ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 475, № 5, с. 519–523

МЕХАНИКА

УДК 525.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2017 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 14.02.2017 г.

Поступило 14.02.2017 г.

Показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

DOI: 10.7868/S0869565217230098

Во многих задачах динамики возникают механические системы с пространствами положений — двумерными многообразиями (сферами, более общими поверхностями вращения, цилиндрами и т.д.). Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке среды приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [1, 2].

Известен также класс задач о движении точки по двумерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
E-mail: shamolin@rambler.ru

УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРИ ЗАМЕНЕ КООРДИНАТ

Как известно, в случае двумерного риманова многообразия M^2 с координатами (α, β) и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении TM^2 $\{\alpha^\bullet, \beta^\bullet; \alpha, \beta\}$ примут следующий вид (дифференцирование берётся по натуральному параметру):

$$\begin{gathered}\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta)\alpha^{\bullet 2} + 2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\alpha^\bullet\beta^\bullet + \\ + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha, \beta)\beta^{\bullet 2} = 0, \\ \beta^{\bullet\bullet} + \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta)\alpha^{\bullet 2} + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\alpha^\bullet\beta^\bullet + \\ + \Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha, \beta)\beta^{\bullet 2} = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении TM^2. Рассмотрим замену координат касательного пространства

$$\alpha^\bullet = R_1 z_1 + R_2 z_2, \quad \beta^\bullet = R_3 z_1 + R_4 z_2, \tag{2}$$

которую можно обратить: $z_1 = T_1\alpha^\bullet + T_2\beta^\bullet$, $z_2 = T_3\alpha^\bullet + T_4\beta^\bullet$, при этом R_k, T_k, $k = 1, 2, 3, 4,$ — функции от α, β, а также $RT = E$, где $R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$. Назовём также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. соотношениями на касательном расслоении TM^2.

Справедливы равенства:

$$\begin{gathered}
z_1^\bullet = \alpha^{\bullet 2}\left\{T_{1\alpha} - T_1\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha} - T_2\Gamma_{\alpha\alpha}^{\beta}\right\} + \\
+\alpha^\bullet\beta^\bullet\left\{T_{1\beta} + T_{2\alpha} - 2T_1\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} - 2T_2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}\right\} + \\
+\beta^{\bullet 2}\left\{T_{2\beta} - T_1\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha} - T_2\Gamma_{\beta\beta}^{\beta}\right\} = \\
= U_1(\alpha, \beta)z_1^2 + U(\alpha, \beta)z_1z_2 + U_2(\alpha, \beta)z_2^2, \\
z_2^\bullet = \alpha^{\bullet 2}\left\{T_{3\alpha} - T_3\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha} - T_4\Gamma_{\alpha\alpha}^{\beta}\right\} + \\
+\alpha^\bullet\beta^\bullet\left\{T_{3\beta} + T_{4\alpha} - 2T_3\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} - 2T_4\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}\right\} + \\
+\beta^{\bullet 2}\left\{T_{4\beta} - T_3\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha} - T_4\Gamma_{\beta\beta}^{\beta}\right\} = \\
= V_1(\alpha, \beta)z_1^2 + V(\alpha, \beta)z_1z_2 + V_2(\alpha, \beta)z_2^2,
\end{gathered} \tag{3}$$

где $T_{k\alpha} = \dfrac{\partial T_k}{\partial\alpha}$, $T_{k\beta} = \dfrac{\partial T_k}{\partial\beta}$, $k = 1, 2, 3, 4$, при этом в последней системе вместо $\alpha^\bullet$, $\beta^\bullet$ надо подставить формулы (2).

Предложение 1. *Система* (1) *в той области, где* $\det R(\alpha, \beta) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (2), (3).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (3) зависит как от замены переменных (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma_{jk}^{i}(\alpha, \beta)$.

Лемма. *Существуют такие гладкие функции* $R_k(\alpha, \beta)$, $k = 1, 2, 3, 4$, *что почти всюду* $\det R(\alpha, \beta) \neq 0$, *при этом выполнены равенства*

$$\begin{gathered}
V_2(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad V(\alpha, \beta) + U_2(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
V_1(\alpha, \beta) + U(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad U_1(\alpha, \beta) \equiv 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Предложение 2. *При выполнении условий леммы у системы* (2), (3) *имеется аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{5}$$

Предложение 3. *Если выполнены равенства* $U_1(\alpha,\beta) \equiv U_2(\alpha,\beta) \equiv R_1(\alpha,\beta) \equiv 0$ $(V_1(\alpha, \beta) \equiv V_2(\alpha, \beta) \equiv R_3(\alpha, \beta) \equiv 0)$, *при этом отношение* $W(\alpha, \beta) = U(\alpha, \beta)/R_2(\alpha, \beta)$ $(W(\alpha, \beta) = V(\alpha, \beta)/R_4(\alpha,\beta))$ *является функцией лишь* α $(W(\alpha, \beta) = W(\alpha))$, *то система* (2), (3) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\begin{gathered}
\Phi_2(z_1, \alpha) = z_1\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\
\Phi_0(\alpha) = \exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} W(b)\,db\right\}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^\bullet = -z_2, \quad \beta^\bullet = z_1 f(\alpha), \tag{7}$$

где $f(\alpha)$ — гладкая функция. Такие координаты z_1, z_2 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [4, 5] (в частности, на поверхностях вращения):

$$\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)\beta^{\bullet 2} = 0, \;\; \beta^{\bullet\bullet} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta)\alpha^\bullet\beta^\bullet = 0, \tag{8}$$

т.е. выполнены равенства $\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^{\beta}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\beta\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) \equiv 0$. В случае (7) уравнения (3) примут вид

$$\begin{gathered}
z_1^\bullet = -\frac{1}{f(\alpha)}\Gamma_{\alpha\alpha}^{\beta}(\alpha, \beta)z_2^2 + \\
+\left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2 - f(\alpha)\Gamma_{\beta\beta}^{\beta}(\alpha,\beta)z_1^2, \\
z_2^\bullet = \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta)z_2^2 - 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)f(\alpha)z_1z_2 + \\
+f^2(\alpha)\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)z_1^2,
\end{gathered} \tag{9}$$

и уравнения (1) почти всюду эквивалентны составной системе (7), (9) на многообразии $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$. В нашем же случае можно утверждать, что уравнения (8) перепишутся в виде

$$\begin{gathered}
\alpha^\bullet = -z_2, \\
z_2^\bullet = \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)f^2(\alpha)z_1^2, \\
z_1^\bullet = \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2, \\
\beta^\bullet = z_1 f(\alpha).
\end{gathered} \tag{10}$$

Для полного интегрирования системы (10) необходимо знать, вообще говоря, три независимых первых интеграла.

Предложение 4. *Если всюду справедливо равенство*

$$\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta)f^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \tag{11}$$

то система (10) *имеет аналитический первый интеграл вида* (5).

Действительно, решение $f(\alpha)$ уравнения (11) (которое является одним из уравнений (4)) существует. В дальнейшем в соотношении (7) мы намерены использовать именно его.

Предложение 5. *Если функция* $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)$ *является функцией лишь* α:

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{12}$$

то система (10) *имеет первый интеграл следующего вида* (*подобный* (6)):

$$\Phi_2(z_1, \alpha) = z_1\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const},$$
$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)\,db\right\}. \tag{13}$$

Если выполнено свойство (12) и функция $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)$ также является функцией лишь α:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha), \tag{14}$$

то в системе (10) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трёх уравнений (уравнение на $\beta^{\bullet}$ отделяется).

В частности, если выполнены свойства (11), (12), то такая независимая подсистема появляется.

Предложение 6. *Если выполнены условия* (11), (12), *то система* (10) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2, z_1, \alpha, \beta) =$$
$$= \beta \pm \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2 f(a)}{\sqrt{C_1^2\Phi_0^2(a) - C_2^2}}\,da = C_3 = \text{const}, \tag{15}$$

где после взятия интеграла (15) *вместо постоянных* C_1, C_2 *нужно подставить левые части равенств* (5), (13) *соответственно.*

Теорема 1. *Если выполнены условия* (11), (12), *то система* (10) *обладает полным набором (тремя) независимых первых интегралов вида* (5), (13), (15).

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ДВУМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Теперь несколько модифицируем систему (10), получив систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (16) (в отличие от системы (10)). Рассматриваемая система на касательном расслоении TM^2 $\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{gathered}\alpha^{\bullet} = -z_2,\\ z_2^{\bullet} = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)f^2(\alpha)z_1^2,\\ z_1^{\bullet} = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2,\\ \beta^{\bullet} = z_1 f(\alpha),\end{gathered} \tag{16}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\alpha^{\bullet\bullet} + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)\beta^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\alpha^{\bullet}\beta^{\bullet} = 0.$$

Предложение 7. *Если всюду справедливо равенство* (11), *то система* (16) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_1(z_2, z_1, \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const},$$
$$F_1(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F(a)\,da. \tag{17}$$

Предложение 8. *Если функция* $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)$ *является функцией лишь* α (*условие* (12)), *то система* (16) *имеет первый интеграл вида* (13).

Если выполнено свойство (12) и функция $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)$ также является функцией лишь α (условие (14)), то в системе (16) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трёх уравнений (уравнение на $\beta^{\bullet}$ отделяется).

В частности, если выполнены свойства (11), (12), то такая независимая подсистема появляется.

Предложение 9. *Если выполнены условия* (11), (12), *то система* (16) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2, z_1, \alpha, \beta) =$$
$$= \beta \pm \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2 f(a)}{\sqrt{\Phi_0^2(a)(C_1 - F_1(a)) - C_2^2}}\,da = C_3 = \text{const}, \tag{18}$$

где после взятия интеграла (18) *вместо постоянных* C_1, C_2 *нужно подставить левые части равенств* (17), (13) *соответственно.*

Теорема 2. *Если выполнены условия* (11), (12), *то система* (16) *обладает полным набором (тремя) независимых первых интегралов вида* (17), (13), (18).

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ДВУМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

Теперь несколько модифицируем систему (16). При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $bg(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (19) (в отличие от системы (16)). Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\,\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet} = -z_2 + bg(\alpha),\\
z_2^{\bullet} = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) f^2(\alpha) z_1^2,\\
z_1^{\bullet} = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2,\\
\beta^{\bullet} = z_1 f(\alpha),
\end{gathered} \tag{19}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - bg'(\alpha)\alpha^{\bullet} + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)\beta^{\bullet 2} = 0,\\
\beta^{\bullet\bullet} - bg(\alpha) f(\alpha)\beta^{\bullet} + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\alpha^{\bullet}\beta^{\bullet} = 0.
\end{gathered}$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы четвертого порядка (19) при выполнении свойств (11), (12). Она также допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка.

Т е о р е м а 3. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются равенства*

$$\begin{gathered}
\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha}\ln|g(\alpha)|,\\
F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha}\frac{g^2(\alpha)}{2}.
\end{gathered} \tag{20}$$

Тогда система (19) *обладает тремя независимыми трансцендентными первыми интегралами* [6].

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\kappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов таков:

$$\Theta_1(z_2, z_1; \alpha) = G_1\left(\frac{z_2}{g(\alpha)}, \frac{z_1}{g(\alpha)}\right) = \frac{z_2^2 + z_1^2 - bz_2 g(\alpha) + \lambda g^2(\alpha)}{z_1 g(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{21}$$

При этом дополнительные первые интегралы имеют следующие структуры:

$$\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = G_2\left(g(\alpha), \frac{z_2}{g(\alpha)}, \frac{z_1}{g(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{22}$$

$$\Theta_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = G_3\left(g(\alpha), \beta, \frac{z_2}{g(\alpha)}, \frac{z_1}{g(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{23}$$

Выражение первых интегралов (21)–(23) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $g(\alpha)$. Действительно, при $\kappa = -1$ второй из первых интегралов системы (19) найдется из квадратуры

$$\ln|g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_2)du_2}{2(\lambda - bu_2 + u_2^2) - C_1\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - bu_2 + u_2^2)}\right\}\Big/2},$$

где $u_2 = \dfrac{z_2}{g(\alpha)}$. При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 необходимо подставить левую часть равенства (21). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $g(\alpha)$.

СТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (19) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [1, 3]. При этом при $b = 0$ она превращается в систему консервативную (16). Последняя обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (17), (13). В силу (20) имеем

$$\Phi_1(z_2, z_1, \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)\,da \cong z_1^2 + z_2^2 + \lambda g^2(\alpha), \tag{24}$$

где знак $\cong$ означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом

$$\Phi_2(z_1, \alpha) = z_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)\,db\right\} \cong z_1 g(\alpha), \tag{25}$$

где знак $\cong$ означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (24), (25) (или (17), (13)) также является первым интегралом системы (16). Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$z_1^2 + z_2^2 - bz_2 g(\alpha) + \lambda g^2(\alpha) \tag{26}$$

и (25) по отдельности не являются первым интегралом системы (19). Однако отношение функций (26), (25) является первым интегралом системы (19) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [6, 9].

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{27}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{28}$$

Случай (27) формирует класс систем, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [7]. Случай (28) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на двумерной сфере. В случае (27), если $g(\alpha) = \dfrac{F(\alpha)}{\cos\alpha}$, то система описывает пространственное движение твёрдого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [1–3]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $g(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает также пространственный (сферический) маятник, помещённый в поток набегающей среды, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [6, 8].

Если функция $g(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теореме 3) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15–01–00848-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2013. Т. 125. С. 5–254.
2. *Шамолин М.В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фундам. и прикл. математика. 2015. Т. 20. В. 4. С. 3–191.
3. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14. В. 3. С. 3–197.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
5. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа // ДАН. 1984. Т. 219. № 2. С. 228–237.
6. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.
7. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // ДАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.
8. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // ДАН. 2015. Т. 464. № 6. С. 688–692.
9. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трёхмерной сферам // ДАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.