(5) вместе образуют полную систему для описания плоскопараллельного движения твердого тела в сопротивляющейся среде в условиях квазистационарности.

*1.3. Функции воздействия среды, зависящие от угловой скорости тела.* В динамическую систему (3)–(5) входят функции  $y_N(\alpha, \omega)$  и  $s(\alpha)$ , определяющие воздействие среды на тело. Функция  $y_N$  (ср. с (1)), кроме как от угла атаки  $\alpha$ , зависит еще и от приведенной угловой скорости  $\omega$ . Если, в частности, последней зависимостью пренебречь (так называемое простейшее предположение на функции воздействия среды), то величина  $y_N$  — функция лишь угла атаки:  $y_N = y(\alpha)$ , и ее зависимость от единственного аргумента определяется с помощью экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания [1, 2]. В этом случае в дальнейшем можно применить метод «погружения» задачи в более общий класс задач.

Но все-таки основной целью является учет влияния вращательных производных момента силы воздействия среды по компонентам угловой скорости тела, который требует введения в функции воздействия среды дополнительных аргументов, что само по себе является нетривиальной задачей моделирования. Как уже отмечалось, в данной работе ограничимся введением угловой скорости в качестве аргумента лишь в функцию  $y_N$ . По аналогии с (1) величину  $y_N$  будем рассматривать в следующем виде:

$$y_N(\alpha, \omega) \cong y_N(\alpha, \Omega/v) = y(\alpha) - H\Omega/v, \quad (6)$$

при этом в силу результатов эксперимента [2, 4, 10]  $H > 0$ . Тогда уравнение (5) примет вид

$$I \dot{\Omega} = F(\alpha)v^2 - Hs(\alpha)\Omega v, \quad F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha). \quad (7)$$

Система (3), (4), (7) содержит функции  $F(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ , явный вид которых даже для пластин простой формы аналитически описать довольно затруднительно. По этой причине используется прием «погружения» данной задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций  $F(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ .

Опорным для нас является результат С. А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного струйного обтекания бесконечной пластины получил функции  $y(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$  аналитически [1, 11]:

$$y(\alpha) = A \sin \alpha \in \{y\}, \quad A = y'(0) > 0, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha \in \{s\}, \quad B = s(0) > 0. \quad (8)$$

Этот результат и помогает построить функциональные классы  $\{y\}$ ,  $\{s\}$ . Сочетая (8) с экспериментальной информацией о свойствах струйного обтекания [1, 2], формально опишем данные классы, состоящие из достаточно гладких,  $2\pi$ -периодических ( $y(\alpha)$  нечетная,  $s(\alpha)$  четная) функций, удовлетворяющих следующим условиям:  $y(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi)$ , причем  $y'(0) > 0$ ,  $y'(\pi) < 0$  (класс функций  $\{y\} = Y$ );  $s(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ;  $s(\alpha) < 0$  при  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ , причем  $s(0) > 0$ ,  $s'(\pi/2) < 0$  (класс функций  $\{s\} = \Sigma$ ). Как  $y$ , так и  $s$  меняют знак при замене  $\alpha$  на  $\alpha + \pi$ . Таким образом,

$$y \in Y, \quad s \in \Sigma. \quad (9)$$

Из перечисленных условий следует, что введенная в (7) функция  $F$  — достаточно гладкая нечетная  $\pi$ -периодическая функция, удовлетворяющая следующим условиям:  $F(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ,  $F'(0) > 0$ ,  $F'(\pi/2) < 0$  (класс функций  $\{F\} = \Phi$ ). В частности, аналитическая функция  $F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi$ ,  $AB = y'(0)s(0)$ , является типичным представителем класса функций  $\Phi$ .

*1.4. Главный вопрос нелинейного анализа.* В связи с отмеченной в [4, 9] неустойчивостью невозмущенного движения можно поставить следующий вопрос: существуют ли угловые колебания оси симметрии тела конечной (ограниченной) амплитуды?

Сформулируем этот вопрос в более общем виде: существует ли пара функций  $y$ ,  $s$  воздействия среды такая, чтобы для некоторого решения динамической части уравнений движения выполнялось ограничение  $0 < \alpha(t) < \alpha^* < \pi/2$  начиная с некоторого момента времени  $t = t_1$ ?

При простейшем предположении на функции  $y_N$ ,  $s$  ранее показано [2, 3], что при квазистационарном описании взаимодействия среды с симметричным телом (когда величины  $y_N$  и  $s$  зависят лишь от угла атаки) для любой допустимой пары функций  $y$ ,  $s$  во всем диапазоне ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) конечных углов атаки в системе отсутствуют какие-либо колебательные решения конечной (ограниченной) амплитуды.

Таким образом, для возможного положительного ответа на вопрос, поставленный выше, будем учитывать зависимость момента силы воздействия среды от приведенной угловой скорости, при этом будем использовать формулу (6) при  $H > 0$ . Оказывается, при некоторых предположениях можно ожидать положительного ответа на данный вопрос.

Конечно, с практической точки зрения важен анализ динамических уравнений лишь в окрестности невозмущенного движения, поскольку при некоторых критических углах атаки происходит замык боковой поверхности и настоящая модель воздействия среды на тело перестает быть достоверной. Но для тел с боковой поверхностью различной формы величины критических углов, вообще говоря, различны и неизвестны. Поэтому приходится исследовать весь диапазон углов.

Итак, для исследования плоскопараллельного обтекания пластины средой используются классы динамических систем, определенные с помощью пары функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

*1.5. Устойчивость ключевого режима.* Вводя новые безразмерные фазовую переменную и дифференцирование по формулам  $\Omega = n_0 v \omega$ ,  $\langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle$ , система (3)–(5) сводится к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega); \quad (10)$$

$$\alpha' = -\omega + \mu_2 \omega^2 \sin \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \cos \alpha - \frac{\mu_2}{In_0} H \omega s(\alpha) \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{mn_0} \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned} \omega' = & \frac{F(\alpha)}{In_0^2} + \mu_2 \omega^3 \cos \alpha - \frac{\mu_2}{In_0^2} \omega F(\alpha) \sin \alpha \\ & - \frac{H}{In_0} \omega s(\alpha) + \frac{\mu_2}{In_0} H \omega^2 s(\alpha) \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{mn_0} \omega \cos \alpha; \\ \Psi(\alpha, \omega) = & -\mu_2 \omega^2 \cos \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{\mu_2 H}{In_0} \omega s(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{mn_0} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (11)$$

при этом мы выбираем в дальнейшем безразмерные параметры следующим образом:

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{mn_0}, \quad \mu_2 = b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad \mu_3 = H_1 = \frac{BH}{In_0}.$$

Два последних уравнения (11) системы (10), (11) образуют независимую подсистему второго порядка на фазовом цилиндре  $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$ .

Речь пойдет об исследовании устойчивости тривиального решения системы (11), соответствующего прямолинейному поступательному торможению, а также исследованию его устойчивости по части переменных. Выпишем соответствующее характеристическое уравнение возле начала координат:

$$\lambda^2 - \lambda[\mu_1 + \mu_2 - \mu_3] + \mu_1/2(\mu_1/2 + \mu_2 - \mu_3) + 1 = 0.$$

**Предложение 1.** Пусть выполнено неравенство

$$|\mu_3 - \mu_2| < 2. \quad (12)$$

Тогда при  $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$ ) тривиальное решение системы (11) асимптотически устойчиво (является отталкивающим).

Общая картина перестроек траекторий векторного поля системы (11) возле начала координат представлена на рис. 2 (область 1 соответствует притягивающей точке; область 2 — седловой и область 3 — отталкивающей точке).

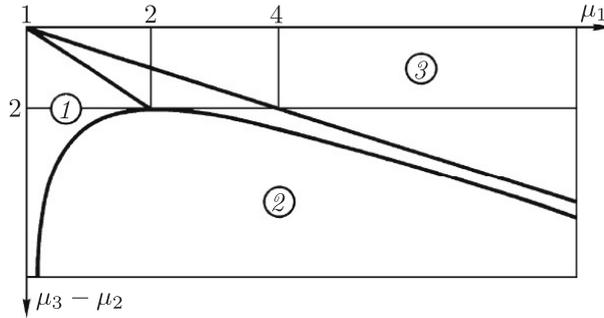


Рис. 2. Общая картина перестроек траекторий векторного поля системы (11) возле начала координат

**1.5. Рождение автоколебаний.** Для возможного рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (11) при критическом сочетании параметров:

$$\mu_3 = \mu_1 + \mu_2. \quad (13)$$

Для этого сделаем замену фазовых переменных  $(\alpha, \omega) \mapsto (a, w)$  в системе (11):

$$\alpha = a, \quad \omega = \frac{(\mu_2 + \mu_1/2)a - \omega_0 w}{1 + \mu_1 \mu_2 + \mu_2^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{1 - \mu_1^2/4},$$

переводящую ее в следующую систему:

$$\begin{aligned} a' &= |\omega_0|w + C_1 a^3 + C_2 a^2 w + C_3 a w^2 + \bar{o}_1((a^2 + w^2)^{3/2}), \\ w' &= -|\omega_0|a + C_4 a^3 + C_5 a^2 w + C_6 a w^2 + C_7 w^3 + \bar{o}_2((a^2 + w^2)^{3/2}), \end{aligned} \quad (14)$$

$$C_1 = \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} - \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2} + \frac{s_2}{2mn_0} - \frac{\mu_2}{2} - \frac{\mu_1}{12} + \frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_1/2)}{2(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)} + \frac{\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)^2}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2},$$

$$C_2 = \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2\omega_0}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2} - \frac{2\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)\omega_0}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)\omega_0}{2(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)},$$

$$C_3 = \frac{\mu_2\omega_0^2}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2},$$

$$C_4 = -\left(1 + \frac{\mu_1\mu_2}{2}\right) \frac{f_3}{6In_0^2\omega_0} + \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{(\mu_2 + \mu_1/2)(1 + \mu_1\mu_2/2)}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)\omega_0} + \frac{\mu_2 + \mu_1/2}{2(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)\omega_0} \left[ \left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{3}\right) - \frac{\mu_1\mu_2}{6}(\mu_1 + \mu_2) \right],$$

$$C_5 = -\frac{Hs_2}{2In_0} \frac{1 + \mu_1\mu_2 - \mu_1^2/2}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2} + \frac{s_2}{2mn_0} + \frac{\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)^2}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2} + \frac{2\mu_2(\mu_1 + \mu_2)^2 - 4\mu_2 - \mu_1}{4(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)},$$

$$C_6 = -\frac{2\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)\omega_0}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)\omega_0}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2},$$

$$C_7 = \frac{\mu_2\omega_0^2}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2}, \quad s_2 = s''(0), \quad f_3 = F'''(0).$$

Введем вспомогательный индекс  $In$ :

$$In = 6C_1 + 2C_3 + 2C_5 + 6C_7 = \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} - \frac{Hs_2}{In_0} \frac{1 + 3\mu_2^2 + 5\mu_1\mu_2/2 - \mu_1^2/2}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2} + 4 \frac{s_2}{mn_0} + \frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + 2\mu_1) + 3\mu_2 - \mu_1}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2}.$$

Следующее предложение дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при  $In \neq 0$ .

**Предложение 2.** Если  $In < 0$  ( $In > 0$ ) и при этом выполнено неравенство (12), то начало координат фазовой плоскости  $\mathbb{R}^2\{a, w\}$  системы (14) (или (11)) при критическом соотношении параметров  $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$  является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.

Условие (12) в данном случае является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости  $\mathbb{R}^2\{a, w\}$  является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом. По аналогии с известной теоремой Пуанкаре — Андронова — Хопфа [12, 13] справедлива

**Теорема 1.** Пусть для системы (11) выполнено неравенство (12). Тогда:

1) Если  $\text{In} < 0$ , то для любых фиксированных  $\mu_1, \mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2 - \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением  $\mu_3$  от  $\mu_1 + \mu_2$  до  $\mu_1 + \mu_2 - \delta_2$  как  $\sqrt{|\mu_1 + \mu_2 - \mu_3|}$ .

2) Если  $\text{In} > 0$ , то для любых фиксированных  $\mu_1, \mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2 - \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом  $\mu_3$  от  $\mu_1 + \mu_2$  до  $\mu_1 + \mu_2 + \delta_1$  как  $\sqrt{|\mu_1 + \mu_2 - \mu_3|}$ .

Проверить выполнение условия  $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$ ) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды  $(y_N, s)$ , или от их значений. Вот проверка условия  $\text{In} < 0$  ( $\text{In} > 0$ ) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды  $(y_N, s)$  неизвестны.

Несмотря на это, мы со всей определенностью можем констатировать, что независимо от значения индекса  $\text{In}$  (знак которого «обеспечивает» рождение автоколебаний соответствующей устойчивости), когда параметры системы находятся вблизи критического соотношения (13), в системе уже возможно наблюдение автоколебательного режима.

Соотношение (13) для кругового цилиндра переписывается в виде

$$h \frac{mD^2}{I} - 2 - k \frac{m\sigma D}{I} = 0. \quad (15)$$

Напомним, что здесь  $D$  — диаметр кругового цилиндра;  $\sigma$  — расстояние от центра масс до переднего торца;  $I, m$  — инерционно-массовые характеристики цилиндра; постоянные  $k$  и  $h$  — безразмерные параметры воздействия среды на цилиндр (см. также [9, 14]).

И хотя показано [14], что для сплошных круговых цилиндров равенство (15) в точности выполнено быть не может, мы можем подобрать параметры цилиндра таким образом, чтобы левая часть равенства (15) по модулю была минимальна, в результате чего мы вправе ожидать рождения автоколебаний определенной устойчивости.

**2. Пространственное движение осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде.** Рассмотрим задачу о пространственном движении однородного осесимметричного твердого тела массы  $m$ , часть поверхности которого имеет форму плоского круглого диска, взаимодействующего со средой по законам струйного обтекания [2, 3]. Пусть остальная часть поверхности тела размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края диска, и не испытывает воздействия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа однородных круговых цилиндров в воду [4, 9].

Предположим, что касательные силы к диску отсутствуют. Тогда сила  $\mathbf{S}$ , приложенная к телу в точке  $N$  со стороны среды, не меняет своей ориентации относительно тела (направлена по нормали к диску) и квадратична по скорости его центра  $D$  (ньютоновское сопротивление, рис. 3). Предполагается также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления (воздействия) среды.

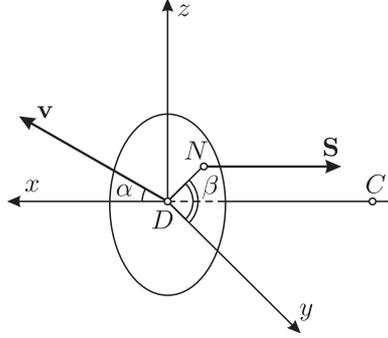


Рис. 3. Пространственное движение осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде

При выполнении перечисленных условий среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения, подобный случаю плоскопараллельного (невозмущенного) движения: тело способно совершать поступательное движение в направлении его оси симметрии, т. е. перпендикулярно плоскости диска.

Свяжем с телом правую систему координат  $Dxyz$  (рис. 3) и направим ось  $Dx$  вдоль оси геометрической симметрии тела. Оси  $Dy$  и  $Dz$  жестко свяжем с круглым диском, образовав правую систему координат. Компоненты вектора угловой скорости  $\Omega$  в системе  $Dxyz$  будем обозначать через  $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$ . Тензор инерции динамически симметричного тела во введенных связанных осях  $Dxyz$  имеет диагональный вид:  $\text{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$ .

Воспользуемся гипотезой квазистационарности и будем для простоты предполагать, что величина  $R_1 = DN$  определяется по крайней мере углом атаки  $\alpha$ , измеряемым между вектором скорости  $\mathbf{v}$  центра  $D$  диска и прямой  $Dx$ . Таким образом,  $DN = R_1(\alpha, \dots)$ .

Примем величину силы сопротивления в виде  $S = |\mathbf{S}| = s_1(\alpha)v^2$ ,  $v = |\mathbf{v}|$ . Для удобства дальнейшего описания (как и в случае плоскопараллельного движения) вместо коэффициента сопротивления  $s_1(\alpha)$  введем вспомогательную знакопеременную функцию  $s(\alpha)$ :  $s_1(\alpha) = s(\alpha) \text{sgn} \cos \alpha > 0$ . Пара функций  $R_1(\alpha, \dots)$  и  $s(\alpha)$  таким образом определяет силовые характеристики воздействия среды на диск при данных модельных предположениях.

*2.1. Динамическая часть уравнений пространственного движения.* Рассмотрим сферические координаты  $(v, \alpha, \beta)$  конца вектора  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_D$  скорости точки  $D$  относительно потока, в которых угол  $\beta$  измеряется в плоскости диска (см. рис. 3). Величины  $(v, \alpha, \beta)$  выражаются неинтегрируемыми соотношениями через циклические кинематические переменные и их производные [2, 3] (подобно (2)). Поэтому рассмотрим тройку  $(v, \alpha, \beta)$  в качестве квазискоростей, добавив к ним компоненты  $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  угловой скорости в осях, связанных с телом. Очевидно, что в таких осях  $\mathbf{v}_D = \{v \cos \alpha, v \sin \alpha \cos \beta, v \sin \alpha \sin \beta\}$ .

В силу теорем о движении центра масс (в проекциях на связанные оси  $Dxyz$ ) и об изменении кинетического момента относительно этих осей получаем динамическую часть дифференциальных уравнений движения, рассматриваемую в шестимерном фазовом пространстве квазискоростей ( $\sigma$  — расстояние  $DC$ ). Первая группа уравнений соответствует движению самого центра масс, а вторая — движению вокруг центра масс:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_y v \sin \alpha \sin \beta - \Omega_z v \sin \alpha \cos \beta + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) &= -s(\alpha)v^2/m, \\ \dot{v} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta} v \sin \alpha \sin \beta \\ + \Omega_z v \cos \alpha - \Omega_x v \sin \alpha \sin \beta - \sigma \Omega_x \Omega_y - \sigma \dot{\Omega}_z &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \sin \beta + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta + \dot{\beta} v \sin \alpha \cos \beta + \Omega_x v \sin \alpha \cos \beta \\ - \Omega_y v \cos \alpha - \sigma \Omega_x \Omega_z + \sigma \dot{\Omega}_y = 0, \end{aligned}$$

$$I_1 \dot{\Omega}_x = 0, \quad I_2 \dot{\Omega}_y + (I_1 - I_2) \Omega_x \Omega_z = -z_N s(\alpha) v^2, \quad I_2 \dot{\Omega}_z + (I_2 - I_1) \Omega_x \Omega_y = y_N s(\alpha) v^2,$$

где  $(0, y_N, z_N)$  — координаты точки  $N$  в системе  $Dxyz$ .

Подобно выбору функций воздействия среды, динамические функции  $s$ ,  $y_N$  и  $z_N$  в системе (16) примем в виде (9), а также

$$y_N = R(\alpha) \cos \beta - h_1 \frac{\Omega_z}{v}, \quad z_N = R(\alpha) \sin \beta + h_1 \frac{\Omega_y}{v}$$

(при этом функция  $R$  соответствует функции  $y$ , ср. также с [2, 15]). В рассматриваемой системе по-прежнему присутствует также и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы.

В силу уравнений (16) во все моменты времени имеется циклическое инвариантное соотношение  $\Omega_x \equiv \Omega_{x0} = \text{const}$ . В дальнейшем будем исследовать случай нулевой закрутки твердого тела вокруг своей продольной оси, т. е. когда выполнено условие  $\Omega_{x0} = 0$ .

Проектируя в дальнейшем угловые скорости на подвижные оси, не связанные с телом, таким образом, что  $z_1 = \Omega_y \cos \beta + \Omega_z \sin \beta$ ,  $z_2 = -\Omega_y \sin \beta + \Omega_z \cos \beta$ , и вводя, как и ранее, новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам  $z_k = n_0 v Z_k$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle$ , приводим систему (16) к следующему виду:

$$v' = v \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \alpha' = -Z_2 + \mu_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha \\ + \frac{\sigma}{I_2 n_0} F(\alpha) \cos \alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_2 s(\alpha) \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m n_0} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (18)$$

$$Z_2' = \frac{F(\alpha)}{I_2 n_0^2} - Z_2 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1^2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0} Z_2 s(\alpha), \quad (19)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1 Z_2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0} Z_1 s(\alpha), \quad (20)$$

$$\beta' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha}, \quad (21)$$

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m n_0} \cos \alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_2 s(\alpha) \sin \alpha.$$

В случае функций (8) Чаплыгина [1, 11] воздействия среды аналитическая система уравнений имеет вид

$$v' = v \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (22)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \mu_2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \mu_2 \mu_3 Z_2 \cos^2 \alpha + \frac{\mu_1}{2} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (23)$$

$$Z_2' = \sin \alpha \cos \alpha - Z_2 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - (1 + \mu_2 \mu_3) Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \mu_3 Z_2 \cos \alpha, \quad (24)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + (1 + \mu_2 \mu_3) Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \mu_3 Z_1 \cos \alpha, \quad (25)$$

$$\beta' = (1 + \mu_2 \mu_3) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (26)$$

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{\mu_1}{2} \cos^2 \alpha - \mu_2 \mu_3 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

где, как и выше, безразмерные параметры  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  выбраны следующим образом:

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{mn_0}, \quad \mu_2 = b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad \mu_3 = H_1 = \frac{Bh_1}{I_2 n_0}.$$

Уравнения (18)–(21) (или (23)–(26)) системы (18)–(20) (или (23)–(25)) образуют независимую подсистему четвертого, а уравнения (18)–(20) (или (23)–(25)) — третьего порядков.

*2.2. Об устойчивости прямолинейного поступательного торможения.* Исследуем устойчивость ключевого режима — невозмущенного движения — по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости, т. е. по отношению к переменным  $\alpha$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ . Другими словами, исследуем устойчивость тривиального решения независимой системы третьего порядка (18)–(20) (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат).

Справедливо следующее важное утверждение.

**Предложение 3. Плоскость**

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : Z_1 = 0\} \quad (27)$$

является интегральной для системы (18)–(20).

Более того, после формальной подстановки  $Z_1 = 0$  в систему (18)–(20) оставшиеся два уравнения на  $\alpha$ ,  $Z_2$  образуют систему, описывающую динамику плоскопараллельного движения тела (см. выше), при этом получившаяся система совпадает с (11).

Таким образом, на плоскость (27) «укладывается» фазовый портрет из плоской динамики. Более того, плоскость (27) разделяет трехмерное фазовое пространство на две части:

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \alpha < \pi, Z_1 > 0\} \quad (28)$$

и  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \alpha < \pi, Z_1 < 0\}$ , в каждой из которых движение происходит самостоятельно, но не произвольно друг от друга, поскольку в системе присутствует симметрия

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

относительно плоскости  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^3 : Z_1 = 0\}$ . Последние факты говорят о том, что систему (18)–(20) достаточно исследовать в полуограниченном слое (28), хотя полноценным фазовым пространством его считать нельзя.

Важным следствием последних замечаний является возможность использования функции

$$V_1(\alpha, Z_1) = Z_1 \sin \alpha \quad (29)$$

в качестве функции Ляпунова (Четаева) в полуограниченном слое (28), поскольку в нем данная функция положительно определена.

**Теорема 2.** Функция (29) является для системы (18)–(20) функцией Ляпунова (Четаева), т. е. ее производная в силу системы (18)–(20) отрицательно определена при  $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$  и положительно определена при  $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$ .

**Следствие.** При  $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$  система (18)–(20) имеет в начале координат (после доопределения правых частей в нем) притягивающую особую точку, а при  $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$  — отталкивающую.

Действительно, производная функции (29) в силу системы (18)–(20) представляется в виде  $(\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)Z_1\alpha + \delta(\alpha^2 + Z_1^2 + Z_2^2)$ .

В частности, аналогичная теорема справедлива и для систем вида (23)–(25), взятой для функций Чаплыгина воздействия среды [1, 11].

При переходе к задаче о движении однородных круговых цилиндров можно заключить, что указанная асимптотическая устойчивость имеет место при выполнении неравенства  $\sigma k + 2I_2/(mD) < hD$ , где  $D$  — диаметр цилиндра,  $\sigma$  — расстояние  $DC$ , а  $k$  и  $h$  — безразмерные параметры воздействия воды на цилиндр, или  $\sigma Dk + 2r_1^2 < hD^2$ , где  $r_1$  — радиус инерции цилиндра.

Видно, что теорема 2 дает такие же условия асимптотической устойчивости по части переменных  $(\alpha, Z_1, Z_2)$ , что и предложение 2, в котором фигурируют динамические системы из динамики плоскопараллельного движения.

В случае пространственного движения полученные системы имеют неопределенность в начале координат, что вызвано вырожденностью сферических координат конца вектора  $\mathbf{v}$  скорости центра переднего диска (кавитатора) и преодолевается доопределением правых частей динамических систем.

**Заключение.** Неустойчивость простейшего движения тела — прямолинейного поступательного торможения — используется в методических целях, а именно, для определения неизвестных параметров воздействия среды на твердое тело в условиях квазистационарности.

Эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров, проведенный в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова, подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твердое тело необходимо учитывать также дополнительный параметр, вносящий в систему диссипацию.

При изучении класса торможений тела с конечными углами атаки главным вопросом является нахождение таких условий, при которых существуют автоколебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения. Возникает, таким образом, необходимость полного нелинейного исследования. Начальным этапом такого исследования является пренебрежение демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело. На функциональном языке это означает предположение о том, что пара динамических функций, определяющих воздействие среды, зависит лишь от одного параметра — угла атаки. Динамические системы, возникающие при таком нелинейном описании, носят характер систем с переменной диссипацией. Поэтому появляется необходимость создания методики исследования таких систем (см. также [2, 3]).

При качественном описании взаимодействия тела со средой по причине использования экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания возникает определенный разброс в моделировании силомоментных характеристик. Это делает естественным введение определения относительной грубости (относительной структурной устойчивости) и доказательство такой грубости для исследуемых систем [3]. При этом многие из рассматриваемых систем получаются просто (абсолютно) грубыми по Андронову — Понтрягину в обычном смысле.

В работе проводится исследование движения тела в среде при учете демпфирующего момента со стороны среды. Такой момент вносит в систему дополнительную диссипацию, в результате чего прямолинейное поступательное торможение тела в принципе может стать устойчивым.

Таким образом, учет демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос: при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний.

Если параметры задачи допускают наличие критического случая, то в зависимости от старших производных функций воздействия среды  $y_N$  и  $s$  прямолинейное поступательное торможение тела может быть или устойчивым, или неустойчивым по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости.

При этом найдены достаточные условия для такой устойчивости или неустойчивости, включающие неравенства на старшие производные функций воздействия среды. Но главная трудность заключается в том, что измерить в эксперименте данные производные в явном виде не представляется возможным.

В работе также высказываются рассуждения по демонстрации, как можно исследовать поведение тела около прямолинейного поступательного торможения (т. е. устойчивые или неустойчивые угловые колебания), используя экспериментальную информацию, тем самым неявно оценивая старшие производные функций воздействия среды.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору А. П. Чупахину за ценные замечания и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Избранные труды. М.: Наука, 1976.
2. Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
3. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // *Фундамент. и прикл. математика*. 2008. Т. 14, вып. 3. С. 3–237.
4. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // *Изв. РАН. Механика жидкого газа*. 1995. № 3. С. 23–27.
5. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Физматгиз, 1947.
6. Ерошин В. А. Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // *Изв. РАН. Механика жидкого газа*. 1992. № 5. С. 20–30.
67. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1988.
8. Prandtl L., Betz A. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. Berlin, 1932.
9. Самсонов В. А., Шамолин М. В., Ерошин В. А., Макашкин В. М. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4396. М.: Ин-т механики МГУ, 1995.
10. Шамолин М. В. Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1998. № 6. С. 29–37.
11. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // *Полн. собр. соч.* Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133–135.
12. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
13. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.
14. Шамолин М. В. Движение твердого тела в сопротивляющейся среде // *Мат. моделирование*. 2011. Т. 23, № 12. С. 79–104.
15. Шамолин М. В. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // *Мат. моделирование*. 2012. Т. 24, № 10. С. 109–132.

*Статья поступила 1 декабря 2016 г.*

*Шамолин Максим Владимирович  
Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова  
Мичуринский просп., д. 1  
119192 г. Москва  
E-mail: shamolin@rambler.ru*