М. В. Шамолин, Фазовые портреты динамических уравнений движения твердого тела в сопротивляющейся среде, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2017, том 135, 94–122

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 135 (2017). С. 94–122

УДК 531.01+531.552

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

© 2017 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В первой части работы рассматривается математическая модель воздействия среды на твердое тело, частью участка внешней поверхности которого является плоская пластина. В модели учитывается дополнительная зависимость момента силы воздействия среды от угловой скорости тела. Приводится полная система уравнений движения в условиях квазистационарности. Динамическая часть образует независимую систему третьего порядка, в которой выделена независимая подсистема второго порядка. Получено новое семейство фазовых портретов на фазовом цилиндре квазискоростей, отличающееся от ранее полученных. Далее рассматривается нелинейная математическая модель плоскопараллельного воздействия среды на твердое тело, у которого передняя часть внешней поверхности имеет форму кругового конуса. Проводится многопараметрический анализ динамических уравнений движения. Получено новое семейство фазовых портретов на фазовом цилиндре квазискоростей. Данное семейство состоит из бесчисленного множества топологически неэквивалентных фазовых портретов. Получены достаточные условия устойчивости важного режима движения — прямолинейного поступательного торможения, а также условия наличия в системе автоколебательных режимов.

Ключевые слова: твердое тело, фазовый портрет, интегрируемая система, первый интеграл.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 37E10, 37N05

СОДЕРЖАНИЕ

1. Задача о движении тела с плоским передним торцом в сопротивляющейся среде

1.1. Различные аспекты рассмотрения проблемы. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде (например, о падении тела в воздухе) интересует исследователей уже несколько столетий. Опыты по исследованию движения тела в воздухе и жидкости привели Х. Гюйгенса к установлению эмпирического закона сопротивления, пропорционального квадрату скорости движения тела в воздухе. И. Ньютон на основе опытов создал математическую теорию сопротивления воздуха, разработку которой продолжали в XVIII в. Вариньон, Д. Бернулли, Ж. Даламбер, Л. Эйлер и др.

Н. Е. Жуковский одним из первых рассматривал задачи динамики точки: он совершенствовал модель взаимодействия и считал, что кинетическая энергия падающего тела тратится на образование вихревых движений воздуха, а также на преодоление молекулярных сил прилипания воздуха к движущемуся телу. Сопротивление зависит не только от скоростей движения точек тела, но и от формы самого тела. Из исследований Н. Е. Жуковского известна также попытка моделирования движения на основе экспериментов по самовращению падающих в воздухе пластинок (см. также [7, 9, 10]). Из исследований С. А. Чаплыгина отметим также задачу о движении тяжелого тела в несжимаемой жидкости (см. [15, 16]). Основополагающей в данном случае задачей является изучение движения пластины бесконечной длины в условиях струйного обтекания (см. [15, 16]). Эта задача послужила опорой для дальнейшего исследования движения тела, взаимодействующего со средой через передний плоский участок (см. также [10, 12, 13, 17, 18]).

В историческом прошлом в основном затронут лишь один аспект данной задачи: интересы исследователей направлены на получение результатов в явном виде.

Динамические эффекты, связанные с влиянием присоединенных масс (классическая задача Кирхгофа), демонстрируются в учебнике [9] на примере движения тела-пластины в жидкости. Задача Кирхгофа заложила еще один аспект рассмотрения задачи. Он связан с вопросами интегрируемости нелинейной системы уравнений движения (вопросы существования первых интегралов; см. [1, 8, 14, 21, 26]).

Укажем также на третий аспект рассмотрения указанной проблемы, а именно, на качественный анализ систем дифференциальных уравнений, описывающих данное движение (расслоения фазового пространства, качественное расположение фазовых траекторий и т. д.).

В принципе, проблема исследования движения тела под действием силы сопротивления «упирается» в отсутствие полного описания силы, поскольку в принципе она зависит и от обобщенных скоростей. Поэтому в дальнейшем в динамических уравнениях возможно наличие членов, характеризующих как рассеяние энергии (диссипацию), так и ее подкачку (термин «антидиссипация» не очень подходит; лучше говорить о системах с разгоняющими силами).

1.2. Модельные предположения. Математическая модель взаимодействия тела со средой, сосредоточенного на плоской области, анализировалась ранее. Так, в [10] построен фазовый портрет физического маятника, помещенного в поток среды. Динамическая система, описывающая движение маятника, обладает интересными нелинейными свойствами, что определяет необходимость дальнейшего полного нелинейного анализа и возможного создания методики исследования. В [10] разобран вопрос об устойчивости прямолинейных движений свободного тела при струйном обтекании.

В работе изучается задача о движении тела в таком силовом поле, при котором линия действия силы, приложенной к телу, не меняет свою ориентацию относительно тела. Подобные условия возникают при движении тела, так сказать, с «большими» углами атаки, в среде при струйном обтекании (см. [7, 13]) или при отрывном течении (см. [13, 16]). Основным объектом исследования является семейство тел, часть поверхности которых имеет плоский участок, обтекаемый средой по законам струйного обтекания. При этом поток среды предполагается однородным.

Предположим, что однородное твердое тело массы m совершает плоскопараллельное движение в среде и что некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой плоскую пластину, находящуюся в условиях струйного обтекания средой. Это означает, что воздействие среды на тело сводится к силе $\mathbf{S}$ (приложенной в точке N) (рис. 1). Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластины, и главное, что она не испытывает действия среды.

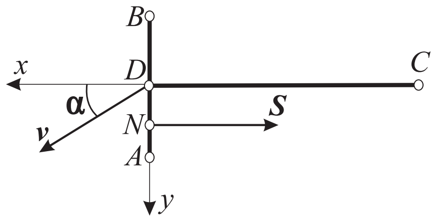

Рис. 1. Воздействие среды на твердое тело

Свяжем с телом систему координат Dxy (рис. 1). Предположим, что координата y_N точки N приложения силы воздействия среды определяется, по крайней мере, одним параметром — углом атаки α, измеряемым между вектором скорости точки D относительно потока и осью симметрии Dx:

$$y_N = R(\alpha, \ldots). \tag{1}$$

Силу сопротивления $\mathbf{S}$ (рис. 1) будем представлять в квадратичном виде по скорости точки D:

$$\mathbf{S} = s(\alpha)v^2\mathbf{e}_x, \quad |\mathbf{v}_D| = v. \tag{2}$$

Таким образом, пара функций R, s определяет воздействие среды на твердое тело в условиях квазистационарности (см. [13, 16]).

1.3. Ключевой режим движения. Допустим, что среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения. Это возможно при выполнении двух условий, а именно: (А) скорости всех точек тела параллельны оси Dx; (Б) перпендикуляр, опущенный из центра масс C тела на ось Dy, принадлежит линии действия силы $\mathbf{S}$. Если провести ось Dz, перпендикулярную плоскости рисунка, и считать для простоты Dzx плоскостью геометрической симметрии тела, то это обеспечит выполнение условия (Б) при движении, удовлетворяющем условию (А).

Для построения динамической модели введем первые три фазовые координаты: v — величина скорости точки D относительно потока (рис. 1), α — угол (атаки) между вектором $\mathbf{v}_D$ скорости точки D и осью Dx, Ω — проекция абсолютной угловой скорости тела на ось Dz.

Коэффициент лобового сопротивления s обычно представляют в виде $s = \rho P c_x/2$. где c_x — безразмерный коэффициент лобового сопротивления (ρ — плотность среды, P — площадь пластины). Эти коэффициенты зависят от угла атаки, числа Струхаля и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем вводим безразмерную фазовую переменную «типа Струхаля» $\omega = \Omega D_1/v$ (D_1 — характерный размер). Таким образом, в дальнейшем в уравнениях движения возникают две функции фазовых переменных R и s, которые назовем функциями воздействия среды.

Ограничимся зависимостью коэффициента c_x от угла атаки, т.е. будем считать величину s функцией α, а величину R — функцией пары безразмерных переменных (α, ω).

Задача о движении тела возле ключевого режима, т.е. с малыми углами атаки, формирует представление о нелинейных динамических системах, исследуемых в дальнейшем. Ключевой режим задается уравнениями $\alpha(t) \equiv 0, \omega(t) \equiv 0$. Поэтому функцию R при малых α, ω примем в виде $R = D_1(k\alpha - h\omega)$, где k и h — некоторые постоянные, D_1 — характерный размер. Зависимостью же s от α, в силу геометрической симметрии тела, обеспечивающей четность функции s, пренебрегаем. Таким образом, линеаризованная модель силового воздействия среды содержит три параметра s, k, h, которые определяются формой пластины в плане. Первый из этих параметров — коэффициент s — размерный. Параметры же k, h являются безразмерными в силу способа их введения.

Отметим, что величины s, k могут быть экспериментально определены путем весовых измерений в установках типа гидро- или аэродинамических труб. В литературе (см. [13, 16]) имеется также информация о теоретическом определении этих величин для отдельных случаев. Эта информация позволяет считать, что $k > 0$. Что же касается параметра h (который вносит в систему дополнительную зависимость момента силы от угловой скорости), то даже сама необходимость введения его в модель априори не очевидна (см. [2, 3, 19, 20]).

Изучение свойств движения рассматриваемых классов тел в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова было начато экспериментами по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров (см. [10, 12]). Эксперимент позволил остановиться на важных выводах. Первый: режим прямолинейного поступательного торможения тела (в воде) неустойчив, по крайней мере, по отношению к углу ориентации тела. Стало возможным также определение безразмерных параметров воздействия среды на твердое тело. Второй вывод следующий: при моделировании воздействия среды на тело необходимо учитывать дополнительный параметр, эквивалентный так называемой вращательной производной момента аэрогидродинамических сил по угловой скорости тела. Этот параметр вносит в систему диссипацию.

Величина коэффициента демпфирующего момента для тел с плоским передним торцом уже была оценена для некоторых случаев движения в воде. Данная там оценка говорит о неустойчивости по углу атаки и угловой скорости невозмущенного движения в воде. Чисто формально, увеличивая величину коэффициента демпфирования, возможно достижение устойчивости данного движения. При этом прямолинейное движение твердого тела в некоторых средах (например, в глине) устойчиво в вышеописанном смысле, как показывает эксперимент. Возможно, данная устойчивость достигается благодаря наличию в системе значительного демпфирования со стороны среды или наличию сил, касательных к пластине.

Эксперимент побуждает нас рассматривать класс возможных движений тела при малых углах атаки в качестве «опорного» для рассмотрения класса свободного торможения тела с конечными углами атаки. Для конусов различной формы углы атаки вполне могут принимать практически любое значение из интервала $(0, \pi/2)$, и лишь при углах, близких к $\pi/2$, неизбежен так называемый замыв боковой поверхности. Поэтому возникает необходимость продолжения функций воздействия среды R и s по крайней мере на конечные углы атаки, т. е. «расширения» их области определения на интервал $(0, \pi/2)$. Но мы будем продолжать данные функции на всю числовую прямую (см. также [24, 25, 28, 30]).

Опорным для нас является результат С. А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного движения бесконечной пластины получил эти функции в аналитическом виде (см. [15, 16]): если такая пластина движется в среде по законам струйного обтекания, то коэффициент квадратичного по скорости центра пластины сопротивления пропорционален косинусу угла атаки, а расстояние от центра давления до центра пластины — его синусу.

1.4. Динамические уравнения и функции воздействия среды. Нелинейные динамические уравнения плоскопараллельного движения тела представим следующим образом:

$$\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha + \Omega v\sin\alpha + \sigma\Omega^2 = -s(\alpha)v^2/m, \tag{3}$$

$$\dot{v}\sin\alpha + \dot{\alpha}v\cos\alpha - \Omega v\cos\alpha + \sigma\dot{\Omega} = 0, \tag{4}$$

$$I\dot{\Omega} = -F(\alpha)v^2 - h_1\Omega v, \tag{5}$$

где I — центральный момент инерции тела, m — его масса, σ — расстояние CD (рис. 1, где C — центр масс), при этом $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$, а коэффициент $h_1 > 0$ характеризует дополнительный момент, зависящий от угловой скорости (см. [34, 37, 38, 42, 43, 45]).

Для качественного описания пары функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$ используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания. Вводимые классы достаточно широки: они состоят из функций достаточно гладких, 2π-периодических (s — четная, а R — нечетная), удовлетворяющих следующим условиям: $R(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $R'(0) > 0$, $R'(\pi) < 0$ (класс функций $\{R\}$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\}$). Как R, так и s меняют знак при замене α на $\alpha+\pi$. Таким образом,

$$R \in \{R\}, \quad s \in \{s\}. \tag{6}$$

В частности, аналитические функции

$$R = R_0(\alpha) = A\sin\alpha \in \{R\}, \quad s = s_0(\alpha) = B\cos\alpha \in \{s\}, \quad A, B > 0, \tag{7}$$

служат типичными представителями описанных выше классов.

В дальнейшем в рассматриваемых динамических системах возникает произведение $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$. Из вышеперечисленных условий следует, что F — достаточно гладкая нечетная π-периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{F\}$). Таким образом,

$$F \in \{F\}. \tag{8}$$

Итак, для исследования обтекания тела конусообразной формы средой используются классы динамических систем, определенные с помощью пары функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

У системы (3)–(5) третьего порядка возможно отщепление независимой подсистемы второго порядка. Действительно, система (3)–(5) является эйлеровой однородной системой по части квазискоростей (Ω, v) степени однородности 2, поскольку после замены независимого переменного (времени t) по формулам $dq = v\,dt$, $v \neq 0$ ($\langle\cdot\rangle = d/dt = v\,d/dq = v\,\langle'\rangle$), получаем новую систему, эквивалентную системе (3)–(5) ($\varphi' = \omega$):

$$v' = v\Psi_1(\alpha, \omega), \tag{9}$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha, \tag{10}$$

$$\omega' = -\frac{1}{I}\psi(\alpha, \omega) - \omega\Psi_1(\alpha, \omega), \tag{11}$$

$$\psi(\alpha, \omega) = F(\alpha) + h_1\omega, \quad \Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha.$$

В системе (9)–(11) третьего порядка появляется независимая подсистема (10), (11) второго порядка, которая может быть рассмотрена самостоятельно на своем фазовом цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$.

1.5. Трехпараметрическое семейство систем в пространстве квазискоростей. Будем исследовать систему следующего вида:

$$\begin{aligned} &\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I}AB\sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{\sigma}{I}h_1\omega\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{B}{m}\sin\alpha\cos\alpha, \\ &\omega' = -\frac{AB}{I}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{h_1}{I}\omega - \frac{\sigma}{I}AB\omega\sin^2\alpha\cos\alpha - \\ &- \frac{\sigma}{I}h_1\omega^2\sin\alpha + \sigma\omega^3\cos\alpha + \frac{B}{m}\omega\cos^2\alpha, \end{aligned} \tag{12}$$

полученную из системы (10), (11) при условиях (7).

Переходя к безразмерным параметрам β_1, β_2, β_3 и дифференцированию по формулам $q = Q\sigma$, $\bar{\omega} = \omega\sigma$, $d/dQ = \sigma d/dq$, $[Q] = [\bar{\omega}] = 1$, $\beta_1 = \sigma^2 AB/I$, $\beta_2 = \sigma h_1/I$, $\beta_3 = B\sigma/m$, опуская при этом черту в дальнейшем над безразмерной переменной $\bar{\omega}$, а также по-прежнему обозначая штрихом производную по безразмерной величине Q, имеем систему (12) в виде

$$\begin{aligned} &\alpha' = \omega + \beta_1\sin\alpha\cos^2\alpha + \beta_2\omega\cos\alpha + \omega^2\sin\alpha + \beta_3\sin\alpha\cos\alpha, \\ &\omega' = -\beta_1\sin\alpha\cos\alpha - \beta_2\omega - \beta_1\omega\sin^2\alpha\cos\alpha - \\ &- \beta_2\omega^2\sin\alpha + \omega^3\cos\alpha + \beta_3\omega\cos^2\alpha. \end{aligned} \tag{13}$$

Безразмерные параметры β_k, $k = 1, 2, 3$, естественно назвать следующим образом: β_1 — параметром момента силы (лобового) сопротивления, β_2 — параметром дополнительного демпфирующего момента, β_3 — параметром силы (лобового) сопротивления. Имеем, таким образом, трехпараметрическое семейство систем (13) на двумерном фазовом цилиндре $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \bmod 2\pi\}$.

В фазовом пространстве системы (13) точки покоя могут являться проекциями неособых фазовых траекторий трехмерного фазового пространства системы (9)–(11). У нее существуют положения равновесия, которые заполняют одномерные многообразия.

Поэтому вопрос о точках покоя разбивается на два: о точках покоя соответствующей системы третьего порядка в фазовом пространстве $\mathbb{R}^1_+\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ и о точках покоя укороченной системы (13) на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ или на двумерном цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$.

1.5.1. Явные и неявные точки покоя системы второго порядка. У системы (13) существуют точки покоя на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$, которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \tag{14}$$

$$\alpha = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \tag{15}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + l\pi, \qquad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \tag{16}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, \qquad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = -1, \tag{17}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \omega = 1. \tag{18}$$

Системы (14), (15) и только они задают точки, в которые ортогонально проектируются частные решения системы (9)–(11) вида

$$v(q) = v^0 \exp(-\kappa q), \quad \kappa > 0, \quad \alpha(q) \equiv s\pi, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad \omega(q) \equiv 0, \tag{19}$$

при четном s соответствующие прямолинейному поступательному торможению.

Точки покоя (14)–(18) назовем явными положениями равновесия (ЯПР). Наряду с ЯПР могут существовать точки покоя, соответствующие нетривиальным частным решениям системы (9)–(11).

Определение 1.1. *Неявными положениями равновесия (НПР) системы* (13) *на плоскости называются точки покоя, не лежащие на прямых*

$$\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega \sin\alpha \cos\alpha = 0\}.$$

1.5.2. Неявные положения равновесия системы второго порядка, соответствующие нетривиальным частным решениям.

Предложение 1.1. *При $\beta_1 < 4$ и достаточно малом β_2 НПР не существуют.*

При $\beta_1 \geqslant 4$ НПР могут существовать. При выполнении последнего неравенства справедливы следствия.

Следствие 1.1. *У системы* (9)–(11) *при условиях* (7) *существуют частные решения вида*

$$\begin{aligned} &v(q) = v^0 \exp(-\kappa q), \quad \kappa > 0, \quad v^0 = v(0), \\ &\alpha(q) \equiv \alpha^0 = \alpha(0) \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &\omega(q) \equiv \omega^0 \neq 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Следствие 1.2. *У системы* (3)–(5) *при условиях* (7) *существуют частные решения вида*

$$\begin{aligned} &v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0\kappa t}, \quad \kappa > 0, \quad v_0 = v(0), \\ &\alpha(t) \equiv \alpha_0 = \alpha(0) \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &\Omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{1 + v_0\kappa t}, \quad \Omega_0 = \Omega(0), \end{aligned} \tag{21}$$

при этом

$$
\begin{aligned}
&\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0\kappa}\ln(1+v_0\kappa t),\\
&x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\alpha_0+\varphi_0) - \frac{v_0}{\omega_0}\sin\left(\alpha_0+\varphi_0+\frac{\Omega_0}{v_0\kappa}\ln(1+v_0\kappa t)\right),\\
&y(t) = y_0 - \frac{v_0}{\omega_0}\cos(\alpha_0+\varphi_0) + \frac{v_0}{\omega_0}\cos\left(\alpha_0+\varphi_0+\frac{\Omega_0}{v_0\kappa}\ln(1+v_0\kappa t)\right),\\
&x_0 = x(0), \quad y_0 = y(0).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Следствие 1.3. *Траектория точки D при движении на плоскости $\mathbb{R}^2\{x,y\}$, соответствующая частным решениям* (21), (22), *системы* (3)–(5), *— окружность с центром в точке*

$$
\left(x_0 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\alpha_0+\varphi_0),\ y_0 - \frac{v_0}{\omega_0}\cos(\alpha_0+\varphi_0)\right)
$$

и радиусом v_0/Ω_0.

1.5.3. Расслоения фазового пространства, его симметрии.

Предложение 1.2. *Пусть $\beta_2 > 0$ достаточно мало. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *точки покоя* (14) *являются отталкивающими точками*;
(2) *точки покоя* (15) *при $\beta_1 > 2\beta_4$ являются притягивающими, а при $\beta_1 < 2\beta_4$ — отталкивающими*;
(3) *точки покоя* (16) *являются седлами*;
(4) *точки покоя* (17), (18) *являются притягивающими.*

В силу отделения от системы третьего порядка (9)–(11) независимой подсистемы второго порядка (10), (11) (а в дальнейшем и системы (13)) фазовые траектории в $\mathbb{R}^1_+\{v\}\times\mathbb{R}^2\{\alpha,\omega\}$ лежат на поверхностях, являющихся двумерными цилиндрами. В частности, если существует во всем фазовом пространстве первый интеграл системы (13), то он является функцией переменных (α,ω), а поэтому задает семейство цилиндров в $\mathbb{R}^1_+\{v\}\times\mathbb{R}^2\{\alpha,\omega\}$.

Благодаря вышеописанной редукции, удобнее строить фазовый портрет системы (10), (11) (а в дальнейшем и системы (13)) в $\mathbb{R}^1_+\{v\}\times\mathbb{R}^2\{\alpha,\omega\}$ с помощью фазового портрета системы (13) в $\mathbb{R}^2\{\alpha,\omega\}$. Последний не будет являться частью портрета в $\mathbb{R}^1_+\{v\}\times\mathbb{R}^2\{\alpha,\omega\}$ в теоретико-множественном смысле, а будет ортогональной проекцией портрета на плоскость $\{v = \mathrm{const}\}$. Поэтому становятся возможными поднятие фазовых траекторий с плоскостей в пространство $\mathbb{R}^1_+\{v\}\times\mathbb{R}^2\{\alpha,\omega\}$ и получение фазовых портретов системы третьего порядка.

Поскольку $v > 0$, то движение возможно лишь в области $B' = \{(\alpha,\omega,v)\in\mathbb{R}^3 : v > 0\}$. Если формально сделать замену переменных в области B' по формуле $\bar p = \ln v$, то полученное векторное поле в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha,\omega,\bar p\}$ не зависит от $\bar p$, т.е. имеет цилиндрическую природу более высокого порядка и ортогонально проектируется на все семейство плоскостей $\{v = \mathrm{const}\}$.

Замечание 1.1. *Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в трехмерное фазовое пространство, необходимо выяснить знак проекции векторного поля в $\mathbb{R}^3\{\alpha,\omega,\bar p\}$ на $\bar p$-ось, либо на v-ось в области B'.*

Рассмотрим поверхность $M = \{(\alpha,\omega,v)\in B' : \Psi_1(\alpha,\omega) = 0\}$ (о функции Ψ_1 см. (9)). Данная поверхность является цилиндром, который разрезает фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция векторного поля на v-ось имеет фиксированный знак. На самой же поверхности M (и только на ней) проекция векторного поля на v-ось обращается в нуль.

Замечание 1.2. *Для любых $R\in\{R\}$, $s\in\{s\}$ векторное поле системы* (10), (11) *(или* (13)*) обладает свойством центральной симметрии относительно точек $(\pi k, 0), k\in\mathbb{Z}$, т.е. в координатах (α,ω) векторное поле системы меняет направление при замене*

$$
\begin{pmatrix}\alpha+\pi k\\ \omega\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-\alpha+\pi k\\ -\omega\end{pmatrix}, \quad k\in\mathbb{Z}.
$$

1.5.4. Классификация фазовых портретов системы на двумерном цилиндре для некоторой области параметров. Будем изучать те динамические системы, которые допускают выполнение неравенства $\beta_1 < 4$; при этом считаем, что параметр β_2 достаточно мал. Таким образом, для начала рассматриваем случай отсутствия НПР. Поэтому в общем пространстве физически допустимых параметров

$$M^3 = \Big\{(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3 : \ \beta_1 > 0, \ \beta_2 > 0, \ \ \beta_3 > 0\Big\}$$

в основном будем изучать область

$$J^3 = \Big\{(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in M^3 : \ \beta_1 < 4\Big\},$$

при этом параметр $\beta_2 > 0$ достаточно мал.

Введем семейство полос на плоскости:

$$\Pi_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \Big\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\Big\},$$

при этом $\Pi_{(-\pi/2,\pi/2)} = \Pi$, $\Pi_{(\pi/2,3\pi/2)} = \Pi'$. У системы (13) существуют траектории, уходящие на бесконечность на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$. Их α- и ω-предельными множествами являются бесконечно удаленные точки $(-(2k+1)\pi+0, +\infty)$, $(2k\pi-0, +\infty)$, $((2k+1)\pi-0, -\infty)$, $(-2k\pi+0, -\infty)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Лемма 1.1. *Рассмотрим систему* (13) *на множестве* $\Pi_{(-\pi,0)} \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}$. *Тогда существует единственная траектория, имеющая в качестве ω-предельного множества точку $(-0, +\infty)$), а также существует единственная траектория, имеющая в качестве α-предельного множества точку $(-\pi + 0, +\infty)$).*

Лемма 1.1 справедлива в более широких областях параметров.

У системы (13) при достаточно малом $\beta_2 > 0$ отсутствуют замкнутые фазовые характеристики, охватывающие фазовый цилиндр $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$. Заметим, что в силу 2π-периодичности векторного поля системы по α, последняя задача сводится к отысканию замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий лишь вокруг точек покоя индекса 1. Таким образом, предельные циклы могут существовать только лишь вокруг точек покоя (14), (15), (17), (18).

Лемма 1.2. *Вокруг точек покоя* (14), (17), (18) *не существует замкнутых кривых, составленных из траекторий системы* (13). *Исследование наличия замкнутых кривых вокруг точек покоя* (15) *показывает, что при некоторых условиях такие кривые существуют, а при некоторых условиях — нет.*

При этом пространство параметров J^3 системы (13) разбивается на два множества: $J^3 = J_0 \sqcup J_1$ по отношению к наличию предельного цикла в полосе Π'. Для параметров из множества J_0 у системы (13) не существует замкнутых кривых, составленных из траекторий системы (13). Для параметров из множества J_1 у системы (13) могут существовать предельные циклы. Оба множества имеют конечную меру.

Рассмотрим систему (13) для случая параметров J_0, при этом выполнено неравенство $\beta_1 < 2\beta_3$.

Лемма 1.3. *Устойчивая сепаратриса в полосе* Π *для точки* $(-\pi/2, 0)$ *имеет в качестве α-предельного множества начало координат.*

Доказательство леммы 1.3 получается из теории топографических систем Пуанкаре (см. также [11, 22, 23, 35, 36]).

Следствие 1.4. *При рассматриваемых условиях у системы* (13) *в полосе* Π *не существует любых замкнутых кривых, составленных из траекторий.*

Лемма 1.4. *Пусть выполнено неравенство $\beta_1 < 2\beta_3$, а также β_2 достаточно мало. Тогда сепаратриса, входящая в точку $(-\pi/2, 0)$ в полосе Π', имеет в качестве α-предельного множества точку $(-\pi, 0)$.*

1.5.5. Топологическое строение типов фазовых портретов для области параметров J_0 при отсутствии предельных циклов. Рассмотрим вопрос о поведении сепаратрис, выходящих из точки $(-\pi/2, 0)$ в полосу Π и из точки $(\pi/2, 0)$ в полосу $\Pi_{(\pi/2,\pi)}$.

Определение 1.2. *Индексом сепаратрисного поведения (ИСП, обозначение* isp*) называется пара $k = (k_1, k_2)$, где $k_1 \in \mathbb{N}_0 \cup \{l + 1/4,\ l \in \mathbb{N}_0\}$. При этом значение k_2 выбирается неоднозначно и может быть равно*

$$k_2 = \begin{cases} k_1 - 1/2, & k_1 \in \mathbb{N}; \\ k_1 + 1/2, & k_1 \in \mathbb{N}_0; \\ k_1 - 1/4, & k_1 \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и $k_2 = k_1 + 1/4$, если $k_1 \notin \mathbb{N}_0$. По определению $\mathrm{isp} = k = (k_1, k_2)$*, если сепаратриса, выходящая из точки $(-\pi/2, 0)$ в полосу Π, имеет в качестве ω-предельного множества точку, отстоящую от точки $(-\pi/2, 0)$ на $2\pi k_1$ по оси α, а сепаратриса, выходящая из точки из точки $(\pi/2, 0)$ в полосу $\Pi_{(\pi/2,\pi)}$, имеет в качестве ω-предельного множества точку, отстоящую от точки $(\pi/2, 0)$ на $2\pi k_2$ по оси α.*

Теорема 1.1. *Определение для ИСП корректно, т.е. для любого* $\mathrm{isp} = k$ *из области определения возможно соответствующее поведение рассматриваемых сепаратрис.*

В силу теоремы 1.1 можно провести полную классификацию фазовых портретов системы (13), когда ее параметры пробегают рассматриваемую выше область. Как показано выше, таких портретов бесконечно много.

Можно выписать десять первых значений индекса isp. Они таковы: $(0, 1/2)$, $(1/4, 1/2)$, $(1, 1/2)$, $(1, 3/4)$, $(1, 3/2)$, $(5/4, 3/2)$, $(2, 3/2)$, $(2, 7/4)$, $(2, 5/2)$, $(9/4, 5/2)$. Первые три показаны на рис. 2–6 $(\Omega \leftrightarrow \omega)$, соответственно.

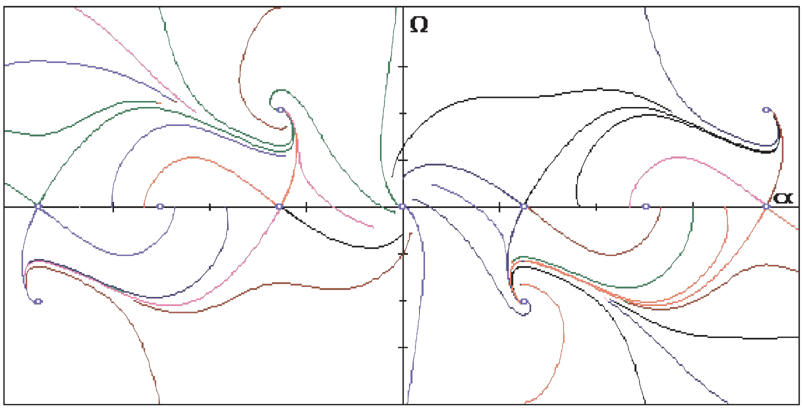

Рис. 2. $\mathrm{isp} = (0, 1/2)$

1.6. Замечания. В процессе применения разработанной ранее методики исследования диссипативных динамических систем определенного вида, возникающих в задаче о свободном торможении, получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре квазискоростей, состоящее из бесконечного множества топологически неэквивалентных портретов, вырожденным образом меняющих свой топологический тип при изменении параметров системы. Область физических параметров при этом является множеством конечной меры во всем бесконечномерном пространстве параметров системы, так что полученные портреты являются типичными.

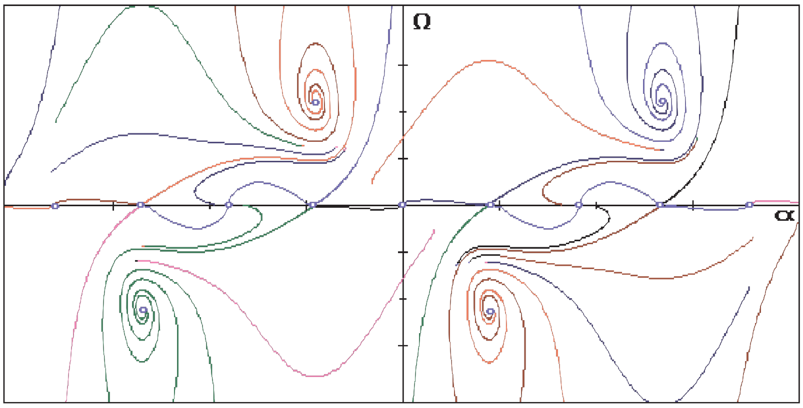

Рис. 3. $\text{isp} = (1/4, 1/2)$

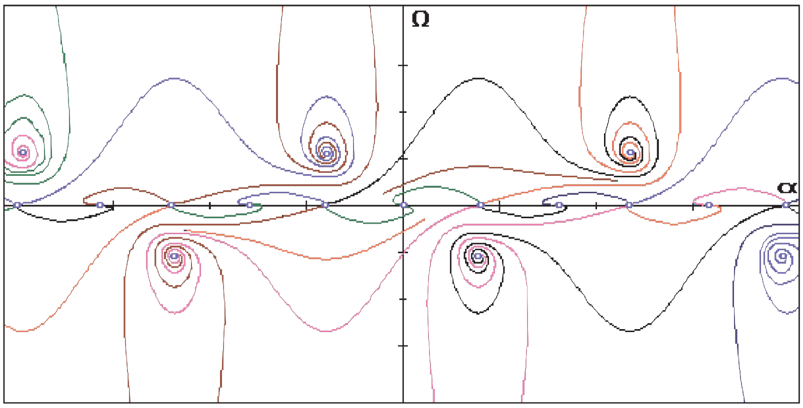

Рис. 4. $\text{isp} = (1, 1/2)$

2. Задача о свободном торможении твердого тела с передним конусом в сопротивляющейся среде

2.1. Предварительные сведения. В этом разделе изучается движение твердого тела, имеющего круговой конус в качестве передней части своей внешней поверхности, в сопротивляющейся среде. При этом линия действия силы, приложенной к телу со стороны среды, меняет свою ориентацию относительно тела, поскольку раскладывается в сумму силы лобового сопротивления и боковой силы. Рассматриваемая задача является естественным обобщением задачи о движении твердого тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде, когда касательные силы воздействия среды на плоский торец отсутствуют (см. [39, 40, 41, 47, 48]).

Основным объектом исследования является семейство тел, часть поверхности которых имеет конусообразный участок, обтекаемый средой по законам струйного обтекания. При этом поток среды предполагается однородным, в том смысле, что если движущееся тело свободное, то среда на бесконечности покоится, а если (частично) закрепленное (например, вращается вокруг неподвижной точки), то скорость набегающего потока на бесконечности постоянна. Подобные условия возникают при движении тела, так сказать, с «большими» углами атаки, в среде при струйном обтекании (см. [15, 16]) или при отрывном.

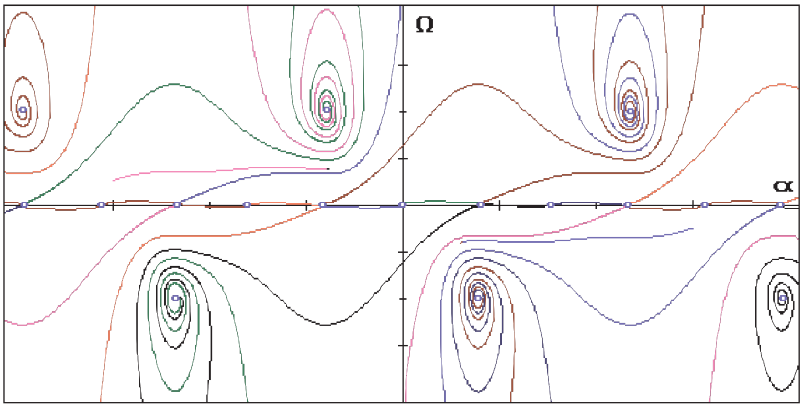

Рис. 5. isp = (1, 3/4)

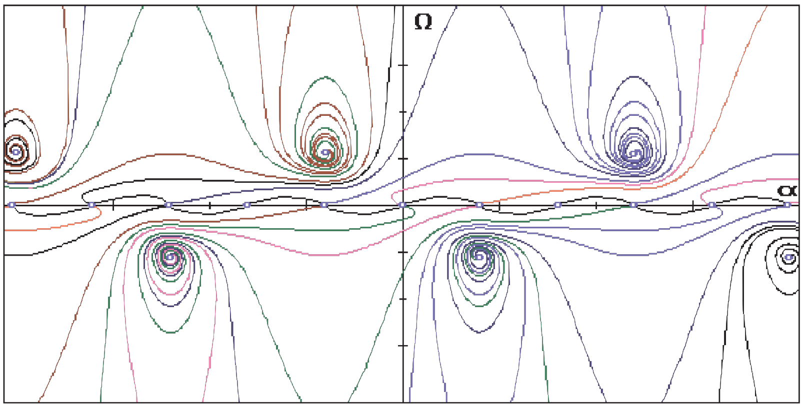

Рис. 6. isp = (1, 3/2)

2.2. Модельные предположения и невозмущенное движение. Поставим подробно задачу плоскопараллельного движения. Предположим, что однородное твердое тело массы m совершает плоскопараллельное движение в среде, и что некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой конус, находящийся в условиях струйного обтекания средой. Конусообразная конструкция поверхности тела и гипотеза о квазистатическом воздействии среды позволяют сформулировать полную схему сил: воздействие среды на тело сводится к суммарной силе $S = S_x + S_y$ (скользящему вектору), проходящей через некоторую точку прямой Dy (рис. 7) связанной с телом системы координат Dxy (D — вершина конуса). При этом сила лобового сопротивления S_x (скользящий вектор) параллельна оси Dx, и линия ее действия проходит через точку N, а боковая сила S_y (также скользящий вектор) действует вдоль прямой Dy (линия его действия проходит через точку D). Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края конуса, и главное, что она не испытывает действия среды.

Предположим, что координата y_N точки N определяется, по крайней мере, углом атаки α, измеряемым между вектором скорости точки D относительно потока и осью симметрии Dx: $y_N = R(\alpha, \ldots)$. Силы лобового S_x и бокового S_y сопротивления (рис. 7) будем представлять в

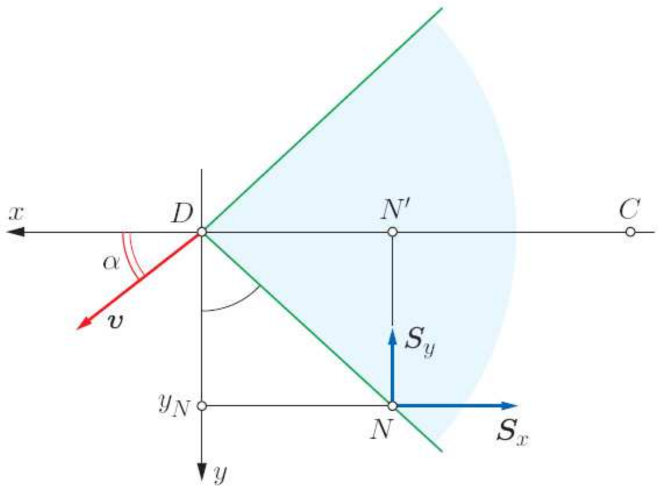

Рис. 7. Воздействие среды на твердое тело с передней частью в виде конуса

квадратичном виде по скорости точки D:

$$S_x = -s(\alpha)v^2 e_x, \quad S_y = -b(\alpha)v^2 e_y, \quad |v_D| = v,$$

с некоторыми коэффициентами s, b, зависящими лишь от угла атаки. Таким образом, тройка функций $R(\alpha, \ldots)$, $s(\alpha)$, $b(\alpha)$ определяет воздействие среды на твердое тело в условиях квазистационарности.

Допустим, что среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения с нулевым углом атаки (невозмущенное движение). Это возможно при выполнении двух условий, а именно:

(1) скорости движения всех точек тела параллельны оси Dx;
(2) перпендикуляр, опущенный из центра масс C тела на ось Dy, принадлежит линии действия силы S.

Если формально провести ось Dz, перпендикулярную плоскости рисунка, и считать, для простоты, Dzx плоскостью геометрической симметрии тела, то это обеспечит выполнение условия (2) при движении, удовлетворяющем условию (1).

Для построения динамической модели введем первые три фазовые координаты: v — величина скорости точки D относительно потока (рис. 7), α — угол атаки, Ω — значение проекции абсолютной угловой скорости тела на ось Dz.

Коэффициенты лобового сопротивления s и боковой силы b обычно представляют в виде

$$s = \frac{1}{2}\rho P c_x, \quad b = \frac{1}{2}\rho P c_y,$$

где c_x, c_y — безразмерные коэффициенты лобового сопротивления и боковой силы, соответственно (ρ — плотность среды, P — характерная поперечная площадь). Эти коэффициенты зависят от угла атаки, числа Струхаля и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем введем безразмерную фазовую переменную «типа Струхаля»

$$\omega = \frac{\Omega D_1}{v}$$

(D_1 — характерный размер).

Таким образом, в дальнейшем в уравнениях движения возникают следующие три функции фазовых переменных: R, s и b, которые будем называть функциями воздействия среды. Ограничимся зависимостью коэффициентов c_x, c_y от угла атаки, т.е. в принципе будем считать величины s и b функциями α, а величину R — функцией, вообще говоря, пары безразмерных переменных (α, ω).

Задача о движении тела с малыми углами атаки формирует представление о нелинейных динамических системах, исследуемых в дальнейшем.

Прямолинейное поступательное (невозмущенное) движение задается уравнениями

$$\alpha(t) \equiv 0, \quad \omega(t) \equiv 0.$$

Поэтому функцию R при малых α, ω примем в виде $R = D_1(k\alpha - h\omega)$, где k и h — некоторые постоянные, D_1 — характерный размер. Функцию b при малых α примем в виде $b = b_1\alpha$. Зависимостью же s от α, в силу геометрической симметрии тела, обеспечивающей четность функции s, пренебрегаем.

Линеаризованная модель силового воздействия среды содержит четыре параметра s, b_1, k, h, которые определяются геометрическими параметрами конуса. Два первых из этих параметров — коэффициенты s, b_1 — размерные. Параметры же k, h являются безразмерными в силу способа их введения.

Как уже отмечалось, величина коэффициента демпфирующего момента для тел с передним плоским торцом уже была оценена для некоторых случаев движения в воде. Данная там оценка говорит о неустойчивости по углу атаки и угловой скорости невозмущенного движения в воде. Чисто формально, увеличивая величину коэффициента демпфирования, возможно достижение устойчивости данного движения. Невозмущенное движение твердого тела в некоторых средах (например, в глине) устойчиво в вышеописанном смысле, как показывает эксперимент. Возможно, данная устойчивость достигается благодаря наличию в системе значительного демпфирования со стороны среды или наличию сил, касательных к пластине. В нашем же случае конусообразного тела достижение исследуемой устойчивости станет возможным благодаря наличию боковой силы.

Повторим также, что вывод, сделанный из эксперимента, заставляет нас рассматривать класс возможных движений тела при малых углах атаки (т.е. около невозмущенного движения) в качестве «опорного» для рассмотрения класса свободного торможения тела с конечными углами атаки. При этом для конусов различной формы (например, конусов с малым раствором) углы атаки вполне могут принимать близкие значения к $\pi/2$, т.е. практически любое значение из интервала $(0, \pi/2)$. И лишь при углах, близких к $\pi/2$, неизбежен так называемый замыв боковой поверхности, когда предлагаемая модель перестает работать. По этой причине возникает необходимость продолжения функций воздействия среды R, b и s, по крайней мере, на конечные углы атаки, т. е. «расширения» их области определения на интервал $(0, \pi/2)$. Но мы будем продолжать данные функции на всю числовую прямую хотя бы потому, что мы не знаем точные интервалы применимости предлагаемой модели. При этом дальнейшее исследование нелинейных динамических систем мы проводим при всех действительных значениях α, хотя подразумеваем, что модель справедлива лишь в ограниченной области значений $|\alpha| < \pi/2$ (см. [49, 50, 51]).

2.3. Задача движения со следящей силой и динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим более общую задачу движения, а именно, предположим что на тело, наряду с имеющейся силой S действует также некоторая следящая сила T, проходящая через центр масс C тела. Введение данной силы производится в методических соображениях, например, с целью рассмотрения заданных классов движения (см. также [52, 53, 55]).

В данной работе будут рассмотрены два случая движения.

1. Свободное торможение твердого тела, т.е. когда следящая сила отключена: $T \equiv 0$ (наиболее интересный в прикладном отношении случай движения).

   2) $T = -S$ (т.е. когда центр масс тела движется прямолинейно и равномерно). При этом повторим, что дальнейшее исследование нелинейных динамических систем мы проводим при всех действительных значениях α, хотя подразумеваем, что модель справедлива лишь в ограниченной области значений $|\alpha| < \pi/2$.

Нелинейные динамические уравнения плоскопараллельного движения тела представим следующим образом:

$$\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha + \Omega v\sin\alpha + \sigma\Omega^2 = T_1 - \frac{s(\alpha)}{m}v^2, \tag{23}$$

$$\dot{v}\sin\alpha + \dot{\alpha}v\cos\alpha - \Omega v\cos\alpha + \sigma\dot{\Omega} = T_2 - \frac{b(\alpha)}{m}v^2, \tag{24}$$

$$I\dot{\Omega} = -F(\alpha)v^2 + \sigma b(\alpha)v^2, \tag{25}$$

где $T = \{T_1, T_2\}$ — разложение следящей силы в системе Dxy, I — центральный момент инерции тела, m — его масса, σ — расстояние CD (рис. 7), при этом в данной работе ограничимся зависимостью функции R лишь от угла атаки, т.е. $R(\alpha, \ldots) = R(\alpha)$, $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$.

Для завершения описания движения тела к системе динамических уравнений (23)–(25) необходимо присовокупить кинематическую часть уравнений движения, состоящую из трех уравнений первого порядка. Но поскольку кинетическая энергия тела, а также обобщенные силы не зависят от положения тела на плоскости, система уравнений (23)–(25) является замкнутой и может быть рассмотрена самостоятельно.

Для определения вида тройки функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$ и $b(\alpha)$ используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания.

Для качественного описания тройки функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$ и $b(\alpha)$, входящей в систему (23)–(25), используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания конусообразных тел. Вводимые классы достаточно широки: они состоят из функций достаточно гладких, 2π-периодических ($R(\alpha), b(\alpha)$ — нечетные, а $s(\alpha)$ — четная), удовлетворяющих следующим условиям: $R(\alpha)$, $b(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $R'(0) > 0$, $b'(0) > 0$, $R'(\pi) < 0$, $b'(\pi) < 0$ (классы функций $\{R\}$, $\{b\}$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\}$). Как R, b, так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. Таким образом, $R \in \{R\}$, $b \in \{b\}$, $s \in \{s\}$.

Видно, что дальнейшем в рассматриваемых динамических системах возникает также произведение $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$. Из вышеперечисленных условий следует, что F — достаточно гладкая нечетная π-периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{F\}$). Таким образом, $F \in \{F\}$.

Итак, для исследования обтекания тела конусообразной формы средой используются классы динамических систем, определенные с помощью тройки функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

При изучении движения тела с конечными углами атаки основным вопросом нелинейного анализа является нахождение таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле невозмущенного движения, что подтверждает необходимость полного нелинейного исследования.

У системы (23)–(25) третьего порядка при условии

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = \tau_1(\alpha)v^2 + \tau_2(\alpha)\Omega v + \tau_3(\alpha)\Omega^2 = T_1\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right)$$

возможно отщепление независимой подсистемы второго порядка. Действительно, система (23)–(25) является эйлеровой однородной системой по части квазискоростей (Ω, v) степени однородности 2, поскольку после замены независимого переменного (времени t) $dq = v\,dt$, $v \neq 0$ ($\langle\cdot\rangle = d/dt = v\,d/dq = v\,\langle'\rangle$), а также угловой скорости $\Omega = \omega v$, получаем новую систему, эквивалентную системе (23)–(25):

$$v' = v\Psi_1(\alpha, \omega), \tag{26}$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\cos\alpha, \tag{27}$$

$$\omega' = -\frac{1}{I}\psi(\alpha, \omega) - \omega\Psi_1(\alpha, \omega), \tag{28}$$

где

$$\psi(\alpha, \omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha),$$

$$\Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\sin\alpha.$$

В системе (26)–(28) третьего порядка появляется независимая подсистема (27), (28) второго порядка, которая может быть рассмотрена самостоятельно на своем фазовом цилиндре $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$.

2.4. Об устойчивости невозмущенного движения. В данном разделе следящая сила предполагается отключенной ($T \equiv 0$).

При изучении модели взаимодействия твердого тела со средой будут найдены достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (свободного торможения). С практической точки зрения данный вопрос достаточно важен. Будет также показано, что при некоторых условиях возможно присутствие в системе либо устойчивого, либо неустойчивого автоколебательных режимов.

Предлагаемый материал представляет собой введение в задачу движения твердого тела, взаимодействующего со средой через передний участок своей внешней поверхности, имеющий форму конуса. При построении силового воздействия среды используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности.

Напомним, что, по причине сложности нелинейного анализа, начальным этапом такого исследования является пренебрежение зависимостью момента суммарной силы воздействия среды от угловой скорости тела и использование такой зависимости лишь от угла атаки (как мы уже отметили выше, $R(\alpha, \ldots) = R(\alpha)$).

Весь спектр результатов, найденных при указанном простейшем предположении, позволяет в дальнейшем сделать вывод о возможности нахождения таких условий, при которых у приведенных систем существовали бы решения, соответствующие угловым колебаниям тела ограниченной амплитуды.

2.4.1. Устойчивость по линейному приближению. Речь идет об исследовании устойчивости тривиального решения системы (27), (28). Система (27), (28), в которой вводятся безразмерные дифференцирование и переменная ω:

$$\langle ' \rangle \mapsto n_0 \langle ' \rangle, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad A = R'(0), \quad B = s(0), \quad \omega \mapsto n_0\omega,$$

примет вид

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{In_0}F(\alpha)\cos\alpha - \frac{\sigma^2}{In_0}b(\alpha)\cos\alpha + \sigma n_0\omega^2\sin\alpha + \\ + \frac{s(\alpha)}{mn_0}\sin\alpha - \frac{b(\alpha)}{mn_0}\cos\alpha, \quad (29)$$

$$\omega' = -\frac{1}{In_0^2}F(\alpha) + \frac{\sigma}{In_0^2}b(\alpha) - \frac{\sigma}{In_0}\omega F(\alpha)\sin\alpha + \\ + \frac{\sigma^2}{In_0}\omega b(\alpha)\sin\alpha + \sigma n_0\omega^3\cos\alpha + \omega\frac{s(\alpha)}{mn_0}\cos\alpha + \omega\frac{b(\alpha)}{mn_0}\sin\alpha. \quad (30)$$

Введем следующие безразмерные положительные параметры:

$$\mu_1 = 2\frac{B}{mn_0}, \quad \mu_2 = \sigma n_0, \quad \mu_3 = \frac{b_1}{mn_0}, \quad \mu_4 = \frac{\sigma b_1}{In_0^2},$$

где $b_1 = b'(0)$.

Параметры естественно назвать: μ_1 — параметр силы лобового сопротивления; μ_2 — параметр момента лобового сопротивления; μ_3 — параметр боковой силы; μ_4 — параметр момента боковой силы.

Исследуя устойчивость тривиального решения системы (29), (30), выпишем соответствующее характеристическое уравнение. Оно имеет вид

$$\lambda^2 + K_1\lambda + K_2 = 0,$$

где

$$K_1 = \mu_2(\mu_4 - 1) + \mu_3 - \mu_1, \quad K_2 = \frac{\mu_1}{2}\left(\mu_2 - \mu_2\mu_4 + \frac{\mu_1}{2} - \mu_3\right) + 1 - \mu_4.$$

Тогда верно следующее предложение.

Предложение 2.1. *При выполнении неравенств*

$$\mu_2\mu_4 + \mu_3 > \mu_1 + \mu_2, \quad \frac{\mu_1\mu_2}{2} + \frac{\mu_1^2}{4} + 1 > \frac{\mu_1\mu_2\mu_4}{2} + \frac{\mu_1\mu_3}{2} + \mu_4 \tag{31}$$

тривиальное решение системы (29), (30) *асимптотически устойчиво.*

Условия (31) действительно могут быть выполнены. К примеру, если $\mu_1 = \mu_3$, то первое неравенство в (31) выполняется при любых положительных параметрах μ_2, μ_4, в результате чего второе неравенство в (31) нетрудно удовлетворить.

2.4.2. О рождении предельного цикла из слабого фокуса. Для возможного рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (29), (30) при критическом сочетании параметров

$$\mu_2\mu_4 + \mu_3 = \mu_1 + \mu_2. \tag{32}$$

Для этого сделаем следующую замену фазовых переменных $(\alpha, \omega) \mapsto (a, w)$ в системе (29), (30):

$$\alpha = a, \quad \omega = \frac{\mu_1}{2}a + \omega_0 w, \quad \omega_0 = \sqrt{1 - \frac{\mu_1^2}{4} - \mu_4},$$

переводящую ее в систему

$$\begin{aligned} a' &= |\omega_0|w + {}_1a^3 + {}_2a^2w + C_3aw^2 + \bar{o}_1((a^2+w^2)^{3/2}), \\ w' &= -|\omega_0|a + C_4a^3 + C_5a^2w + C_6aw^2 + C_7w^3 + \bar{o}_2((a^2+w^2)^{3/2}), \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$C_1 = \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} + \frac{s_2}{2In_0} + \frac{5\mu_1}{12} + \mu_2\left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}\right)^2 - \frac{\sigma^2 b_3}{6In_0} - \frac{b_3}{6mn_0},$$

$$C_2 = -\frac{5}{2}\mu_2\left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}\right)\omega_0, \quad C_3 = \mu_2\omega_0^2,$$

$$C_4 = -\left(1 + \frac{\mu_1\mu_2}{2}\right)\frac{f_3}{6In_0^2\omega_0} + \frac{\mu_2 + \mu_1/2}{2\omega_0}\cdot\left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{3}\right) + \frac{\sigma b_3}{6In_0^2},$$

$$C_5 = \frac{s_2}{2mn_0} + \mu_2\left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}\right)^2 + \frac{3\mu_1}{4},$$

$$C_6 = -2\mu_2\left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}\right)\omega_0, \quad C_7 = \mu_2\omega_0^2, \ s_2 = s''(0), \ f_3 = F'''(0), \ b_3 = b'''(0).$$

Введем следующий вспомогательный индекс:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind} &= |\omega_0|\left\{Y_{111}^1 + Y_{122}^1 + Y_{112}^2 + Y_{222}^2\right\} + \\ &+ \left(Y_{11}^1Y_{11}^2 - Y_{11}^1Y_{12}^1 + Y_{11}^2Y_{12}^2 + Y_{22}^2Y_{12}^2 - Y_{22}^1Y_{12}^1 - Y_{22}^1Y_{22}^2\right), \\ Y_{jkl}^i &= \frac{\partial^3 Y_i}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l}(0,0), \quad Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0,0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{pmatrix} Y_1(a,w) \\ Y_2(a,w) \end{pmatrix}$$

— правая часть системы (29), (30).

Более конкретно, для системы (29), (30) построенный индекс будет иметь вид:

$$\mathrm{Ind} = 6C_1 + 2C_3 + 2C_5 + 6C_7 = \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} + \frac{4s_2}{mn_0} + 5(\mu_1 + \mu_2) - \frac{\sigma^2 b_3}{In_0} - \frac{b_3}{mn_0}.$$

Поскольку для данной системы

$$Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0,0) = 0$$

(по причине нечетности ее правой части от фазовых переменных) для любых индексов i, j, k, то следующее предложение дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при $\mathrm{Ind} \neq 0$.

Предложение 2.2. *Если* $\mathrm{Ind} < 0$ ($\mathrm{Ind} > 0$) *и при этом выполнено неравенство*

$$(\mu_2\mu_4 + \mu_3 - \mu_2)^2 + 4\mu_4 < 4, \tag{34}$$

то начало координат фазовой плоскости $\mathbb{R}^2\{a, w\}$ *системы* (33) *при* критическом *соотношении параметров* (32) *является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.*

Условие (34) в данном случае является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости $\mathbb{R}^2\{a, w\}$ является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом.

Введем вспомогательное обозначение

$$\mu = \mu_2\mu_4 + \mu_3 - \mu_1 - \mu_2.$$

Очевидно, что в критическом случае (32) выполнено равенство $\mu = 0$.

Перефразировкой известной теоремы Пуанкаре—Андронова—Хопфа [11, 58, 60, 63] является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть для системы* (33) *выполнено неравенство* (34). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. *Если* $\mathrm{Ind} < 0$, *то для любых фиксированных* μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 *найдутся такие* $\delta_1, \delta_2 > 0$, *что при* $\mu \in (0, \delta_1)$ *начало координат является сильным устойчивым фокусом*; *при* $\mu \in (-\delta_2, 0)$ *начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением* μ *от* 0 *до* $-\delta_2$ *как* $\sqrt{|\mu|}$.
2. *2) Если* $\mathrm{Ind} > 0$, *то для любых фиксированных* μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 *найдутся такие* $\delta_1, \delta_2 > 0$, *что при* $\mu \in (-\delta_2, 0)$ *начало координат является сильным неустойчивым фокусом*; *при* $\mu \in (0, \delta_1)$ *начало координат является сильным устойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом* μ *от* 0 *до* δ_1 *как* $\sqrt{|\mu|}$.

Проверить выполнение условия $\mu > 0$ ($\mu < 0$) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды (R, s, b), или от их значений. А вот проверка условия $\mathrm{Ind} < 0$ ($\mathrm{Ind} > 0$) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды (R, s, b) неизвестны.

2.4.3. Движение конкретного твердого тела с конусообразной передней частью в воде. Рассмотрим движение следующего составного твердого тела в воде. Тело представляет собой цилиндр диаметром 30 мм ($D = 2R = 30$ мм), передней частью которого является круговой конус (рис. 8) массы $m = 80,5$ г.

Угол разворота конуса равен 82°, что означает выполнение равенств $c_x = 0,635$, $c_y = 0,14$.

Эксперименты по регистрации движении таких составных тел в воде были проведены в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова.

Безразмерный центральный момент инерции составного тела равен

$$\bar{I} = 11,1 = \frac{I}{\rho R^5},$$

где I — центральный (размерный) момент инерции, ρ — плотность воды. Расстояние CD от центра масс тела до точки D (передней точки конуса — вершины) равно $\sigma = 17,5$ мм (рис. 8).

Коэффициенты лобового сопротивления и боковой силы будут представлены в виде

$$B = s(0) = \frac{1}{2}c_x\rho\pi R^2, \quad b_1 = b'(0) = \frac{1}{2}c_y\rho\pi R^2,$$

при этом координата точки N (при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости тела) имеет вид $R(\alpha) = A\alpha$, где $A = 2Rk$.

Подсчитаем величину n_0, приняв систему СГС. Получим:

$$n_0^2 = \frac{AB}{I} = \frac{kc_x\pi}{11,1R^2} = 0,18\frac{k}{R^2},$$

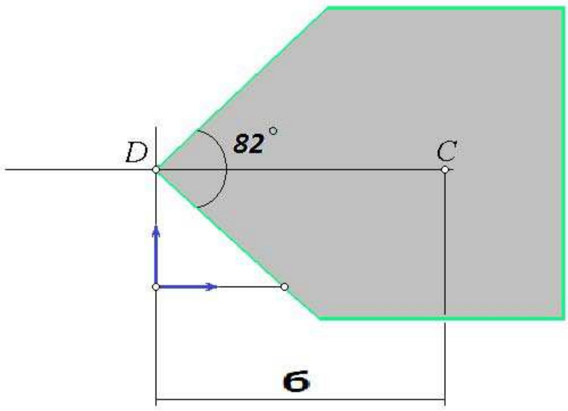

Рис. 8. Составное твердое тело с конусообразной передней частью

откуда

$$n_0 = 0,423\frac{\sqrt{k}}{R}.$$

Теперь подсчитаем безразмерные параметры μ_1, μ_2, μ_3, μ_4. А именно,

$$\mu_1 = 2\frac{B}{mn_0} = \frac{c_x \pi R^2}{80,5n_0} = \frac{0,557}{n_0} = \frac{0,197}{\sqrt{k}};$$

$$\mu_2 = \sigma n_0 = 0,494\sqrt{k};$$

$$\mu_3 = \frac{b_1}{mn_0} = \frac{0,0217}{\sqrt{k}};$$

$$\mu_4 = \frac{\sigma b_1}{In_0^2} = \frac{1,75c_y}{2Rkc_x} = \frac{0,128}{k}.$$

Тогда условия колебательного движения (т.е. второе условие из (31) означающее, что тривиальное решение является или притягивающим, или отталктвающим) примет вид $1,048 > \frac{0,126}{k}$ или $k > k_* = 0,121$, где k_* — некоторое критическое значение k.

Как уже отмечалось, значение постоянной k уже было оценено в некоторых работах (но, в основном, для переднего плоского торца). Для определения этого параметра необходимо проведение дополнительных натурных экспериментов.

Видно, что при $k < k_*$ тривиальное решение соответствующей системы соответствует грубому седлу на фазовой плоскости. При этом существуют начальные условия, при которых возможно движение вдоль устойчивых сепаратрис данного седла. При $k > k_*$ есть надежда на асимптотическую устойчивость тривиального решения (при выполнении первого неравенства из (31)).

В любом случае становится возможным сконструировать составное твердое тело с передним конусом такое, чтобы оба условия (31) могли быть выполнены.

2.5. Новое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой. В данном разделе проводится исследование систем, описывающих движение тела в сопротивляющейся среде, при котором на следящую силу наложено условие $\mathbf{T} = -\mathbf{S}$, означающее присутствие в системе неконсервативной пары сил, заставляющей центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно. Найдены некоторые частные решения полной системы, проведено качественное интегрирование динамических уравнений в пространстве квазискоростей. Получено новое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре. Построенное семейство состоит из бесчисленного множества фазовых портретов с различными качественными свойствами. При этом в дальнейшем полный нелинейный анализ построенных систем проводится, вообще говоря, как ранее известными методами качественной теории, так и новыми методами, полученными для систем с так называемой переменной диссипацией (см. [56, 57, 61, 62, 65]).

Дополнительно повторно оговорим, что дальнейшее исследование нелинейных динамических систем мы проводим при всех действительных значениях α, хотя подразумеваем, что модель справедлива лишь в ограниченной области значений $|\alpha| < \pi/2$.

Будем исследовать систему следующего вида:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha,\omega)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I}\psi(\alpha,\omega) - \omega\Psi_1(\alpha,\omega), \end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\psi(\alpha,\omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha),$$

$$\Psi_1(\alpha,\omega) = \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha,\omega)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha.$$

Данная система получена из системы (27), (28) при условии $\mathbf{T} = -\mathbf{S}$.

Таким образом, в системе присутствуют две пары сил: пара силы лобового сопротивления и пара боковой силы. При этом полученная система (35) является обобщением системы, рассмотренной для случая движения тела с передним плоским торцом (см. [31, 32, 33]).

2.5.1. Точки покоя системы второго порядка. У системы (35) существуют точки покоя на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha,\omega\}$, которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \tag{36}$$

$$\alpha = (2k+1)\pi, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad \omega = 0, \tag{37}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, \quad l\in\mathbb{Z}, \quad \omega = -1, \tag{38}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi, \quad l\in\mathbb{Z}, \quad \omega = 1. \tag{39}$$

Системы (36), (37) задают точки, в которые ортогонально проектируются частные решения системы (35) вида

$$v(q) = v^0\exp(-\kappa q), \quad \kappa > 0, \quad \alpha(q) \equiv s\pi, \quad s\in\mathbb{Z}, \quad \omega(q)\equiv 0,$$

при четном s соответствующие прямолинейному поступательному торможению.

Наряду с точками покоя (36)–(39) могут существовать точки покоя, не лежащие на прямых

$$\{(\alpha,\omega)\in\mathbb{R}^2 : \sin\alpha\cos\alpha = 0\}.$$

Необходимым условием существования таких точек является их представление через систему

$$F(\alpha) = \sigma b(\alpha), \quad \alpha \neq 0 \bmod \frac{\pi}{2}, \quad \omega = 0.$$

В силу выбора функциональных классов $\{F\}$ и $\{b\}$ функция

$$h(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{b(\alpha)}$$

гладкая. Тогда справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.1. *При*

$$h^* = \max_\alpha h(\alpha) < \sigma \tag{40}$$

точки покоя, не лежащие на прямых $\{(\alpha,\omega)\in\mathbb{R}^2 : \sin\alpha\cos\alpha = 0\}$, *не существуют. При*

$$h^* = \max_\alpha h(\alpha) > \sigma \tag{41}$$

такие точки покоя всегда существуют, а при $h^* = \max_\alpha h(\alpha) = \sigma$ *они совпадают с точками покоя* (38), (39).

Следствие 2.2. *У системы* (26)–(28) *при условиях* (41) *существуют частные решения вида*

$$v(q) = v^0 \exp(-\kappa q), \quad \kappa > 0, \quad v^0 = v(0),$$
$$\alpha(q) \equiv \alpha^0 = \alpha(0) \neq \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$\omega(q) \equiv 0.$$

Следствие 2.3. *У системы* (23)–(25) *при условиях* (41) *существуют частные решения вида*

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 \kappa t}, \quad \kappa > 0, \quad v_0 = v(0),$$
$$\alpha(t) \equiv \alpha_0 = \alpha(0) \neq \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$\Omega(t) \equiv 0.$$

В дальнейшем будем рассматривать систему (35) при условии (40).

2.5.2. Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа. В системе (35) присутствуют два положительных безразмерных параметра, от которых зависит классификация точек покоя:

$$\beta_1 = \frac{\sigma^2 F'(0)}{I}, \quad \beta_2 = \frac{\sigma^3 b'(0)}{I}.$$

Предложение 2.3.

1. *Точки покоя* (36) *всегда являются неустойчивыми*: *седлами, если* $\beta_2 > \beta_1$, *отталкивающими точками, если* $\beta_2 < \beta_1$. *При выполнении последнего условия данные точки покоя являются фокусами, если* $\beta_2 - \beta_1 + 4 > 0$, *и узлами, если* $\beta_2 - \beta_1 + 4 \leqslant 0$.
2. *Точки покоя* (37) *всегда являются притягивающими*: *фокусами, если* $\beta_2 + \beta_1 - 4 < 0$, *и узлами, если* $\beta_2 + \beta_1 - 4 \geqslant 0$.
3. *Точки покоя* (38), (39) *всегда являются отталкивающими фокусами.*

В силу отделения от системы третьего порядка (26)–(28) независимой подсистемы второго порядка (27), (28) фазовые траектории в $\mathbb{R}^1_+\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ лежат на поверхностях, являющихся двумерными цилиндрами. В частности, если существует во всем фазовом пространстве первый интеграл системы (35), то он является функцией переменных (α, ω), а поэтому задает семейство цилиндров в $\mathbb{R}^1_+\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$.

Замечание 2.1. *Пусть* φ — *угол отклонения твердого тела. Поскольку* $d\varphi/dt = v\, d\varphi/dq$, *то в фазовом пространстве системы* (23)–(25) *данному первому интегралу будет соответствовать первый интеграл, который зависит от всех трех фазовых переменных.*

Благодаря вышеописанной редукции, удобнее строить фазовый портрет системы (26)–(28) в $\mathbb{R}^1_+\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ с помощью фазового портрета системы (27), (28) в $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$. Последний не будет являться частью портрета в $\mathbb{R}^1_+\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ в теоретико-множественном смысле, а будет ортогональной проекцией портрета на плоскость $\{v = \text{const}\}$. Поэтому становятся возможными поднятие фазовых траекторий с плоскостей в пространство $\mathbb{R}^1_+\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ и получение фазовых портретов системы третьего порядка.

Замечание 2.2. *Поскольку* $v > 0$, *то движение возможно лишь в области* $B' = \{(\alpha, \omega, v) \in \mathbb{R}^3 : v > 0\}$.

Если формально сделать замену переменных в области B' по формуле $\bar{p} = \ln v$, то полученное векторное поле в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$ не зависит от $\bar{p}$, т.е. имеет цилиндрическую природу более высокого порядка и ортогонально проектируется на все семейство плоскостей $\{v = \text{const}\}$.

Замечание 2.3. *Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в трехмерное фазовое пространство, необходимо выяснить знак проекции векторного поля в* $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$ *на* $\bar{p}$*-ось, либо на* v*-ось в области* B'.

Рассмотрим поверхность

$$M = \{(\alpha, \omega, v) \in B' : \ \Psi_1(\alpha, \omega) = 0\}$$

(о функции Ψ_1 см. (26)). Данная поверхность является цилиндром, который разрезает фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция векторного поля на v-ось имеет фиксированный знак.

На самой же поверхности M (и только на ней) проекция векторного поля на v-ось обращается в нуль.

Замечание 2.4. *Для любых $R \in \{R\}$, $b \in \{b\}$, $s \in \{s\}$ векторное поле системы* (27), (28) *обладает свойством центральной симметрии относительно точек $(\pi k, 0), k \in \mathbb{Z}$, т.е. в координатах (α, ω) векторное поле системы меняет направление при замене*

$$\begin{pmatrix} \alpha + \pi k \\ \omega \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\alpha + \pi k \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Другими словами, векторное поле системы (26)–(28) обладает симметрией относительно лучей $\{(\alpha, \omega, v) \in B' : \ \alpha = \pi k, \ \omega = 0\}$.

2.5.3. Классификация фазовых портретов системы на двумерном цилиндре для некоторой области параметров. Как уже отмечалось, будем изучать те динамические системы, которые допускают выполнение неравенства (40). Таким образом, для начала рассматриваем случай отсутствия точек покоя, не лежащих на прямых $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \ \sin\alpha\cos\alpha = 0\}$.

Далее, в общем пространстве физически допустимых параметров будем изучать область

$$J^2 = \{h^* = \max_\alpha h(\alpha) < \sigma, \quad \beta_2 > \beta_1\}.$$

Для проведения классификации фазовых портретов системы на плоскости или двумерном цилиндре необходимо ответить на следующие вопросы.

А. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве α- и ω-предельных множеств бесконечно удаленные точки.

Введем семейство полос на плоскости:

$$\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \Big\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \ \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\Big\},$$

при этом

$$\Pi_{(-\pi/2, \pi/2)} = \Pi, \quad \Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi'.$$

У системы (35) существуют траектории, уходящие на бесконечность на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$. Их α- и ω-предельными множествами являются бесконечно удаленные точки $(-(2k+1)\pi + 0, +\infty)$, $(2k\pi - 0, +\infty)$, $((2k+1)\pi - 0, -\infty)$, $(-2k\pi + 0, -\infty)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Лемма 2.1. *Рассмотрим систему* (35) *на множестве*

$$\Pi_{(-\pi, 0)} \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}. \tag{42}$$

Тогда существует единственная траектория, имеющая в качестве ω-предельного множества точку $(-0, +\infty)$), а также существует единственная траектория, имеющая в качестве α-предельного множества точку $(-\pi + 0, +\infty)$).

В силу имеющейся симметрии поведение аналогичных траекторий в других полосах плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ подобно данному.

Лемма 2.1 справедлива в более широких областях параметров.

Б. Ввиду рассмотрения динамических систем на цилиндре, наличие замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий, охватывающих цилиндр.

У системы (35) в области параметров J^2 отсутствуют замкнутые фазовые характеристики, охватывающие фазовый цилиндр $\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$, составленные из траекторий рассматриваемой системы (см. также [64, 66]).

В. Существование замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку. В частности, существование неизолированных периодических траекторий или предельных циклов.

Заметим, что в силу 2π-периодичности векторного поля системы по α, последняя задача сводится к отысканию замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий лишь вокруг точек покоя индекса 1. Таким образом, предельные циклы могут существовать только лишь вокруг точек покоя (37)–(39) (см. также [54]).

Лемма 2.2. *Вокруг точек покоя* (38), (39) *не существует замкнутых кривых, составленных из траекторий системы* (35).

Исследование наличия замкнутых кривых вокруг точек покоя (37) показывает, что при некоторых условиях такие кривые существуют, а при некоторых условиях — нет.

При этом пространство параметров J^2 системы (35) разбивается на два множества, $J^2 = J_0 \sqcup J_1$, по отношению к наличию предельного цикла в полосе П. Для параметров из множества J_0 у системы (35) не существует замкнутых кривых, составленных из ее траекторий. Для параметров из множества J_1 у системы (35) могут существовать предельные циклы. Оба множества имеют конечную меру (см. также [27, 29, 44, 46]).

Г. Основным вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся гиперболических седел.

Данные сепаратрисы разделяют всю фазовую плоскость на области без положений равновесия. Ввиду последнего, фазовые портреты мгновенно достраиваются.

Рассмотрим систему (35) для случая параметров J_0.

Лемма 2.3. *Сепаратриса, выходящая из начала координат в полосу* $\Pi_{(-\pi/2,0)}$ *(*$\Pi_{(0,\pi/2)}$*) имеет в качестве ω-предельного множества точку* $(-\pi, 0)$ *(*$(\pi, 0)$*).*

Доказательство леммы 2.3 получается из теории топографических систем Пуанкаре.

В силу имеющейся симметрии поведение аналогичных траекторий в других полосах плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ подобно данному.

Ключевым вопросом классификации портретов является вопрос о поведении сепаратрисы, выходящей из бесконечности в полосу $\Pi_{(-\pi,0)}$. Для нее дадим определение индекса сепаратрисного поведения.

Определение 2.1. *Индексом сепаратрисного поведения (ИСП, обозначение* isp*) называется рациональное число j, выбираемое из множества*

$$\left\{ j \in \mathbb{Q} : \ j = \frac{k}{2}, \ k \in \mathbb{N}_{\not{k}} \right\}.$$

По определению isp $= j$, *если ключевая сепаратриса (выходящая из бесконечности в полосу* $\Pi_{(-\pi,0)}$*) имеет в качестве ω-предельного множества точку* $(2\pi j - \pi, 0)$.

Видно, что если $j \in \mathbb{Z}$, то ключевая сепаратриса j раз охватывает цилиндр (по координате α). Таким образом,

(i) при $j = 0$ предельным множеством ключевой сепаратрисы является притягивающая точка $(-\pi, 0)$ (рис. 9, isp $= 0$);
(ii) при $j = 1/2$ предельным множеством ключевой сепаратрисы является седло $(0, 0)$ (рис. 10, isp $= 1/2$);
(iii) при $j = 1$ предельным множеством ключевой сепаратрисы является притягивающая точка $(\pi, 0)$ (рис. 11, isp $= 1$);
(iv) при $j = 3/2$ предельным множеством ключевой сепаратрисы является седло $(2\pi, 0)$ (рис. 12, isp $= 3/2$);
(v) при $j = 2$ предельным множеством ключевой сепаратрисы является притягивающая точка $(3\pi, 0)$ (рис. 13, isp $= 2$).

Теорема 2.2. *Определение 2.1 корректно.*

Теорема 2.2 доказывается методами топографических систем Пуанкаре.

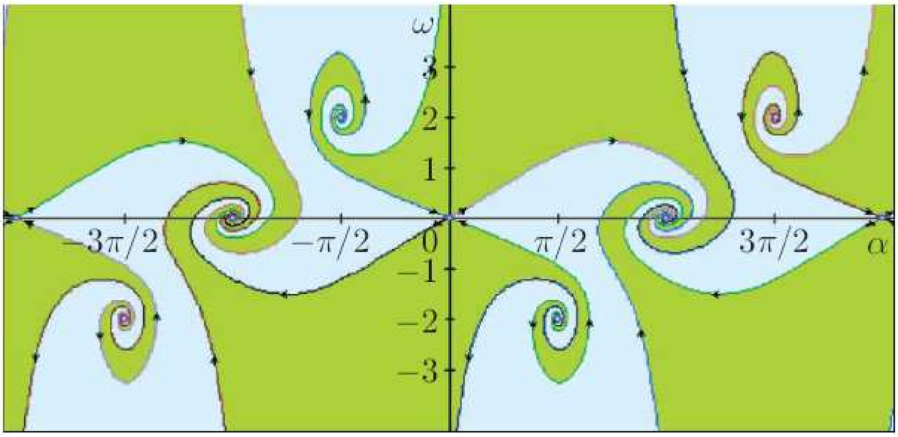

Рис. 9. Фазовый портрет без неявных положений равновесия, isp $= 0$

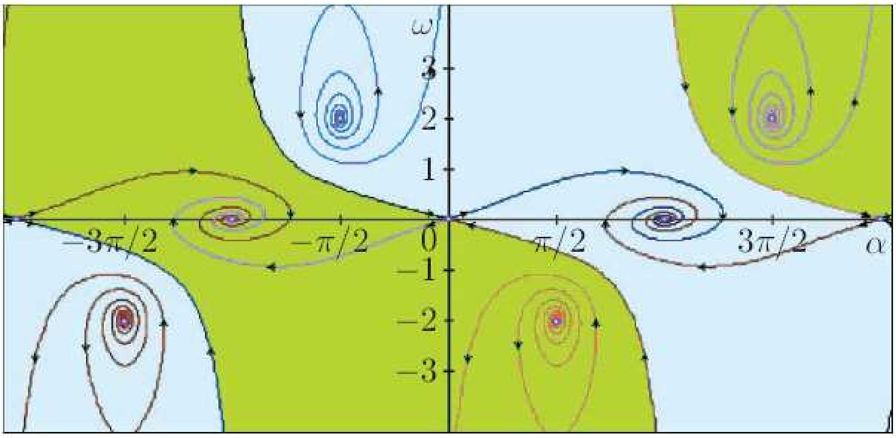

Рис. 10. Фазовый портрет без неявных положений равновесия, isp $= 1/2$

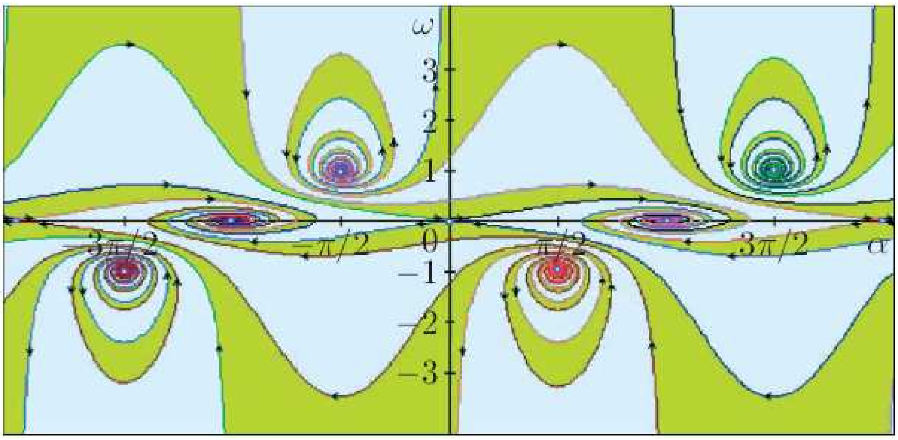

Рис. 11. Фазовый портрет без неявных положений равновесия, isp $= 1$

Прежде чем предъявить схему доказательства теоремы 2.2, приведем несколько вспомогательных утверждений. Предложение 2.4 характеризует поведение ключевой сепаратрисы системы

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + \frac{\sigma}{I} F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2 \sin\alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I} F(\alpha) - \omega\Psi_1(\alpha,\omega), \end{aligned} \tag{43}$$

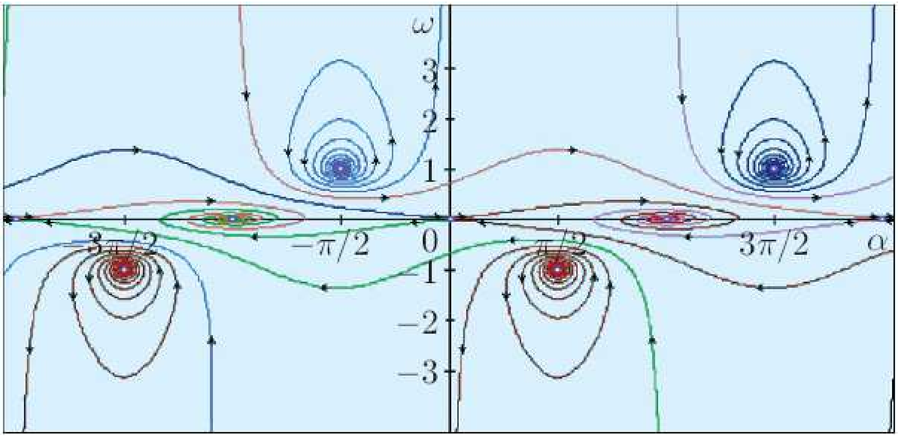

Рис. 12. Фазовый портрет без неявных положений равновесия, isp = 3/2

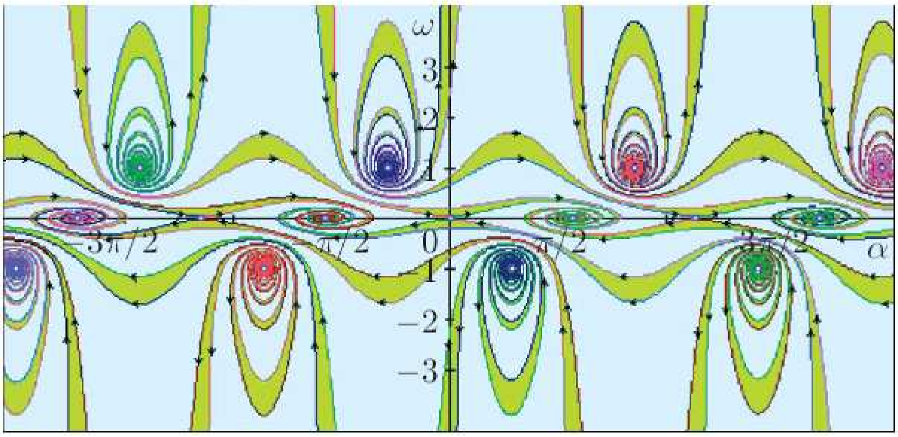

Рис. 13. Фазовый портрет без неявных положений равновесия, isp = 2

где
$$\Psi_1(\alpha,\omega) = \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha,$$
при наличии «возмущения», дающего систему (35) (три типа фазовых портретов системы (43) изображены на рис. 14–16).

Предложение 2.4. *Возмущение системы* (43)*, дающее систему* (35)*, расщепляет рассматриваемую сепаратрису* (*выходящую из бесконечности в полосу* $\Pi_{(-\pi,0)}$ *и входящую в бесконечность в этой же полосе*).

Действительно, характеристическая функция упорядоченной пары систем (43) и (35) имеет вид
$$\chi((43),(35)) = \frac{\sigma}{I}b(\alpha)\Big[(\sigma\omega+\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha\Big], \tag{44}$$
и она положительна почти всюду на множестве (42), поскольку в ней выполнено неравенство $b(\alpha) > 0$ почти всюду.

Более того, в силу знакоопределенности почти всюду характеристической функции (44), сепаратрисы, имеющие в качестве ω-предельного множества бесконечно удаленные точки $(2k\pi - 0, +\infty)$ и $(-2k\pi+0,-\infty)$, имеют в качестве α-предельных множеств точки (38) и (39) (рис. 9–13).

Обозначим $b^* = \max_\alpha |b(\alpha)|$. Пусть $\beta_2^* = \sigma^3 b^*/I$.

Предложение 2.5. *Для любого* $M > 0$ *и достаточно малого значения* $\beta_2^* > 0$ *найдется такое* $\varepsilon > 0$*, что для любого* $\beta_2^* < \varepsilon$ *ключевая сепаратриса, выходящая из бесконечности в полосу* $\Pi_{(-\pi,0)}$*, продолжится вправо вдоль оси* α *более чем на* M*.*

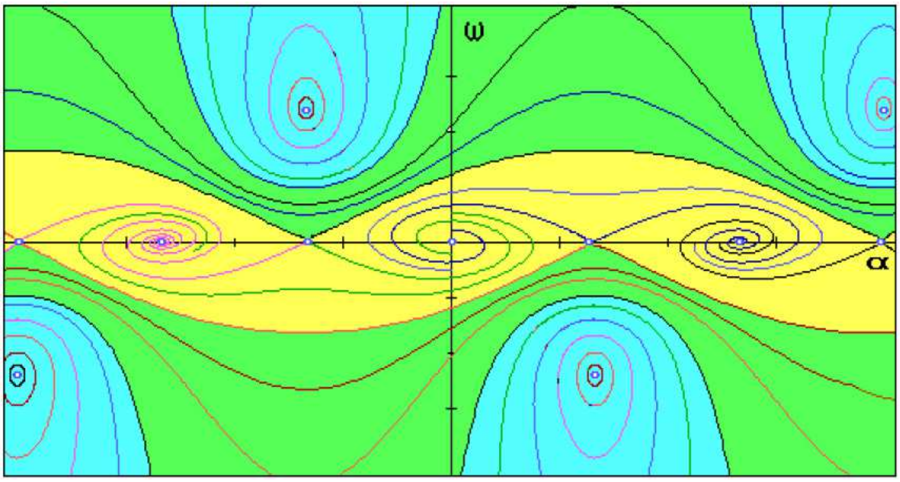

Рис. 14. Ключевая сепаратриса ограничивает область с положением равновесия типа «центр»

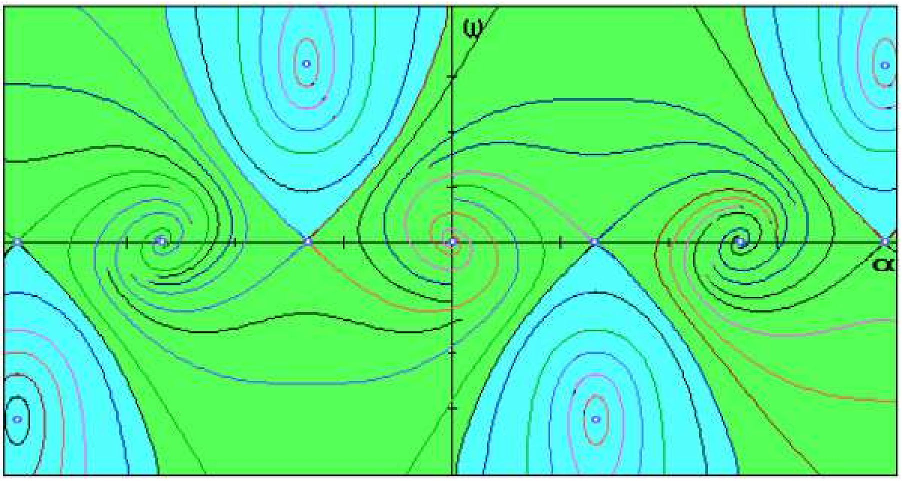

Рис. 15. Ключевая сепаратриса «входит» в седло $(-\pi/2, 0)$

Данное предложение следует из теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров и начальных условий.

Схема доказательства теоремы 2.2. Фазовый поток исследуемой системы (35) отображает часть прямой Λ_{-1} на прямую Λ_1, где $\Lambda_k = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \ \alpha = \pi k\}$.

Итак, рассмотрим отображение прямой Λ_{-1} на прямую Λ_1 в силу фазовых траекторий. Для системы сравнения (43) с вращениями (рис. 14) это отображение, по крайней мере, вблизи прямой Λ_{-1} в области (42) тождественно.

Предложение 2.6. *Для системы* (35) *построенное отображение* (*там, где оно определено*) *таково*:

$$(-\pi, \omega_1) \to (\pi, \omega_2), \quad \omega_1 > \omega_2 > 0.$$

Продолжим доказательство теоремы 2.2. Имея в виду непрерывную зависимость отображения, построенного в предложении 2.6, от параметра β_2^*, рассмотрим при достаточно малых β_2^* зависимость типа фазового портрета от параметра β_2^*.

Предположим, что ключевая сепаратриса имеет ω-предельное множество, отстоящее от прямой Λ_{-1} вдоль оси α на $2\pi j$, $j \in \mathbb{N}_0$. По теореме о непрерывной зависимости решений от параметров и начальных условий при уменьшении параметра β_2^* до необходимого значения (предложение 2.5)

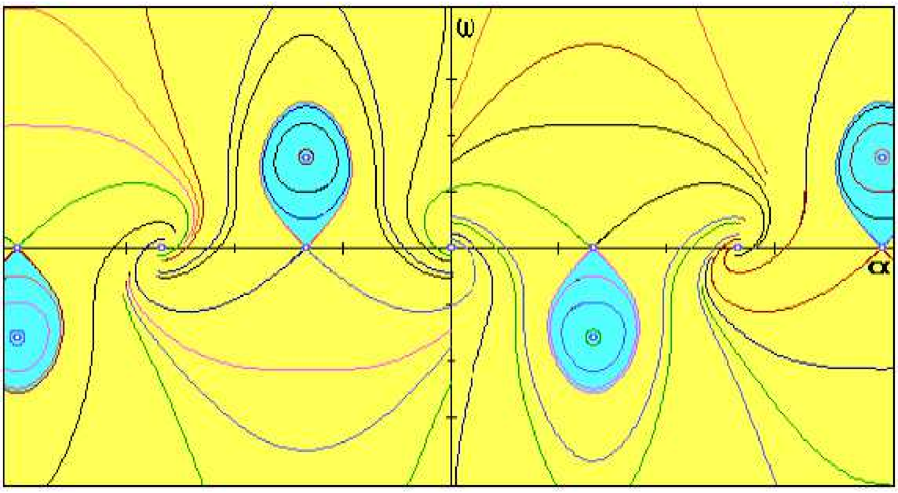

Рис. 16. Ключевая сепаратриса «входит» в притягивающую точку $(-\pi, 0)$

ключевая сепаратриса будет иметь грубое ω-предельное множество, отстоящее от прямой Λ_{-1} вдоль оси α на $2\pi(j+1)$, $j \in \mathbb{N}_0$. Случай $j \in \mathbb{N}_0$ рассмотрен.

Напомним, что у системы (35) на фазовом цилиндре существуют предельные точки (36) (седла), также отстоящие от прямой Λ_{-1} вдоль оси α на $2\pi j$, $j \notin \mathbb{N}_0$.

Предложение 2.7. *Ключевая сепаратриса может иметь в качестве ω-предельного множества седловые точки* (36).

Доказательство. В силу гладкой зависимости ключевой сепаратрисы от параметра β_2^*, при том критическом значении параметра, при котором происходит перестройка грубого ω-предельного множества сепаратрисы (от точки $2\pi j$ к точке $2(j+1)\pi$, $j \in \mathbb{N}_0$, см. выше), новым ω-предельным множеством станет точка (36), а именно, седло $(2\pi j, 0)$, $j \notin \mathbb{N}_0$. Действительно, если бы седло $(2\pi j, 0)$, $j \notin \mathbb{N}_0$, при рассматриваемом критическом значении параметра β_2^* не было бы ω-предельным множеством для ключевой сепаратрисы, то тогда эта сепаратриса имела бы другое грубое (точку $2\pi j$ или точку $2(j+1)\pi$, $j \in \mathbb{N}_0$, см. выше) ω-предельное множество. Поскольку при малом шевелении грубое ω-предельное множество сохранится, мы вступаем в противоречие с тем, что критическое значение параметра β_2^* соответствует грубому ω-предельному множеству. Предложение 2.7 доказано (более подробно о таких системах см. [38]). □

Более общее утверждение, в том числе и о строго монотонных полях, см. в [38].

Закончим схему доказательства теоремы 2.2. Если в качестве системы сравнения для системы (35) мы возьмем систему (43), фазовый портрет которой представлен на рис. 16 (у которой ключевая сепаратриса «входит» в притягивающую точку $(-\pi, 0)$), то тем самым реализуется случай $\mathrm{isp} = j = 0$. Схема доказательства теоремы 2.2 приведена полностью. □

Многие результаты данной работы регулярно докладывались на множестве семинаров, в том числе и на семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени профессора В. В. Трофимова (см. [4, 5, 6, 59, 60]) под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15–01–00848–а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. — 304 с.
2. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1969. – 349 с.
3. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1988. — 320 с.

4. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Валерий Владимирович Трофимов // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23, 2007. — С. 5–15.
5. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Заседания семинара “Актуальные проблемы геометрии и механики” им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Современная математика и ее приложения. Т. 65. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. — 2009. — С. 3–10.
6. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова “Актуальные проблемы геометрии и механики” им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова // Современная математика и ее приложения. Т. 76. Геометрия и механика. — 2012. — С. 3–10.
7. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. — 322 с.
8. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. — 1983. — Т. 38. — № 1 — С. 3–67.
9. Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947. — 928 с.
10. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986. — 86 с.
11. Пуанкаре А. Новые методы в небесной механике // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1,2. — М.: Наука, 1971, 1972. — 771 с. и 999 с.
12. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
13. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т. 1. — М.: Наука, 1983. — 528 с.; т. 2. — М.: Наука, 1984. — 560 с.
14. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16. — Вып. 4. — С. 3–229.
15. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд–во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
16. Чаплыгин С.А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976. — 495 с.
17. Шамолин М.В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1992. — № 1. — С. 52–58.
18. Шамолин М.В. Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Доклады РАН. — 1994. — Т. 337. — № 5. — С. 611–614.
19. Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН, 1996. — Т. 349. — № 2. С. 193–197.
20. Шамолин М.В. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Известия РАН. МТТ. — 1996, № 2, с. 55–63.
21. Шамолин М.В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. — 1997, № 2, с. 65–68.
22. Шамолин М.В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи матем. наук. — 1997, Т. 52, вып. 3, с. 177–178.
23. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. — 1998, Т. 53, вып. 3, с. 209–210.
24. Шамолин М.В. Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. — 1998, № 6, с. 29–37.
25. Шамолин М.В. Некоторые классы частных решений в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. — 1999, № 2, с. 178–189.
26. Шамолин М.В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364. — № 5. — С. 627–629.
27. Шамолин М.В. О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией // Успехи матем. наук. — 1999, Т. 54, вып. 5, с. 181–182.
28. Шамолин М.В. Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН, 2000. — Т. 371. — № 4. — С. 480–483.
29. Шамолин М.В. О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек // Успехи матем. наук. — 2000. — Т. 55, вып. 3. С. 187–188.
30. Шамолин М.В. Об устойчивости движения твердого тела в сопротивляющейся среде, закрученного вокруг своей продольной оси // Известия РАН. МТТ. — 2001. — № 1. — С. 189–193.

31. Шамолин М.В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2001. — № 5. — С. 22–28.
32. Шамолин М.В. Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твердого тела // Прикл. механика. — 2001. — Т. 37. — № 6. — С. 74–82.
33. Шамолин М.В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57, вып. 1. С. 169–170.
34. Шамолин М.В. Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой // Прикл. механика. — 2004. — Т. 40. — № 4. — С. 137–144.
35. Шамолин М.В. Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости // Доклады РАН. — 2005. — Т. 403. — № 4. — С. 482–485.
36. Шамолин М.В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикл. мат. и мех. — 2005. — Т. 69, вып. 6. — С. 1003–1010.
37. Шамолин М.В. К задаче о пространственном торможении твердого тела в сопротивляющейся среде // Известия РАН. МТТ. — 2006. — № 3. — С. 45–57.
38. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Изд–во "Экзамен", 2007. — 352 с.
39. Шамолин М.В. Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии его со средой // Прикл. механика. — 2007. — Т. 43. — № 10. — С. 49–67.
40. Шамолин М.В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учете вращательных производных момента силы ее воздействия // Известия РАН. МТТ. — 2007, № 3, с. 187–192.
41. Шамолин М.В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // Успехи мат. наук. — Т. 62. — Вып. 5, 2007. — С. 169–170.
42. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14. — Вып. 3. — С. 3–237.
43. Шамолин М.В. Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Прикл. мат. и мех. — 2008. — Т. 72, вып. 2. — С. 273–287.
44. Шамолин М.В. Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2008. — № 3. — С. 43–49.
45. Шамолин М.В. Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН, 2008. — Т. 418. № 1. С. 46–51.
46. Шамолин М.В. Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем // Современная математика и ее приложения. Т. 62. Геометрия и механика. — 2009. — С. 131–171.
47. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела // Доклады РАН, 2010. Т. 431. № 3. С. 339–343.
48. Шамолин М.В. Пространственное движение твердого тела в среде с сопротивлением // Прикл. механика. — 2010. — Т. 46. — № 7. — С. 120–133.
49. Шамолин М.В. Движение твердого тела в сопротивляющейся среде // Матем. моделирование. — 2011. — Т. 23. — № 12. — С. 79–104.
50. Шамолин М.В. Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2011. — № 3. — С. 24–30.
51. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН, 2011. Т. 437. № 2. С. 190–193.
52. Шамолин М.В. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Матем. моделирование. — 2012. — Т. 24. — № 10. — С. 109–132.
53. Шамолин М.В. Некоторые вопросы качественной теории в динамике систем с переменной диссипацией // Современная математика и ее приложения. Т. 78. Дифференциальные уравнения в частных производных и оптимальное управление. — 2012. — С. 138–147.
54. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.

55. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
56. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения твердого тела в сопротивляющейся среде при учете линейного демпфирования // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2012. — № 4. — С. 44–47.
57. Шамолин М.В. Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Современная математика и ее приложения. Т. 76. Геометрия и механика. — 2012. — С. 84–99.
58. Якоби К. Лекции по динамике. — М.–Л.: ОНТИ, 1936. — 272 с.
59. Georgievskii D.V., Shamolin M.V., Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 154, No. 4, 2008, p. 462–495 (пер. "Современная математика. Фундаментальные направления". Т. 23, 2007. — С. 16–45).
60. Georgievskii D.V., Shamolin M.V., Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University, "Urgent problems of geometry and mechanics" named after V. V. Trofimov, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 161, No. 5, 2009, p. 603–614 (пер. "Современная математика и ее приложения". Т. 62. Геометрия и механика. — 2009.)
61. Shamolin M.V., Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 110, No. 2, 2002, p. 2526–2555.
62. Shamolin M.V., New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 114, No. 1, 2003, p. 919–975.
63. Shamolin M.V., Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 122, No. 1, 2004, p. 2841–2915.
64. Shamolin M.V., Some methods of analysis of the dynamic systems with various dissipation in dynamics of a rigid body, In: PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.), 8, 10137–10138 (2008).
65. Shamolin S.V., New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium, In: PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.), 9, 139–140 (2009).
66. Shamolin M.V., Integrability and nonintegrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body, In: PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.), 10, 63–64 (2010).

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: `shamolin@rambler.ru; shamolin@imec.msu.ru`