Министерство образования и науки Российской Федерации
Российская академия наук
Министерство образования и науки Республики Татарстан
Национальный комитет по автоматическому управлению
Академия наук Республики Татарстан
Научный совет РАН по теории управляемых процессов и автоматизации
Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»

115-летию со дня рождения Н.Г. Четаева
и памяти академика АН РТ
Т.К. Сиразетдинова посвящается

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ

ТРУДЫ XI МЕЖДУНАРОДНОЙ ЧЕТАЕВСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ТОМ 1

Секция 1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

13 – 17 июня 2017 г.

Казань 2017

УДК 531.01 (063) + 531.391.5 (063)
ББК 22.211 + 22.236.37
Ан 64

Ан 64 **Аналитическая механика, устойчивость и управление**: труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 1. Секция 1. Аналитическая механика. Казань, 13 – 17 июня 2017 г. – Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017.

ISBN 978-5-7579-2228-7 (т. 1)
ISBN 978-5-7579-2227-0

Представлены доклады, посвященные актуальным проблемам аналитической механики, механики сплошных сред, численных методов динамики систем, описываемых дифференциальными, алгебраическими и интегральными уравнениями. Опубликованные доклады представляют интерес для научных работников, аспирантов и инженеров, специализирующихся в области механики.

УДК 531.01 (063) + 531.391.5 (063)
ББК 22.211 + 22.236 37

ISBN 978-5-7579-2228-7 (т. 1)
ISBN 978-5-7579-2227-0

К ЗАДАЧЕ О СВОБОДНОМ ТОРМОЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия, 119192, Москва, Мичуринский пр., 1)
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

ON THE PROBLEM OF A RIGID BODY FREE DECELERATIONIN A RESISTING MEDIUM

M. V. Shamolin (Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, 119192, Moscow, Michurinskii Ave., 1)

Keywords: rigid body, resisting medium, phase pattern.

Введение. В работе изучается движение твердого тела, имеющего круговой конус в качестве передней части своей внешней поверхности, в сопротивляющейся среде. При этом линия действия силы, приложенной к телу со стороны среды, меняет свою ориентацию относительно тела, поскольку раскладывается в сумму силы лобового сопротивления и боковой силы. Рассматриваемая задача является естественным обобщением задачи о движении твердого тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде, когда касательные силы воздействия среды на плоский торец отсутствуют [1, 2].

Основным объектом исследования является семейство тел, часть поверхности которых имеет конусообразный участок, обтекаемый средой по законам струйного обтекания. При этом поток среды предполагается однородным, в том смысле, что если движущееся тело свободное, то среда на бесконечности покоится, а если (частично) закрепленное (например, вращается вокруг неподвижной точки), то скорость набегающего потока на бесконечности постоянна. Подобные условия возникают при движении тела, так сказать, с «большими» углами атаки, в среде при струйном обтекании [3–5] или при отрывном [6, 7].

1. Модельные предположения и невозмущенное движение. Поставим подробно задачу плоскопараллельного движения. Предположим, что однородное твердое тело массы m совершает плоскопараллельное движение в среде, и что некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой конус, находящийся в условиях струйного обтекания средой. Конусообразная конструкция поверхности тела и гипотеза о квазистатическом воздействии среды позволяют сформулировать полную схему сил: воздействие среды на тело сводится к суммарной силе $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_x + \boldsymbol{S}_y$ (скользящему вектору) проходящей через некоторую точку прямой Dy связанной с телом системы координат Dxy (D – вершина конуса). При этом сила лобового сопротивления $\boldsymbol{S}_x$ (скользящий вектор) параллельна оси Dx, и линия ее действия проходит через точку N, а боковая сила $\boldsymbol{S}_y$ (также скользящий вектор) действует вдоль прямой Dy (линия его действия проходит через точку D). Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края конуса, и главное, что она не испытывает действия среды.

Предположим, что координата y_N точки N определяется, по крайней мере, углом атаки α, измеряемым между вектором скорости точки D относительно потока и осью симметрии Dx: $y_N = R(\alpha,\ldots)$. Силы лобового $\boldsymbol{S}_x$ и бокового $\boldsymbol{S}_y$ сопротивления будем представлять в квадратичном виде по скорости точки D: $\boldsymbol{S}_x = -s(\alpha)v^2\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{S}_y = -b(\alpha)v^2\boldsymbol{e}_y$, $|\boldsymbol{v}_D| = v$, с некоторыми коэффициентами s, b, зависящими лишь от угла атаки. Таким образом, тройка функций $R(\alpha,\ldots)$, $s(\alpha)$, $b(\alpha)$ определяет воздействие среды на твердое тело в условиях квазистационарности [3–5, 8, 9].

Допустим, что среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения с нулевым углом атаки (невозмущенное движение). Это возможно при выполнении двух условий, а именно:

(*i*) скорости движения всех точек тела параллельны оси Dx;

(*ii*) перпендикуляр, опущенный из центра масс C тела на ось Dy, принадлежит линии действия силы $\boldsymbol{S}$.

Если формально провести ось Dz, перпендикулярную плоскости рисунка, и считать, для простоты, Dzx плоскостью геометрической симметрии тела, то это обеспечит выполнение условия (*ii*) при движении, удовлетворяющем условию (*i*).

Для построения динамической модели введем первые три фазовые координаты: v – величина скорости точки D относительно потока, α – угол атаки, Ω – значение проекции абсолютной угловой скорости тела на ось Dz. Коэффициенты лобового сопротивления s и боковой силы b обычно представляют в виде $s = \rho P c_x / 2$, $b = \rho P c_y / 2$, где c_x, c_y – уже безразмерные коэффициенты лобового сопротивления и боковой силы, соответственно (ρ – плотность среды, P – характерная поперечная площадь). Эти коэффициенты зависят от угла атаки, числа Струхаля и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем введем безразмерную фазовую переменную «типа Струхаля» $\omega = \Omega D_1 / v$ (D_1 – характерный размер).

Таким образом, в дальнейшем в уравнениях движения возникают следующие три функции фазовых переменных: R, s и b, которые будем называть функциями воздействия среды. Ограничимся зависимостью коэффициентов c_x, c_y от угла атаки, т.е. в принципе будем считать величины s

и b функциями α, а величину R – функцией, вообще говоря, пары безразмерных переменных (α,ω).

Задача о движении тела с малыми углами атаки формирует представление о нелинейных динамических системах, исследуемых в дальнейшем.

Прямолинейное поступательное (невозмущенное) движение задается уравнениями $\alpha(t) \equiv 0$, $\omega(t) \equiv 0$. Поэтому функцию R при малых α, ω примем в виде $R = D_1(k\alpha - h\omega)$, где k и h – некоторые постоянные, D_1 – характерный размер. Функцию b при малых α примем в виде $b = b_1\alpha$. Зависимостью же s от α, в силу геометрической симметрии тела, обеспечивающей четность функции s, пренебрегаем.

Линеаризованная модель силового воздействия среды содержит четыре параметра s, b_1, k, h, которые определяются геометрическими параметрами конуса. Два первых из этих параметров – коэффициенты s, b_1 – размерные. Параметры же k, h являются безразмерными в силу способа их введения. Отметим, что величины k, h могут быть экспериментально определены путем весовых измерений в установках типа гидро- или аэродинамических труб. В литературе [4, 6, 7, 10] имеется также информация о теоретическом определении этих величин для отдельных случаев (для движения твердого тела с передним плоским торцом, т.е. когда боковая сила отсутствует, см.также [11, 12]). Эта информация позволяет считать, что $k > 0$. Что же касается параметра h (который вносит в систему дополнительную зависимость момента силы от угловой скорости), то даже сама необходимость введения его в модель априори не очевидна [13, 14].

Изучение свойств движения рассматриваемых классов тел в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова было начато экспериментами по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров [11, 12], а также тел с конусообразной передней частью. Эксперимент позволил остановиться на важных выводах. Первый: режим прямолинейного поступательного торможения цилиндра (в воде) неустойчив по отношению к углу ориентации тела. Стало возможным также определение безразмерных параметров k, h воздействия воды на цилиндр. Второй вывод, полученный из проведенного натурного эксперимента, следующий: при моделировании воздействия среды на тело необходимо учитывать дополнительный параметр, эквивалентный так называемой вращательной производной момента аэрогидродинамических сил по угловой скорости тела. Этот параметр вносит в систему диссипацию.

Величина коэффициента демпфирующего момента для тел с передним плоским торцом уже была оценена в работах [15] для некоторых случаев движения в воде. Данная там оценка говорит о неустойчивости по углу атаки и угловой скорости невозмущенного движения в воде. Чисто формально, увеличивая величину коэффициента демпфирования, возможно достижение устойчивости данного движения. Невозмущенное движение твердого тела в некоторых средах (например, в глине) устойчиво в вышеописанном смысле, как показывает эксперимент [16, 17]. Возможно, данная устойчивость достигается благодаря наличию в системе значительного демпфирования со стороны среды или наличию сил, касательных к пластине. В нашем же случае конусообразного тела достижение исследуемой устойчивости станет возможным благодаря наличию боковой силы.

2. Динамическая часть уравнений движения. Нелинейные динамические уравнения плоскопараллельного движения тела представим следующим образом:

$$v^{\bullet}\cos\alpha - \alpha^{\bullet} v \sin\alpha + \Omega v \sin\alpha + \sigma\Omega^2 = -\frac{s(\alpha)v^2}{m}, \tag{2.1}$$

$$v^{\bullet}\sin\alpha + \alpha^{\bullet} v \cos\alpha - \Omega v \cos\alpha + \sigma\Omega^{\bullet} = -\frac{b(\alpha)v^2}{m}, \tag{2.2}$$

$$I\Omega^{\bullet} = -F(\alpha)v^2 + \sigma b(\alpha)v^2, \tag{2.3}$$

где I – центральный момент инерции тела, m – его масса, σ – расстояние CD, при этом в данной работе ограничимся зависимостью функции R лишь от угла атаки, т.е. $R(\alpha,\ldots) = R(\alpha)$, $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$ [1, 2].

Для завершения описания движения тела к системе динамических уравнений (2.1)–(2.3) необходимо присовокупить кинематическую часть уравнений движения, состоящую из трех уравнений первого порядка. Но поскольку кинетическая энергия тела, а также обобщенные силы не зависят от положения тела на плоскости, система уравнений (2.1)–(2.3) является замкнутой и может быть рассмотрена самостоятельно.

Для качественного описания тройки функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$ и $b(\alpha)$, входящей в систему (2.1)–(2.3), используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания конусообразных тел. Вводимые классы достаточно широки: они состоят из функций достаточно гладких, 2π-периодических (s – четная, а R, b – нечетные), удовлетворяющих следующим условиям: $(R, b)(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0,\pi)$, причем $(R, b)'(0) > 0$, $(R, b)'(\pi) < 0$, (классы функций $\{R\}$, $\{b\}$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0,\pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2,\pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\}$). Как R, b, так и s меняют знак при замене α на α + π. Таким образом, $R \in \{R\}$, $b \in \{b\}$, $s \in \{s\}$.

Видно, что дальнейшем в рассматриваемых динамических системах возникает также произведение $F(\alpha)=R(\alpha)s(\alpha)$. Из вышеперечисленных условий следует, что F – достаточно гладкая нечетная π-периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{F\}$). Таким образом, $F \in \{F\}$.

Итак, для исследования обтекания тела конусообразной формы средой используются классы динамических систем, определенные с помощью тройки функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

При изучении движения тела с конечными углами атаки *основным вопросом нелинейного анализа* является нахождение таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле невозмущенного движения, что подтверждает необходимость полного нелинейного исследования.

У системы (2.1)–(2.3) третьего порядка при условии

$$T = T_v(\alpha,\Omega) = \tau_1(\alpha)v^2 + \tau_2(\alpha)\Omega v + \tau_3(\alpha)\Omega^2 = T_1(\alpha, \Omega / v)v^2$$

возможно отщепление независимой подсистемы второго порядка. Действительно, система (2.1)–(2.3) является эйлеровой однородной системой по части квазискоростей ($\mathbf{\Omega}$,v) степени однородности 2, поскольку после замены независимого переменного (времени t) $dq = vdt$, $v \neq 0$ ($<\bullet> = d/dt = vd/dq = v<'>$), а также угловой скорости $\mathbf{\Omega} = \omega v$, получаем новую систему, эквивалентную системе (2.1)–(2.3):

$$v' = v\Psi_1(\alpha,\omega), \tag{2.4}$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha,\omega)\cos\alpha + \sigma\omega^2\cos\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\cos\alpha, \tag{2.5}$$

$$\omega' = -\frac{1}{I}\psi(\alpha,\omega) - \omega\Psi_1(\alpha,\omega), \tag{2.6}$$

$$\psi(\alpha,\omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha),\ \Psi_1(\alpha,\omega) = \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha,\omega)\sin\alpha - \sigma\omega^2\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\sin\alpha.$$

В системе (2.4)–(2.6) третьего порядка появляется независимая подсистема (2.5), (2.6) второго порядка, которая может быть рассмотрена самостоятельно на своем фазовом цилиндре $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}\times\mathbf{R}^1\{\omega\}$.

3. Об устойчивости невозмущенного движения. При изучении модели взаимодействия твердого тела со средой будут найдены достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (свободного торможения). С практической точки зрения данный вопрос достаточно важен. Будет также показано, что при некоторых условиях возможно присутствие в системе либо устойчивого, либо неустойчивого автоколебательных режимов.

Предлагаемый материал представляет собой введение в задачу движения твердого тела, взаимодействующего со средой через передний участок своей внешней поверхности, имеющий форму конуса. При построении силового воздействия среды используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности.

Напомним, что, по причине сложности нелинейного анализа, начальным этапом такого исследования является пренебрежение зависимостью момента суммарной силы воздействия среды от угловой скорости тела и использование такой зависимости лишь от угла атаки (как мы уже отметили выше, $R(\alpha,\ldots) = R(\alpha)$).

Весь спектр результатов, найденных при указанном простейшем предположении, позволяет в дальнейшем сделать вывод о возможности нахождения таких условий, при которых у приведенных систем существовали бы решения, соответствующие угловым колебаниям тела ограниченной амплитуды.

3.1. Устойчивость по линейному приближению. Речь идет об исследовании устойчивости тривиального решения системы (2.5), (2.6). Система (2.5), (2.6), в которой вводятся безразмерные дифференцирование и переменная ω: < ‘ > → n_0< ‘ >, $n_0^2 = \dfrac{AB}{I}$, $A = y'(0)$, $B = s(0)$, $\omega \to n_0\omega$, примет вид

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{In_0}F(\alpha)\cos\alpha - \frac{\sigma^2}{In_0}b(\alpha)\cos\alpha + \sigma n_0\omega^2\sin\alpha + \\ + \frac{s(\alpha)}{mn_0}\sin\alpha - \frac{b(\alpha)}{mn_0}\cos\alpha, \tag{3.1}$$

$$\omega' = -\frac{1}{In_0^2}F(\alpha) + \frac{\sigma}{In_0^2}b(\alpha) - \frac{\sigma}{In_0}\omega F(\alpha)\sin\alpha + \\ + \frac{\sigma^2}{In_0}\omega b(\alpha)\sin\alpha + \sigma n_0\omega^3\cos\alpha + \omega\frac{s(\alpha)}{mn_0}\cos\alpha + \omega\frac{b(\alpha)}{mn_0}\sin\alpha. \tag{3.2}$$

Введем следующие безразмерные положительные параметры: $\mu_1 = 2\dfrac{B}{mn_0}$, $\mu_2 = \sigma n_0$, $\mu_3 = \dfrac{b_1}{mn_0}$, $\mu_4 = \dfrac{\sigma b_1}{In_0^2}$, где $b_1 = b'(0)$.

Параметры $\mu_1,\ldots,\mu_4$ естественно назвать: μ_1 – параметр силы лобового сопротивления; μ_2 – параметр момента лобового сопротивления; μ_3 – параметр боковой силы; μ_4 – параметр момента боковой силы.

Исследуя устойчивость тривиального решения системы (3.1), (3.2), выпишем соответствующее характеристическое уравнение. Оно имеет вид:

$$\lambda^2 + K_1\lambda + K_2 = 0,\ K_1 = \mu_2(\mu_4 - 1) + \mu_3 - \mu_1,\ K_2 = \frac{\mu_1}{2}\left(\mu_2 - \mu_2\mu_4 + \frac{\mu_1}{2} - \mu_3\right) + 1 - \mu_4.$$

Предложение 1. *При выполнении следующих двух неравенств*

$$\mu_2\mu_4 + \mu_3 > \mu_1 + \mu_2,\ \frac{\mu_1\mu_2}{2} + \frac{\mu_1^2}{4} + 1 > \frac{\mu_1\mu_2\mu_4}{2} + \frac{\mu_1\mu_3}{2} + \mu_4 \tag{3.3}$$

тривиальное решение системы (3.1), (3.2) асимптотически устойчиво.

Условия (3.3) действительно могут быть выполнены. К примеру, если $\mu_1 = \mu_3$, то первое неравенство в (3.3) выполняется при любых положительных параметрах μ_2, μ_4, в результате чего второе неравенство в (3.3) нетрудно удовлетворить.

3.2. О рождении предельного цикла из слабого фокуса. Для возможного рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (3.1), (3.2) при *критическом* сочетании параметров

$$\mu_2\mu_4 + \mu_3 = \mu_1 + \mu_2 . \tag{3.4}$$

Для этого сделаем следующую замену фазовых переменных $(\alpha,\omega) \to (a,w)$ в системе (3.1), (3.2): $\alpha = a,\ \omega = \dfrac{\mu_1}{2}a + \omega_0 w,\ \omega_0 = \sqrt{1-\dfrac{\mu_1^2}{4}-\mu_4}$, переводящую ее в систему следующую:

$$\begin{aligned} a' &= |\omega_0| w + C_1 a^3 + C_2 a^2 w + C_3 a w^2 + \overline{o_1}((a^2+w^2)^{3/2}), \\ w' &= -|\omega_0| a + C_4 a^3 + C_5 a^2 w + C_6 a w^2 + C_7 w^3 + \overline{o_2}((a^2+w^2)^{3/2}), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$C_1 = \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} + \frac{s_2}{2mn_0} + \frac{5\mu_1}{12} + \mu_2\left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}\right)^2 - \frac{\sigma^2 b_3}{6In_0} - \frac{b_3}{6mn_0},\ C_2 = -\frac{5}{2}\mu_2\left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}\right)\omega_0,$$

$$C_3 = \mu_2\omega_0^2,\ C_4 = -\left(1 + \frac{\mu_1\mu_2}{2}\right)\frac{f_3}{6In_0^2\omega_0} + \frac{\mu_2 + \mu_1/2}{2\omega_0}\cdot\left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{3}\right) + \frac{\sigma b_3}{6In_0^2},$$

$$C_5 = \frac{s_2}{2mn_0} + \mu_2\left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}\right)^2 + \frac{3\mu_1}{4},\ C_6 = -2\mu_2\left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}\right)\omega_0,$$

$$C_7 = \mu_2\omega_0^2,\ s_2 = s''(0),\ f_3 = F'''(0),\ b_3 = b'''(0).$$

Введем следующий вспомогательный индекс (см. также [18]):

$$Ind = |\omega_0|\{Y_{111}^1 + Y_{122}^1 + Y_{112}^2 + Y_{222}^2\} + (Y_{11}^1 Y_{11}^2 + Y_{11}^1 Y_{12}^1 + Y_{11}^2 Y_{12}^2 + Y_{22}^2 Y_{12}^2 - Y_{22}^1 Y_{12}^1 - Y_{22}^1 Y_{22}^2),$$

где $Y_{jkl}^i = \dfrac{\partial^3 Y_i}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l}(0,0),\ Y_{jk}^i = \dfrac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0,0),\ \begin{pmatrix} Y_1(a,w) \\ Y_2(a,w) \end{pmatrix}$ – правая часть системы (3.1), (3.2).

Более конкретно, для системы (3.1), (3.2) построенный индекс будет иметь вид: $Ind = 6C_1 + 2C_3 + 2C_5 + 6C_7 = \dfrac{\mu_2 f_3}{In_0^2} + \dfrac{4s_2}{mn_0} + 5(\mu_1 + \mu_2) - \dfrac{\sigma^2 b_3}{In_0} - \dfrac{b_3}{mn_0}$. Поскольку для данной системы $Y_{jk}^i = \dfrac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0,0) = 0$ (по причине нечетности ее правой части от фазовых переменных) для любых индексов i, j, k, то следующее предложение дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при $Ind \neq 0$.

Предложение 2. *Если* Ind < 0 (*Ind* > 0) *и при этом выполнено неравенство*

$$(\mu_2\mu_4+\mu_3-\mu_2)^2+4\mu_4<4, \tag{3.6}$$

то начало координат фазовой плоскости $\mathbf{R}^2\{a,w\}$ *системы* (3.5) *при критическом соотношении параметров* (3.4) *является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.*

Условие (3.6) в данном случае является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости $\mathbf{R}^2\{a,w\}$ является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом.

Введем вспомогательное обозначение: $\mu=\mu_2\mu_4+\mu_3-\mu_1-\mu_2$. Очевидно, что в критическом случае (3.4) выполнено равенство $\mu=0$. Перефразировкой известной теоремы Пуанкаре–Андронова–Хопфа [19, 20] является

Теорема 1. *Пусть для системы* (3.5) *выполнено неравенство* (3.6). *Тогда:*

1) Если Ind < 0*, то для любых фиксированных* μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 *найдутся такие* δ_1, δ_2 > 0*, что при* $\mu\in(0,\delta_1)$ *начало координат является сильным устойчивым фокусом; при* $\mu\in(-\delta_2,0)$ *начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением* μ *от 0 до –* δ_2 *как* $\sqrt{|\mu|}$.

2) Если Ind > 0*, то для любых фиксированных* μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 *найдутся такие* δ_1, δ_2 > 0*, что при* $\mu\in(-\delta_2,0)$ *начало координат является сильным неустойчивым фокусом; при* $\mu\in(0,\delta_1)$ *начало координат является сильным устойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом* μ *от 0 до* δ_1 *как* $\sqrt{|\mu|}$.

Проверить выполнение условия $\mu>0$ ($\mu<0$) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды (y_N, s, b), или от их значений. А вот проверка условия *Ind* < 0 (*Ind* > 0) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды (y_N, s, b) неизвестны.

3.3. Движение конкретного твердого тела с конусообразной передней частью в воде. Рассмотрим движение следующего составного твердого тела в воде. Тело представляет собой цилиндр диаметром 30 мм (D = 2R = 30 мм), передней частью которого является круговой конус массы m = 80,5 г. Угол разворота конуса равен 82°, что означает выполнение равенств c_x = 0,635, c_y = 0,14.

Эксперименты по регистрации движении таких составных тел в воде были проведены в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова.

Безразмерный центральный момент инерции составного тела равен $\bar{I} = 11{,}1 = \dfrac{I}{\rho R^5}$, где I – центральный (размерный) момент инерции, ρ – плотность воды. Расстояние *CD* от центра масс тела до точки *D* (передней точки конуса – вершины) равно σ = 17,5 мм. Коэффициенты лобового сопротивления и боковой силы будут представлены в виде $B = s(0) = \dfrac{1}{2} c_x \rho \pi R^2$, $b_1 = b'(0) = \dfrac{1}{2} c_y \rho \pi R^2$, при этом координата точки *N* (при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости тела) имеет вид $y_N = A\alpha$, где $A = 2Rk$. Порядок коэффициента $k > 0$ уже был оценен в работе [10]. Подсчитаем величину n_0, приняв систему СГС. Получим: $n_0^2 = \dfrac{AB}{I} = \dfrac{kc_x\pi}{11{,}1R^2} = 0{,}18\dfrac{k}{R^2}$, откуда $n_0 = 0{,}423\dfrac{\sqrt{k}}{R}$.

Теперь подсчитаем безразмерные параметры $\mu_1, \ldots, \mu_4$. А именно,

$$\mu_1 = 2\frac{B}{mn_0} = \frac{c_x \pi R^2}{80{,}5n_0} = \frac{0{,}557}{n_0} = \frac{0{,}197}{\sqrt{k}}; \quad \mu_2 = \sigma n_0 = 0{,}494\sqrt{k}; \quad \mu_3 = \frac{b_1}{mn_0} = \frac{0{,}0217}{\sqrt{k}};$$

$\mu_4 = \dfrac{\sigma b_1}{I n_0^2} = \dfrac{1{,}75c_y}{2Rkc_x} = \dfrac{0{,}128}{k}$. Тогда условия колебательного движения (т.е. второе условие из (3.3) означающее, что тривиальное решение является или притягивающим, или отталкивающим) примет вид $1{,}048 > \dfrac{0{,}126}{k}$, или $k > k_* = 0{,}121$, где k_* – некоторое критическое значение *k*.

Как уже отмечалось, значение постоянной *k* уже было оценено в некоторых работах (но, в основном, для переднего плоского торца). Для определения этого параметра необходимо проведение дополнительных натурных экспериментов.

Видно, что при $k < k_*$ тривиальное решение соответствующей системы соответствует грубому седлу на фазовой плоскости. При этом существуют начальные условия, при которых возможно движение вдоль устойчивых сепаратрис данного седла. При $k > k_*$ есть надежда на асимптотическую устойчивость тривиального решения (при выполнении первого неравенства из (3.3)).

В любом случае становится возможным сконструировать составное твердое тело с передним конусом такое, чтобы оба условия (3.3) могли быть выполнены.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Издательство «Экзамен», 2007. – 352 с.
2. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14. – Вып. 3. – С. 3–237.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т. 1. – М.: Наука, 1983. – 528 с.; т. 2. – М.: Наука, 1984. – 560 с.
4. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. – 322 с.
5. Чаплыгин С.А. Избранные труды. – М.: Наука, 1976. – 495 с.
6. Табачников В.Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. Вып. 1621. – М., 1974. – С. 18–24.
7. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В., Королев Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
8. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. – М.: МГУ, 1986. – 86 с.
9. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. – С. 133–135.
10. Prandtl L., Betz A., Ergebmisse der Aerodinamischen Versuchsastalt zu Gottingen, Berlin, 1932. 148 p.
11. Ерошин В.А., Самсонов В.А., Шамолин М.В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Известия РАН. – МЖГ. – 1995. – № 3. – С. 23–27.
12. Самсонов В.А., Шамолин М.В., Ерошин В.А., Макаршин В.М. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4396. М., 1995. – 41 с.
13. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1969. – 349 с.
14. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1988. – 320 с.
15. Ерошин В.А. Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН. – МЖГ. – 1992. – № 5. – С. 20–30.
16. Бивин Ю.К., Викторов В.В., Степанов Л.П. Исследование движения твердого тела в глинистой среде // Изв. АН СССР. – МТТ. – 1978. – № 2. – С. 159–165.