М. В. Шамолин, Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2017, том 137, 104–117

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 137 (2017). С. 104–117

УДК 517, 531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ

© 2017 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Во многих задачах многомерной динамики возникают системы, пространствами положений которых являются сферы конечной размерности. Соответственно, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к данным сферам. В работе изучаются неконсервативные силовые поля в динамике многомерного твердого тела, при наличии которых системы обладают полным набором первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций и являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями своих переменных. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от тензора угловой скорости.

***Ключевые слова*:** динамическая система, диссипация, трансцендентный первый интеграл, интегрируемость.

***AMS Subject Classification*:** 34Cxx, 37E10, 37N05

СОДЕРЖАНИЕ

1. Предварительные сведения

Ранее в [18, 20] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов (см. [12, 14, 17, 19, 21]). Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной работе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску (см. [15, 16, 22, 23, 25, 26]). Вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от тензора угловой скорости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00848-а).

2. Динамика на $\mathfrak{so}(n)$ и $\mathbb{R}^n$

Конфигурационным пространством свободного n-мерного твердого тела является прямое произведение пространства $\mathbb{R}^n$ (определяющего координаты центра масс тела) на группу его вращений $\mathrm{SO}(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс)

$$\mathbb{R}^n \times \mathrm{SO}(n) \tag{2.1}$$

и имеет размерность $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$. Соответственно, размерность фазового пространства равна $n(n+1)$.

В частности, если Ω — тензор угловой скорости n-мерного твердого тела (он является тензором второго ранга, см. [3–5]), $\Omega \in \mathfrak{so}(n)$, то та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$, имеет следующий вид (см. [1, 2, 6, 7, 9]):

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{2.2}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{2.3}$$

$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + \ldots + I_n}{2}, \ldots,$$
$$\lambda_{n-1} = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-2} - I_{n-1} + I_n}{2}, \quad \lambda_n = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n}{2},$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbb{R}^n$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$, $[\cdot,\cdot]$ — коммутатор в $\mathfrak{so}(n)$. При этом, очевидно, для любых $i, j = 1, \ldots, n$, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i. \tag{2.4}$$

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathfrak{so}(n), \tag{2.5}$$

переводящее пару векторов $(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$, где $\mathbf{DN} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$, $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (здесь $\mathbf{DN}$ — вектор, идущий из начала D координат системы $Dx_1 \ldots x_n$ в точку N приложения силы). При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_n \\ F_1 & F_2 & \ldots & F_n \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Всевозможные миноры второго порядка (а их в точности $n(n-1)/2$ штук) со знаком данной матрицы суть координаты момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$, а сам момент отождествляется с некоторым элементом алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$.

Поскольку введена упорядоченность координат ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n на алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$, то можно ввести такую же упорядоченность и для вычисления момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$ (см. [9, 25–27]). Полученное упорядоченное множество из $n(n-1)/2$ величин будем называть координатами момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$.

Исследуемые в дальнейшем динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [18, 20]). Нам потребуется исследовать часть основного уравнения динамики, а именно, в данном случае уравнение Ньютона, которое в данном случае представляет собой уравнение движения центра масс — та часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству $\mathbb{R}^n$:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс C тела, m — его масса. При этом в силу многомерной формулы Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \quad \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega}, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{w}_D$ — ускорение точки D, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Предположим, что положение тела Θ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ определяется функциями, которые являются циклическими в следующем смысле: обобщенная сила $\mathbf{F}$ и ее момент $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ зависят лишь от обобщенных скоростей (квазискоростей) и не зависят от положения тела в пространстве. Тогда система уравнений (2.2), (2.7) на многообразии $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n)$ определяет *замкнутую* систему динамических уравнений движения свободного n-мерного твердого тела под действием внешней силы $\mathbf{F}$. Данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (2.1) и может быть исследована самостоятельно.

3. Задача о движении со следящей силой

3.1. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного твердого тела с «передним торцом» ($(n-1)$-мерным диском, взаимодействующим со средой, заполняющей n-мерное пространство) в поле силы сопротивления $\mathbf{S}$ в условиях квазистационарности (см. [10, 11, 30]).

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр $(n-1)$-мерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), Ω — тензор угловой скорости тела, $Dx_1 \ldots x_n$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3, …, Dx_n лежат в гиперплоскости диска, I_1, I_2, $I_3 = I_2$, …, $I_n = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \ldots x_n$ ($\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, \ldots, 0\}$):

$$\mathbf{v}_D = v\mathbf{i}_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right), \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{i}_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \vdots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

— орт вектора $\mathbf{v}$.

Примем также разложение для функции воздействия среды на n-мерное тело: $\mathbf{S} = \{-S, 0, \ldots, 0\}$, т.е. в данном случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда нетрудно получить часть динамических уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина, см. [10, 11]), описывающую движение центра масс и соответствующую пространству $\mathbb{R}^n$; при этом касательные силы воздействия среды на $(n-1)$-мерный диск отсутствуют.

Вспомогательная матрица для вычисления момента силы сопротивления примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

что позволяет получить часть динамических уравнений движения тела, описывающую движение вокруг центра масс и соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$.

Таким образом, фазовым пространством системы в общем случае является пространство $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathfrak{so}(n)$.

3.2. Следствия динамической симметрии. Отметим, что рассматриваемая система в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \ldots = I_n \tag{3.4}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \text{const}, \quad \ldots, \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \text{const}, \quad s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}; \tag{3.5}$$

здесь $k_1 = 1, \ldots, k_s$ — некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$. Рассмотрим набор (3.5) первых интегралов на нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = \ldots = \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{3.6}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = n(n-1)/2 - (n-1)(n-2)/2 = n-1$ штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества W_1, отличных от $k_1, \ldots, k_s$).

3.3. Неинтегрируемая связь и выбор следящей силы. Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства

$$v \equiv \text{const} \tag{3.7}$$

(см. [28, 29]), то в системе (2.2), (2.7) вместо F_1 будет стоять величина $T - s(\alpha)v^2$, $\sigma = DC$.

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться выполнения равенства (3.7) во все время движения. Действительно, формально выражая величину T в силу системы (2.2), (2.7) получим при $\cos\alpha \neq 0$, $n > 2$:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = m\sigma(\omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_p}^2) + \\ + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma}{(n-2)I_2} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{3.8}$$

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})) = \\ = 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}). \tag{3.9}$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \ldots, n$ ($i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0$) — компоненты орта вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbb{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ (заданной равенством (3.7)), а именно:

$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ i_{2N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{3N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ \vdots \\ i_{n-1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{nN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \cos\beta_2 \\ \vdots \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} \cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right) \tag{3.10}$$

(см. (3.2)). При получении равенства (3.8) используются условия (3.5)–(3.7).

3.4. Редукции в системе. Данную процедуру можно рассматривать с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (3.7). Во-вторых, можно трактовать ее как процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, рассматриваемая система в результате действий (выполнение равенств (3.7), (3.5), (3.6)) порождает независимую систему порядка

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = 2(n-1). \tag{3.11}$$

3.5. Новые квазискорости в системе. Введем новые квазискорости в рассматриваемой системе. Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции следующих $n-2$ поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \vdots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

где матрицы $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, отличаются от единичной матрицы лишь наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\beta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\beta.$$

3.6. Системы нормального вида. На многообразии

$$O_1' = \Big\{ (\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}) \in \mathbb{R}^{2(n-1)} : \\ \alpha = \frac{\pi}{2}k,\ \beta_1 = \pi l_1,\ \ldots,\ \beta_{n-3} = \pi l_{n-3},\ k, l_1, \ldots, l_{n-3} \in \mathbb{Z} \Big\} \tag{3.14}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot\alpha$, $\dot\beta_1$, ..., $\dot\beta_{n-2}$. Таким образом, формально на многообразии (3.14) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при четном k и любых $l_1, \ldots, l_{n-3}$ неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, а при нечетном k происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом одно уравнение вырождается. Из этого следует, что рассматриваемая система вне и только вне многообразия (3.14) может быть приведена к следующему виду ($n > 2$):

$$\dot\alpha = -z_{n-1} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right), \tag{3.15}$$

$$\dot z_{n-1} = \frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) - \left(z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^s z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\right\}, \tag{3.16}$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Bigg\{ z_{n-1}\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) + \\ + \sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1} z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\Bigg\} - \\ - \frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right), \tag{3.17}$$

$$\dot z_{n-3} = \left(z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\left[-z_{n-1} + z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right] + \right. \\ \left. + \sum_{s=3}^{n-2}(-1)^s z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\} + \\ + \frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \quad (3.18)$$

. . . .

$$\dot z_1 = \dot\beta_{n-2}\Big(-\omega_{r_1}\sin\beta_{n-2} + \omega_{r_2}\cos\beta_{n-2}\Big) + \\ + (-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \\ = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + \\ + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\times \\ \times\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^s z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + \\ + (-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \quad (3.19)$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \quad (3.20)$$

$$\dot\beta_2 = -z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \quad (3.21)$$

. . . .

$$\dot\beta_{n-2} = (-1)^{n+1}z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}} + \\ + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \quad (3.22)$$

где

$$\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1 + \frac{\pi}{2},\beta_2,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),$$

$$\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2 + \frac{\pi}{2},\beta_3,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),$$

. . . . (3.23)

$$\Delta_{v,n-3}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-3} + \frac{\pi}{2},\beta_{n-2}\right)\right),$$

$$\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-2} + \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ представляется в виде (3.9). Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$.

3.7. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (3.15)–(3.22) после общего множителя

$$\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v\right)$, $s = 1, \ldots, n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, в уравнении (3.16) (с левой частью $\dot{z}_{n-1}$) функции (3.23) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ n-2. \tag{3.24}$$

Далее, в уравнениях (3.17)–(3.19), появление набора функций (3.23) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для $\dot{z}_{n-2}$ по-прежнему входит набор функций (3.23) с индексами (3.24), в то время как в уравнение для $\dot{z}_{n-3}$ входит уже набор с индексами

$$2\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ n-2, \tag{3.25}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v\right)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается следующей таблицей 1.

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (3.23)

Левая часть (3.15)–(3.22)	Распределение индексов s набора (3.23)					
$\dot{z}_{n-2}$	1	2	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-3}$	2	2	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-4}$	3	3	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-5}$	4	4	4	4	...	$n-2$
...	...	...	...	...	...	...
$\dot{z}_1$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	...	$n-2$

Так. минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n = 3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (3.23) при $s = 1$. Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (3.23) при $s = 1, 2$. Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (3.23) при $s = 1, 2, 3$ и т. д.

4. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

4.1. Введение зависимости от угловой скорости. Данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости. Введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на $(n-1)$-мерный диск, $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно (см. [18, 20]).

Примем следующую зависимость: $x = Q + R$, где $R = (R_1, \ldots, R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Здесь Ω — тензор угловой скорости, $(h_1, \ldots, h_n)$ — некоторые положительные параметры (ср. [5–7]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv 0$,

$$x_{2N} = Q_2 - h_1\frac{\omega_{r_{n-1}}}{v}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1\frac{\omega_{r_{n-2}}}{v}, \quad \ldots, \quad x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1}h_1\frac{\omega_{r_1}}{v}. \tag{4.2}$$

Здесь $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ — оставшиеся (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости Ω.

4.2. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [10, 11]), пользуясь (3.10), имеем:

$$Q = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{4.3}$$

а динамические функции s, x_{2N}, …, x_{nN} примем в виде

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{4.4}$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости), причем $h_2 = \ldots = h_n$ в силу динамической симметрии тела. При этом функции

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right), \quad \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right), \quad s = 1, \ldots, n-2,$$

входящие в систему (3.15)–(3.22), примут следующий вид:

$$\begin{gathered} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha - \frac{h_1}{v}z_{n-1}, \\ \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \frac{h_1}{v}z_{n-2}, \quad \ldots, \quad \Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = (-1)^{n+1}\frac{h_1}{v}z_1. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Тогда, благодаря неинтегрируемой связи (3.7), вне и только вне многообразия (3.14) динамическая часть уравнений движения (система (3.15)–(3.22)) примет вид аналитической системы. Введем далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$\begin{gathered} z_k \mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2} \ (n > 2), \\ b = \sigma n_0, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{(n-2)I_2 n_0}, \quad \langle\cdot\rangle = n_0 v \left\langle{}'\right\rangle, \end{gathered} \tag{4.6}$$

приведем систему (3.15)–(3.22) к виду

$$\alpha' = -\big(1 + bH_1\big)z_{n-1} + b\sin\alpha, \tag{4.7}$$

$$z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - \big(1 + bH_1\big)\Big(z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2\Big)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 z_{n-1}\cos\alpha, \tag{4.8}$$

$$z'_{n-2} = \big(1 + bH_1\big)z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \big(1 + bH_1\big)\Big(z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2\Big)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - H_1 z_{n-2}\cos\alpha, \tag{4.9}$$

$$z'_{n-3} = \big(1+bH_1\big)z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \big(1+bH_1\big)z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \big(1+bH_1\big)\Big(z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2\Big)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - H_1 z_{n-3}\cos\alpha, \quad (4.10)$$

. . . .

$$z'_1 = \big(1+bH_1\big)z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} - H_1 z_1\cos\alpha, \quad (4.11)$$

$$\beta'_1 = \big(1+bH_1\big)z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (4.12)$$

$$\beta'_2 = -\big(1+bH_1\big)z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \quad (4.13)$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n\big(1+bH_1\big)z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \quad (4.14)$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}\big(1+bH_1\big)z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \quad (4.15)$$

Видно, что в системе (4.7)–(4.15) порядка $2(n-1)$, которую можно рассматривать на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$, образовалась независимая система (4.7)–(4.14) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

Теорема 4.1. *Система* (2.2), (2.7) *при условиях* (3.7), (3.5), (3.6) *редуцируется к динамической системе* (3.15)–(3.22) *на касательном расслоении* $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-*мерной сферы* $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. *В частности, при условии* (4.4) *— к системе* (4.7)–(4.15).

4.3. Полный список инвариантных соотношений при любом конечном n. Для полного интегрирования системы (4.7)–(4.15) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем.

Действительно, после замены переменных

$$w_{n-1}=z_{n-1},\quad w_{n-2}=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2},\quad w_{n-3}=\frac{z_2}{z_1},\quad w_{n-4}=\frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}},\quad \ldots,\\ w_2=\frac{z_{n-3}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2}},\quad w_1=\frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}}, \quad (4.16)$$

система (4.7)–(4.15) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -(1+bH_1)w_{n-1}+b\sin\alpha, \quad (4.17)$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_{n-1}\cos\alpha, \quad (4.18)$$

$$w'_{n-2} = (1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_{n-2}\cos\alpha, \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} w'_s = d_s\Big(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\Big)\dfrac{1+w_s^2}{w_s}\dfrac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta'_s = d_s\Big(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\Big), \quad s=1,\ldots,n-3, \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}\Big(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\Big), \quad (4.21)$$

где выполнены условия

$$\begin{gathered}
d_1\Big(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\Big) = Z_{n-2}\Big(w_{n-1},\ldots,w_1\Big)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
d_2\Big(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\Big) = -Z_{n-3}\Big(w_{n-1},\ldots,w_1\Big)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d_{n-2}\Big(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\Big) = (-1)^{n+1}Z_1\Big(w_{n-1},\ldots,w_1\Big)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}};
\end{gathered} \tag{4.22}$$

при этом

$$z_k = Z_k\Big(w_{n-1},\ldots,w_1\Big), \quad k=1,\ldots,n-2, \tag{4.23}$$

— функции в силу замены (4.16).

Видно, что система (4.17)–(4.21) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (4.17)–(4.19) — третьего, а системы (4.20) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.17)–(4.21) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.17)–(4.19), по одному — для систем (4.20) (всего $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.21) (т.е. всего n первых интегралов).

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (4.17)–(4.19) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}
\frac{dw_{n-1}}{d\alpha} &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_{n-2}^2\cos\alpha/\sin\alpha - H_1w_{n-1}\cos\alpha}{-(1+bH_1)w_{n-1}+b\sin\alpha},\\
\frac{dw_{n-2}}{d\alpha} &= \frac{(1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\cos\alpha/\sin\alpha - H_1w_{n-2}\cos\alpha}{-(1+bH_1)w_{n-1}+b\sin\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Используя замену $\tau=\sin\alpha$, перепишем систему (4.24) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}
\frac{dw_{n-1}}{d\tau} &= \frac{\tau - (1+bH_1)w_{n-2}^2/\tau - H_1w_{n-1}}{-(1+bH_1)w_{n-1}+b\tau},\\
\frac{dw_{n-2}}{d\tau} &= \frac{(1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}/\tau - H_1w_{n-2}}{-(1+bH_1)w_{n-1}+b\tau}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2}=u_1\tau, \quad w_{n-1}=u_2\tau, \tag{4.26}$$

приводим систему (4.25) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau}+u_2 &= \frac{1-(1+bH_1)u_1^2 - H_1u_2}{-(1+bH_1)u_2+b},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau}+u_1 &= \frac{(1+bH_1)u_1u_2 - H_1u_1}{-(1+bH_1)u_2+b},
\end{aligned} \tag{4.27}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{(1+bH_1)(u_2^2-u_1^2)-(b+H_1)u_2+1}{-(1+bH_1)u_2+b},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}{-(1+bH_1)u_2+b}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (4.28) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1-(1+bH_1)(u_1^2-u_2^2)-(b+H_1)u_2}{2(1+bH_1)u_1u_2-(b+H_1)u_1}, \tag{4.29}$$

которое легко приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1+bH_1)(u_2^2+u_1^2)-(b+H_1)u_2+1}{u_1}\right)=0. \tag{4.30}$$

Итак, уравнение (4.29) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1+bH_1)(u_2^2+u_1^2)-(b+H_1)u_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{4.31}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_{n-1},w_{n-2};\alpha)=\frac{(1+bH_1)(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)-(b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}\,. \tag{4.32}$$

Замечание 4.1. Рассмотрим систему (4.17)–(4.19) с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [18, 20]), становящейся консервативной при $b=H_1$:

$$\begin{aligned}
&\alpha'=-(1+b^2)w_{n-1}+b\sin\alpha,\\
&w'_{n-1}=\sin\alpha\cos\alpha-(1+b^2)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-bw_{n-1}\cos\alpha,\\
&w'_{n-2}=(1+b^2)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-bw_{n-2}\cos\alpha.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b^2)(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)-2bw_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha=C_1^*=\mathrm{const}, \tag{4.34}$$

$$w_{n-2}\sin\alpha=C_2^*=\mathrm{const}\,. \tag{4.35}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.34), (4.35) также является первым интегралом системы (4.33). Но при $b\neq H_1$ каждая из функций

$$(1+bH_1)(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)-(b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha \tag{4.36}$$

и (4.35) по отдельности не является первым интегралом системы (4.17)–(4.19). Однако отношение функций (4.36), (4.35) является первым интегралом системы (4.17)–(4.19) при любых b, H_1.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.17)–(4.19). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (4.31) при $u_1\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2-\frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2=\frac{(b-H_1)^2+C_1^2-4}{4(1+bH_1)^2}. \tag{4.37}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b-H_1)^2+C_1^2-4\geqslant 0, \tag{4.38}$$

и фазовое пространство системы (4.17)–(4.19) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (4.37).

Таким образом, в силу соотношения (4.31) первое уравнение системы (4.28) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{2(1+bH_1)u_2^2-2(b+H_1)u_2+2-C_1U_1(C_1,u_2)}{b-(1+bH_1)u_2}, \tag{4.39}$$

где

$$\begin{aligned}
&U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2(1+bH_1)}\Big\{C_1\pm U_2(C_1,u_2)\Big\},\\
&U_2(C_1,u_2)=\sqrt{C_1^2-4(1+bH_1)\Big(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2\Big)};
\end{aligned} \tag{4.40}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (4.38).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (4.17)–(4.19) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau}=\int\frac{(b-(1+bH_1)u_2)du_2}{2\Big(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2\Big)-C_1\big\{C_1\pm U_2(C_1,u_2)\big\}/(2(1+bH_1))}. \tag{4.41}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln|\sin\alpha|$. Если

$$u_2 - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)} = r_1, \quad b_1^2 = (b-H_1)^2 + C_1^2 - 4, \tag{4.42}$$

то правая часть равенства (4.41) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2)}{(b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2}} -$$

$$-(b-H_1)(1+bH_1)\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b-H_1}{2}I_1, \tag{4.43}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)r_1^2}. \tag{4.44}$$

При вычислении интеграла (4.44) возможны три случая.

I. $|b-H_1| > 2$:

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right| + \mathrm{const}; \tag{4.45}$$

II. $|b-H_1| < 2$:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}; \tag{4.46}$$

III. $|b-H_1| = 2$:

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}\,. \tag{4.47}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha} - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}, \tag{4.48}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $|b-H_1| > 2$:

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} \pm 2(1+bH_1)r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4} \mp 2(1+bH_1)r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right| + \mathrm{const}; \tag{4.49}$$

II. $|b-H_1| < 2$:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)^2 r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}; \tag{4.50}$$

III. $|b-H_1| = 2$L

$$I_1 = \mp\frac{2(1+bH_1)r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1+bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}\,. \tag{4.51}$$

Итак, мы нашли дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (4.17)–(4.19) и имеем полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 4.2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (4.31). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}\,. \tag{4.52}$$

Итак, найдены два первых интеграла (4.32), (4.52) независимой системы третьего порядка (4.17)–(4.19). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (4.20) (их всего $n-3$), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.21).

Действительно, искомые первые интегралы примут вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{4.53}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C''_n = \text{const}; \tag{4.54}$$

при этом в левую часть равенства (4.54) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (4.53) при $s = n-4$ и $s = n-3$.

Теорема 4.2. *Система* (4.17)*–*(4.21) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов* (4.32), (4.52), (4.53), (4.54).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (2.2), (2.7) при условии (4.4) имеет $1 + (n-1)(n-2)/2 + n = (n^2 - n + 4)/2$, $n > 2$, инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (3.7), циклические первые интегралы вида (3.5), (3.6), первый интеграл вида (4.32), также имеется первый интеграл, выражающийся соотношениями (4.45)–(4.52), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (4.53), (4.54) (см. [8, 9, 13, 24]).

Теорема 4.3. *Система* (2.2), (2.7) *при условиях* (3.7), (4.4), (3.5), (3.6) *обладает полным набором инвариантных соотношений, состоящим из* $(n^2 - n + 4)/2$, $n > 2$, *соотношений,* n *из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: ВИНИТИ, 1985.
2. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
7. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
8. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
9. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. "*16*, № 4. — С. 3–229.
10. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// В кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
11. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
12. *Шамолин М. В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1997. — № 2. — С. 65–68.

13. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
14. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
15. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
16. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathfrak{so}(4)\times\mathbb{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. *60*, № 6. — С. 233–234.
17. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 4. — С. 482–485.
18. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
19. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
20. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
21. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости// Прикл. мат. мех. — 2008. — *72*, № 2. — С. 273–287.
22. *Шамолин М. В.* Классификация случаев полной интегрируемости в динамике симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65*. — С. 132–142.
23. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
24. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела// Докл. РАН. — 2010. — *431*, № 3. — С. 339–343.
25. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
26. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
27. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
28. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
29. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
30. *Шамолин М. В.* Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 84–99.

М. В. Шамолин
Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: `shamolin@rambler.ru`