М. В. Шамолин, Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Часть 2, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2017, том 135, 3–93

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 135 (2017). С. 3–93

УДК 517.9+531.01

МАЛОМЕРНЫЕ И МНОГОМЕРНЫЕ МАЯТНИКИ В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ. ЧАСТЬ 2

© 2017 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Работа посвящена новым случаям интегрируемости систем на касательном расслоении к конечномерной сфере. К такого рода задачам приводятся системы из динамики многомерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Ключевые слова: закрепленное твердое тело, маятник, многомерное тело, интегрируемая система, система с переменной диссипацией, трансцендентный первый интеграл.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 37E10, 37N05

Светлой памяти и к 100-летию со дня рождения
моего деда гвардии капитана Николая Николаевича Полозова

СОДЕРЖАНИЕ ЧАСТИ 1
(см. т. 134)

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 6

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ МАЯТНИКА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данной работе систематизируются результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного закрепленного n-мерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного n-мерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи, см. также [194, 198, 200, 202]), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил, см. также [203, 244, 245]).

Ранее в [101] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения закрепленного тела-маятника в однородном потоке набегающей среды в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [148, 158, 160] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы уравнений движения существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом (сферическим маятником) сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

Далее [197] были исследованы уравнения движения закрепленных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на одномерной прямой, перпендикулярной данному диску.

В данной работе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

6.1. Модельные предположения

Рассмотрим однородный $(n-1)$-мерный круговой диск $\mathcal{D}^{n-1}$ с центром в точке D, гиперплоскость которого в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ перпендикулярна державке OD. Диск жестко прикреплен к державке, находящейся на (обобщенном) сферическом шарнире O, и обтекается однородным потоком среды. В этом случае тело представляет собой физический (обобщенный сферический) маятник. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$, а державка сопротивления не создает.

Предположим, что суммарная сила $\mathbf{S}$ воздействия потока среды на диск перпендикулярна диску $\mathcal{D}^{n-1}$, а точка N приложения этой силы определяется, по крайней мере, углом атаки α, измеряемым между вектором скорости $\mathbf{v}_D$ точки D относительно потока и державкой OD, углами $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$, измеряемыми в гиперплоскости диска $\mathcal{D}^{n-1}$ (таким образом, $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты конца вектора $\mathbf{v}_D$), а также тензором приведенной угловой скорости

$$\tilde{\omega} \cong \frac{l\tilde{\Omega}}{v_D},\ v_D = |\mathbf{v}_D|$$

(l — длина державки, $\tilde{\Omega}$ — тензор угловой скорости маятника). Подобные условия обобщают модель струйного обтекания пространственных тел [59, 86].

Вектор

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{OD}}{l} \tag{6.1.1}$$

определяет ориентацию державки. Тогда

$$\mathbf{S} = s(\alpha) v_D^2 \mathbf{e}, \tag{6.1.2}$$

где

$$s(\alpha) = s_1(\alpha) \operatorname{sign} \cos \alpha, \tag{6.1.3}$$

при этом коэффициент сопротивления $s_1 \geqslant 0$ зависит лишь от угла атаки α. В силу свойств осевой симметрии тела-маятника относительно оси $Dx_1 = OD$ функция $s(\alpha)$ (формально) является четной.

Пусть $Dx_1 \ldots x_n$ — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось Dx_1 имеет направляющий вектор $\mathbf{e}$, а оси $Dx_2, \ldots, Dx_{n-1}$ и Dx_n лежат в гиперплоскости диска $\mathcal{D}^{n-1}$.

Углами $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})$ мы определим положение державки OD в n-мерном пространстве $\mathbb{E}^n$. При этом угол ξ будем измерять между державкой и направлением набегающего потока. Другими словами, вводимые углы являются (обобщенными) сферическими координатами точки D центра диска $\mathcal{D}^{n-1}$ на $(n-1)$-мерной сфере постоянного радиуса OD.

Пространством положений такого (обобщенного) сферического (физического) маятника является $(n-1)$-мерная сфера

$$\mathbb{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}, \tag{6.1.4}$$

а фазовым пространством — касательное расслоение $(n-1)$-мерной сферы

$$T_*\mathbb{S}^{n-1}\{(\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\eta}_{n-2}; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbb{R}^{2(n-1)} : \ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}. \tag{6.1.5}$$

Тензор (второго ранга) $\tilde{\Omega}$ угловой скорости в системе координат $Dx_1 \ldots x_n$ будем определять через кососимметрическую матрицу. Так, для определенности, в случае $n = 5$ эта матрица примет вид

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \ \tilde{\Omega} \in \mathrm{so}(5). \tag{6.1.6}$$

Расстояние от центра D диска $\mathcal{D}^{n-1}$ до центра давления (точки N) будет иметь вид

$$|\mathbf{r}_N| = r_N = DN\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{l\Omega}{v_D}\right), \tag{6.1.7}$$

где

$$\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$$

в системе $Dx_1 \ldots x_n$ (волну над Ω опустим).

Сразу же заметим, что, также как и в маломерных случаях, используемая модель воздействия потока среды на закрепленный маятник аналогична построенной модели для свободного тела и в дальнейшем учитывает влияние вращательной производной момента силы воздействия среды по тензору угловой скорости маятника (см. также [197]). Анализ задачи об (обобщенном) сферическом (физическом) маятнике в потоке позволит обнаружить качественные аналогии в динамике частично закрепленных и свободных многомерных тел.

6.2. Некоторые общие рассуждения

6.2.1. Случаи динамической симметрии многомерного тела. Пусть n-мерное твердое тело Θ массы m с гладкой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Theta$ находится в некотором (вообще говоря, неконсервативном) поле сил (это можно интерпретировать как движение тела в сопротивляющейся среде, заполняющей n-мерную область евклидового пространства $\mathbb{E}^n$).

Предположим, что оно является динамически симметричным. Так, например, для четырехмерного тела имеются две логические возможности представления его тензора инерции в случае наличия *двух* независимых равенств главных моментов инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\} \tag{6.2.1}$$

(так называемый случай (1—3)), либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\} \tag{6.2.2}$$

(случай (2—2)). В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии), а во втором случае двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 являются плоскостями динамической симметрии тела.

Для пятимерного тела было бы логично рассмотреть случаи *трех* независимых равенств главных моментов инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2, I_2\} \tag{6.2.3}$$

(случай (1—4)), либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3, I_3\} \tag{6.2.4}$$

(случай (2—3)). В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4x_5$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии), а во втором случае двумерная и трехмерная плоскости Dx_1x_2 и $Dx_3x_4x_5$ являются плоскостями динамической симметрии тела.

Соответственно, для n-мерного тела было бы логично рассмотреть случаи $n-1$ независимых равенств главных моментов инерции. При этом возможны $[n/2]$ (здесь [...] — целая часть) вариантов вида (6.2.1), (6.2.2) (или (6.2.3), (6.2.4)). Так, например, для шестимерного тела возможны три случая — (1—5), (2—4), (3—3).

Для случая n-мерного твердого тела нас будет *прежде всего* интересовать случай $(1\text{—}(n-1))$, т.е. когда в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1\ldots x_n$ оператор инерции имеет вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, \underbrace{I_2, \ldots, I_2}_{n-1}\}, \tag{6.2.5}$$

а именно, в гиперплоскости $Dx_2\ldots x_n$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии).

6.2.2. Динамика на $\mathbf{so}(n)$ и $\mathbb{R}^n$. Конфигурационным пространством свободного n-мерного твердого тела является прямое произведение пространства $\mathbb{R}^n$ (определяющего координаты центра масс тела) на связную группу его вращений $\mathrm{SO}(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс)

$$\mathbb{R}^n \times \mathrm{SO}(n) \tag{6.2.6}$$

и имеет размерность

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Соответственно, размерность фазового пространства равна

$$n(n+1).$$

В частности, если Ω — тензор угловой скорости n-мерного твердого тела (а он является тензором второго ранга [52]), $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли* $\mathrm{so}(n)$, имеет следующий вид [61, 197]:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{6.2.7}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{6.2.8}$$
$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{2},\ \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + \ldots + I_n}{2}, \ldots,$$
$$\lambda_{n-1} = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-2} - I_{n-1} + I_n}{2},\ \lambda_n = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n}{2},$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbb{R}^n$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, $[.,.]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(n)$. Так, например, кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга) $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ будем представлять в виде (см. также [14, 38, 58, 83, 210])

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.2.9}$$

где $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{10}$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$.

При этом, очевидно, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i \tag{6.2.10}$$

для любых $i, j = 1, \ldots, n$.

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{so}(n), \tag{6.2.11}$$

переводящее пару векторов

$$(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \tag{6.2.12}$$

из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$, где

$$\mathbf{DN} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\},\ \mathbf{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}, \tag{6.2.13}$$

$\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (здесь $\mathbf{DN}$ — вектор, идущий из начала D координат системы $Dx_1 \ldots x_n$ в точку N приложения силы). При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_n \\ F_1 & F_2 & \ldots & F_n \end{pmatrix}. \tag{6.2.14}$$

Всевозможные миноры второго порядка (а их в точности $n(n-1)/2$ штук) со знаком данной матрицы — это и есть координаты момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$, а сам момент отождествляется с некоторым элементом алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$.

Поскольку введена упорядоченность координат $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_f, f = 1, \ldots, n(n-1)/2$, на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, то введем такую же упорядоченность и для вычисления момента $M_F = (\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$. Действительно, первая группа G_1 координат искомого момента состоит из $n-1$ знакочередующихся миноров

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-1} & \delta_n \\ F_{n-1} & F_n \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_n \\ F_{n-2} & F_n \end{vmatrix},\ +\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_n \\ F_{n-3} & F_n \end{vmatrix},\ \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_n \\ F_1 & F_n \end{vmatrix}.$$

Вторая группа G_2 координат состоит из $n-2$ знакочередующихся миноров

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_{n-1} \\ F_{n-2} & F_{n-1} \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_{n-1} \\ F_{n-3} & F_{n-1} \end{vmatrix},\ +\begin{vmatrix} \delta_{n-4} & \delta_{n-1} \\ F_{n-4} & F_{n-1} \end{vmatrix},\ \ldots, (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_{n-1} \\ F_1 & F_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Продолжая далее, заключительная группа G_{n-1} координат состоит из одного минора

$$+\begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}.$$

Как видно, первые миноры в любой группе начинаются со знака “+”.

Полученное упорядоченное множество из $n(n-1)/2$ величин будем называть *координатами момента* $(\mathbf{DN},\mathbf{F})$ *силы* $\mathbf{F}$.

Исследуемые в дальнейшем динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним [160, 166]. При этом нам потребуется практически “в лоб” исследовать часть основного уравнения динамики, а именно, в данном случае уравнение Ньютона. Здесь оно предстает перед нами как уравнение движения центра масс — *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству* $\mathbb{R}^n$:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{6.2.15}$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс C тела, m — его масса, при этом по многомерной формуле Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC},\ \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D,\ E = \dot{\Omega}, \tag{6.2.16}$$

здесь $\mathbf{w}_D$ — ускорение точки D, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело, E — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Если положение тела Θ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ определяется функциями, которые являются в следующем смысле циклическими, т.е. обобщенная сила $\mathbf{F}$ и ее момент $M_F = (\mathbf{DN},\mathbf{F})$ зависят лишь от обобщенных скоростей (квазискоростей, и не зависят от положения тела в пространстве), то система уравнений (6.2.7), (6.2.15) на многообразии $\mathbb{R}^n \times \mathrm{so}(n)$ определяет *замкнутую* систему динамических уравнений движения свободного n-мерного твердого тела под действием внешней силы $\mathbf{F}$. Данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (6.2.6) и может быть исследована самостоятельно.

В частности, правая часть системы (6.2.7) при $n = 5$ примет вид

$$M = \{M_1, M_2, \ldots, M_{10}\} =$$

$$\begin{gathered} = \{\delta_4F_5 - \delta_5F_4, \delta_5F_3 - \delta_3F_5, \delta_2F_5 - \delta_5F_2, \delta_5F_1 - \delta_1F_5, \delta_3F_4 - \delta_4F_3, \\ \delta_4F_2 - \delta_2F_4, \delta_1F_4 - \delta_4F_1, \delta_2F_3 - \delta_3F_2, \delta_3F_1 - \delta_1F_3, \delta_1F_2 - \delta_2F_1\}, \end{gathered} \tag{6.2.17}$$

где $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{10}$ — компоненты тензора момента внешней силы в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -M_{10} & M_9 & -M_7 & M_4 \\ M_{10} & 0 & -M_8 & M_6 & -M_3 \\ -M_9 & M_8 & 0 & -M_5 & M_2 \\ M_7 & -M_6 & M_5 & 0 & -M_1 \\ -M_4 & M_3 & -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.2.18}$$

6.3. Группа динамических уравнений на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$

В нашем случае закрепленного маятника реализуется случай (6.2.5). Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$:

$$
\begin{aligned}
&(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_1=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1-1}=0,\\
&(n-2)I_2\dot\omega_{r_1}+(-1)^{n+1}(I_1-I_2)W_{n-1}(\Omega)=(-1)^n x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
&(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1+1}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2-1}=0,\\
&(n-2)I_2\dot\omega_{r_2}+(-1)^{n}(I_1-I_2)W_{n-2}(\Omega)=(-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
&(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2+1}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_{n-2}-1}=0,\\
&(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-2}}+(I_1-I_2)W_2(\Omega)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
&(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-1}}+(I_2-I_1)W_1(\Omega)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{aligned}
\tag{6.3.1}
$$

при этом $r_{n-2}+1=r_{n-1}$, а функции $W_t(\Omega)$, $t=1,\dots,n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1,\dots,\omega_f$, $f=n(n-1)/2$, тензора Ω, причем

$$W_t(\Omega)|_{\omega_{k_1}=\ldots=\omega_{k_s}=0}=0,\ s=(n-1)(n-2)/2,\ k_j\neq r_i,\ j=1,\dots,s,\ i=1,\dots,n-1. \tag{6.3.2}$$

Поясним формулу (6.3.2). Всего компонент у тензора $\Omega\in\mathrm{so}(n)$ имеется

$$f=n(n-1)/2$$

штук. Соответственно, компонент у момента силы $M_F=(\mathbf{DN},\mathbf{F})$ столько же. Поскольку вспомогательная матрица (6.2.14) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \dots & x_{nN}\\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}, \tag{6.3.3}$$

в правой части системы (6.3.1)

$$s=(n-1)(n-2)/2$$

уравнений содержат тождественный нуль. Эти номера уравнений мы обозначим через

$$k_1,\dots,k_s.$$

При этом соответствующие компоненты $\omega_{k_j}, j=1,\dots,s$, тензора Ω угловой скорости будем называть *циклическими.*

Оставшиеся номера уравнений, в которых стоят следующие величины со знаком

$$x_{lN}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\ l=2,\dots,n,$$

мы обозначаем через

$$r_1,\dots,r_{n-1},$$

поскольку

$$f-s=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=n-1.$$

Очевидно, что

$$W_t(0)\equiv0$$

для любых $t=1,\ldots,n-1$, т.е. квадратичные формы $W_t(\Omega)$ обращаются в нуль, когда все компоненты тензора Ω нулевые. Так вот формула (6.3.2) означает, что для обращения в нуль квадратичных форм $W_t(\Omega)$, $t=1,\ldots,n-1$, достаточно, чтобы все циклические компоненты тензора Ω были нулевые.

В частности, в случае $n=5$ данная система примет вид:

$$
\begin{aligned}
&(I_1+2I_2)\dot\omega_1=0,\\
&(I_1+2I_2)\dot\omega_2=0,\\
&(I_1+2I_2)\dot\omega_3=0,\\
&3I_2\dot\omega_4+(I_1-I_2)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
&(I_1+2I_2)\dot\omega_5=0,\\
&(I_1+2I_2)\dot\omega_6=0,\\
&3I_2\dot\omega_7+(I_2-I_1)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9)=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
&(I_1+2I_2)\dot\omega_8=0,\\
&3I_2\dot\omega_9+(I_1-I_2)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
&3I_2\dot\omega_{10}+(I_2-I_1)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{aligned}
\tag{6.3.4}
$$

поскольку момент силы воздействия среды при $n=5$ определяется через следующую вспомогательную матрицу:

$$
\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N}\\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{6.3.5}
$$

где

$$\{-s(\alpha)v_D^2,0,0,0,0\}$$

— разложение силы $\mathbf{S}$ воздействия среды в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$. При этом

$$r_1=4,\ r_2=7,\ r_3=9,\ r_4=10.$$

Поскольку размерность алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$ равна $f=n(n-1)/2$, система уравнений (6.3.1) и составляет группу динамических уравнений на $\mathrm{so}(n)$.

Видно, что в правую часть системы уравнений (6.3.1) входят, прежде всего, углы $\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}$, поэтому данная система уравнений не является замкнутой. Для того, чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическим уравнениям на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$ присоединить несколько групп кинематических уравнений.

6.3.1. Циклические первые интегралы. Сразу же заметим, что система (6.3.1), полученная из (6.2.7) в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2=\ldots=I_n, \tag{6.3.6}$$

обладает $s=(n-1)(n-2)/2$ циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1}\equiv\omega_{k_1}^0=\mathrm{const},\ \ldots,\ \omega_{k_s}\equiv\omega_{k_s}^0=\mathrm{const},\ s=\frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{6.3.7}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0=\ldots=\omega_{k_s}^0=0. \tag{6.3.8}$$

В частности, система (6.3.4) обладает первыми интегралами

$$\omega_1\equiv\omega_1^0,\ \omega_2\equiv\omega_2^0,\ \omega_3\equiv\omega_3^0,\ \omega_5\equiv\omega_5^0,\ \omega_6\equiv\omega_6^0,\ \omega_8\equiv\omega_8^0, \tag{6.3.9}$$

рассматриваемых на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0=\omega_2^0=\omega_3^0=\omega_5^0=\omega_6^0=\omega_8^0=0. \tag{6.3.10}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = f - s = n-1$ штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества $Q_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

При условиях (6.3.6)–(6.3.8) система (6.3.1) примет вид незамкнутой системы $n-1$ уравнений:

$$
\begin{gathered}
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_1} = (-1)^n x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_2} = (-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-2}} = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2, \\
(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-1}} = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2.
\end{gathered} \tag{6.3.11}
$$

В частности, при условиях (6.3.9)–(6.3.10) система (6.3.4) примет вид незамкнутой системы четырех уравнений:

$$
\begin{gathered}
3I_2\dot{\omega}_4 = -x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2, \\
3I_2\dot{\omega}_7 = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2, \\
3I_2\dot{\omega}_9 = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2, \\
3I_2\dot{\omega}_{10} = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2.
\end{gathered} \tag{6.3.12}
$$

6.4. Первая группа кинематических уравнений

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки D (центра диска $\mathcal{D}^{n-1}$) и набегающего потока:

$$
\mathbf{v}_D = v_D \cdot \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \tilde{\Omega}\begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty)\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{6.4.1}
$$

где

$$
\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{6.4.2}
$$

Равенство (6.4.1) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат $Dx_1 \ldots x_n$.

Действительно, в левой части равенства (6.4.1) стоит скорость точки D маятника относительно потока в проекциях на связанную с маятником систему координат $Dx_1 \ldots x_n$. При этом вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — единичный вектор вдоль оси вектора $\mathbf{v}_D$. Вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ имеет (обобщенные) сферические координаты $(1, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, определяющие разложение (6.4.2).

В правой части равенства (6.4.1) стоит сумма скоростей точки D при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора $\mathbf{OD} = \{l, 0, \ldots, 0\}$ в системе координат $Dx_1 \ldots x_n$.

На втором слагаемом правой части равенства (6.4.1) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора $(-\mathbf{v}_\infty) = \{-v_\infty, 0, \ldots, 0\}$ в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат $Dx_1 \ldots x_n$ необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол $(-\xi)$, что алгебраически эквивалентно умножению величины $(-v_\infty)$ на вектор $\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})$.

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (6.4.1) в нашем случае примет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&v_D \cos\alpha = -v_\infty \cos\xi,\\
&v_D \sin\alpha\cos\beta_1 = l\omega_{r_{n-1}} + v_\infty \sin\xi\cos\eta_1,\\
&v_D \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 = -l\omega_{r_{n-2}} + v_\infty \sin\xi\sin\eta_1\cos\eta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&v_D \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} = (-1)^{n+1} l\omega_{r_2} + v_\infty \sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-2},\\
&v_D \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} = (-1)^n l\omega_{r_1} + v_\infty \sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-2}.
\end{aligned}
\tag{6.4.3}
$$

В частности, в случае $n = 5$ данная группа уравнений примет вид:

$$
\begin{aligned}
&v_D \cos\alpha = -v_\infty \cos\xi,\\
&v_D \sin\alpha\cos\beta_1 = l\omega_{10} + v_\infty \sin\xi\cos\eta_1,\\
&v_D \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 = -l\omega_9 + v_\infty \sin\xi\sin\eta_1\cos\eta_2,\\
&v_D \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 = l\omega_7 + v_\infty \sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3,\\
&v_D \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 = -l\omega_4 + v_\infty \sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3.
\end{aligned}
\tag{6.4.4}
$$

6.5. Вторая группа кинематических уравнений

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости Ω и координаты $\dot\xi, \dot\eta_1, \ldots, \dot\eta_{n-2}, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$ фазового пространства (6.1.5) исследуемого маятника — касательного расслоения $T_*\mathbb{S}^n\{\dot\xi, \dot\eta_1, \ldots, \dot\eta_{n-2}; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$.

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$, сначала выражается набор, состоящий из фазовых переменных $\omega_{r_1}, \omega_{r_2}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$, через новые переменные $z_1, \ldots, z_{n-1}$ (из набора z). Для этого производится следующая композиция поворотов на углы $\eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$:

$$
\begin{pmatrix} \omega_{r_1}\\ \omega_{r_2}\\ \cdots\\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\eta_{n-3}) \circ \ldots \circ T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \cdots\\ z_{n-1} \end{pmatrix},
\tag{6.5.1}
$$

где матрица $T_{k,k+1}(\eta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$
T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
\tag{6.5.2}
$$

$$
M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1}\\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix},\ m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\eta,\ m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\eta.
$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\eta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\eta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\eta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}. \tag{6.5.3}$$

В частности, при $n = 5$ преобразуются величины $\omega_4, \omega_7, \omega_9, \omega_{10}$ посредством композиции следующих трех поворотов:

$$\begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_3) \circ T_{2,3}(\eta_2) \circ T_{3,4}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \tag{6.5.4}$$

где

$$T_{3,4}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\eta & -\sin\eta \\ 0 & 0 & \sin\eta & \cos\eta \end{pmatrix},$$

$$T_{2,3}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\eta & -\sin\eta & 0 \\ 0 & \sin\eta & \cos\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{1,2}(\eta) = \begin{pmatrix} \cos\eta & -\sin\eta & 0 & 0 \\ \sin\eta & \cos\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = T_{3,4}(-\eta_1) \circ T_{2,3}(-\eta_2) \circ T_{1,2}(-\eta_3) \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix}, \tag{6.5.5}$$

т.е.

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_4 \cos\eta_3 + \omega_7 \sin\eta_3, \\ z_2 &= (\omega_7 \cos\eta_3 - \omega_4 \sin\eta_3)\cos\eta_2 + \omega_9 \sin\eta_2, \\ z_3 &= [(-\omega_7 \cos\eta_3 + \omega_4 \sin\eta_3)\sin\eta_2 + \omega_9 \cos\eta_2]\cos\eta_1 + \omega_{10}\sin\eta_1, \\ z_4 &= [(\omega_7 \cos\eta_3 - \omega_4 \sin\eta_3)\sin\eta_2 - \omega_9 \cos\eta_2]\sin\eta_1 + \omega_{10}\cos\eta_1. \end{aligned} \tag{6.5.6}$$

Затем вместо группы переменных z подставляется следующая зависимость:

$$\begin{aligned} z_{n-1} &= \dot{\xi}, \\ z_{n-2} &= -\dot{\eta}_1 \frac{\sin\xi}{\cos\xi}, \\ z_{n-3} &= \dot{\eta}_2 \frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_2 &= (-1)^{n+1}\dot{\eta}_{n-3}\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-4}, \\ z_1 &= (-1)^{n}\dot{\eta}_{n-2}\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3}. \end{aligned} \tag{6.5.7}$$

В частности, при $n=5$ имеем следующие формулы:

$$
\begin{aligned}
z_4 &= \dot{\xi},\\
z_3 &= -\dot{\eta}_1 \frac{\sin\xi}{\cos\xi},\\
z_2 &= \dot{\eta}_2 \frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1,\\
z_1 &= -\dot{\eta}_3 \frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2.
\end{aligned}
\tag{6.5.8}
$$

Таким образом, две группы уравнений (6.5.1) и (6.5.7) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \cdots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = \\
= T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\eta_{n-3}) \circ \ldots \circ \\
\circ T_{n-3,n-2}(\eta_2) T_{n-2,n-1}(\eta_1)
\begin{pmatrix}
(-1)^n \dot{\eta}_{n-2} \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3} \\
(-1)^{n+1} \dot{\eta}_{n-3} \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-4} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{\eta}_2 \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1 \\
-\dot{\eta}_1 \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \\
\dot{\xi}
\end{pmatrix}.
\end{gathered}
\tag{6.5.9}
$$

В частности, при $n=5$ имеем:

$$
\begin{aligned}
&\omega_4 = -\dot{\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3 - \dot{\eta}_1\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3 - \\
&-\dot{\eta}_2\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\cos\eta_2\sin\eta_3 - \dot{\eta}_3\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3,\\
&\omega_7 = \dot{\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3 + \dot{\eta}_1\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3 + \\
&+\dot{\eta}_2\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\cos\eta_2\cos\eta_3 - \dot{\eta}_3\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3,\\
&\omega_9 = -\dot{\xi}\sin\eta_1\cos\eta_2 - \dot{\eta}_1\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\cos\eta_2 + \dot{\eta}_2\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2,\\
&\omega_{10} = \dot{\xi}\cos\eta_1 - \dot{\eta}_1\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1.
\end{aligned}
\tag{6.5.10}
$$

Видно, что три группы соотношений (6.3.11), (6.4.3), (6.5.9) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят следующие функции:

$$
x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v_D}\right),\ \ldots,\ x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v_D}\right),\ s(\alpha).
\tag{6.5.11}
$$

При этом функция s считается зависимой лишь от α, а функции $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ могут зависеть, наряду с углами α, β_1, $\ldots$, β_{n-2}, вообще говоря, и от приведенного тензора угловой скорости $l\Omega/v_D$.

6.6. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы

Параллельно рассматриваемой задаче о движении закрепленного тела, рассмотрим пространственное движение свободного динамически симметричного (случай (6.2.5)) n-мерного твердого тела с передним торцом (круговым $(n-1)$-мерным диском $\mathcal{D}^{n-1}$) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [59, 105] с той же моделью воздействия среды.

Если $(v, \alpha, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости центра D диска $\mathcal{D}^{n-1}$, лежащего на оси симметрии тела, Ω — тензор угловой скорости тела (для случая $n = 5$ см. (6.1.6)) в системе координат $Dx_1 \ldots x_n$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, Dx_3, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1,\ I_2,\ I_3 = I_2,\ \ldots,\ I_n = I_2,\ m$ — инерционно-массовые характеристики, то может быть получена динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha\cos\beta_1 \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix} + \Omega\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha\cos\beta_1 \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix} +$$

$$+\Omega^2\begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} + \dot{\Omega}\begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1/m \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix},$$

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1-1} = 0,$$
$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_1} + (-1)^{n+1}(I_1 - I_2)W_{n-1}(\Omega) = (-1)^n x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{6.6.1}$$
$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1+1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2-1} = 0,$$
$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_2} + (-1)^n(I_1 - I_2)W_{n-2}(\Omega) = (-1)^{n-1}x_{n-1,N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$
$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2+1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_{n-2}-1} = 0,$$
$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-2}} + (I_1 - I_2)W_2(\Omega) = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$
$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-1}} + (I_2 - I_1)W_1(\Omega) = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

где

$$F_1 = -S,\ S = s(\alpha)v^2,\ \sigma = CD, \tag{6.6.2}$$

при этом

$$\left(0, x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right), \ldots, x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\right) \tag{6.6.3}$$

— координаты точки N приложения силы $\mathbf{S}$ в системе координат $Dx_1x_2\ldots x_n$, связанной с телом, $r_{n-2} + 1 = r_{n-1}$, а функции $W_t(\Omega)$, $t = 1, \ldots, n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1, \ldots, \omega_f$, $f = n(n-1)/2$, тензора Ω, причем выполнены свойства (6.3.2).

Так, например, в случае $n = 5$ данная система примет вид:

$$\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha - \omega_{10}v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_9 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 -$$
$$-\omega_7 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_4 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 +$$

$$
\begin{gathered}
+\sigma(\omega_{10}^2+\omega_9^2+\omega_7^2+\omega_4^2)=\frac{F_1}{m},\\
\dot v\sin\alpha\cos\beta_1+\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1-\dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1+\\
+\omega_{10}v\cos\alpha-\omega_8 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\omega_6 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\\
-\omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3-\sigma(\omega_9\omega_8+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)-\sigma\dot\omega_{10}=0,\\
\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2-\\
-\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2-\omega_9 v\cos\alpha+\omega_8 v\sin\alpha\cos\beta_1-\omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\\
+\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3-\sigma(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)+\sigma\dot\omega_9=0,\\
\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\\
+\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3-\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\omega_7 v\cos\alpha-\omega_6 v\sin\alpha\cos\beta_1+\\
+\omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-\omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\sigma(\omega_6\omega_{10}+\omega_5\omega_9-\omega_1\omega_4)-\sigma\dot\omega_7=0,\\
\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\\
+\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3+\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\omega_4 v\cos\alpha+\omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1-\\
-\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\sigma(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)+\sigma\dot\omega_4=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_1=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_2=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_3=0,\\
3I_2\dot\omega_4+(I_1-I_2)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_5=0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_6=0,\\
3I_2\dot\omega_7+(I_2-I_1)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9)=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_8=0,\\
3I_2\dot\omega_9+(I_1-I_2)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
3I_2\dot\omega_{10}+(I_2-I_1)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2.
\end{gathered}
\tag{6.6.4}
$$

Первая группа уравнений системы (6.6.1) описывают движение центра масс в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ в проекциях на систему координат $Dx_1\ldots x_n$. Вторая же группа уравнений системы (6.6.1) получены из (6.2.7). В частности, первые пять уравнений системы (6.6.4) описывают движение центра масс в пятимерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^5$ в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$. Вторые же десять уравнений системы (6.6.4) также получены из (6.2.7) при $n=5$.

Таким образом, фазовым пространством системы динамических уравнений (6.6.1) порядка $n(n+1)/2$ является прямое произведение

$$\mathbb{R}^1\times\mathbb{S}^{n-1}\times\mathrm{so}(n) \tag{6.6.5}$$

n-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(n)$. При этом, поскольку сила воздействия среды не зависит от положения тела в пространстве, система динамических уравнений (6.6.1) *отделяется от системы кинематических уравнений* и может быть рассмотрена самостоятельно (см. также [197]). В частности, фазовым пространством системы динамических уравнений (6.6.4) пятнадцатого порядка является прямое произведение

$$\mathbb{R}^1\times\mathbb{S}^4\times\mathrm{so}(5) \tag{6.6.6}$$

пятимерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(5)$.

6.6.1. Циклические первые интегралы. Сразу же заметим, что система (6.6.1), частично полученная из (6.2.7), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \ldots = I_n, \tag{6.6.7}$$

обладает $s = (n-1)(n-2)/2$ циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \text{const},\ \ldots,\ \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \text{const},\ s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{6.6.8}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = \ldots = \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{6.6.9}$$

В частности, система (6.6.4) обладает первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0,\ \omega_2 \equiv \omega_2^0,\ \omega_3 \equiv \omega_3^0,\ \omega_5 \equiv \omega_5^0,\ \omega_6 \equiv \omega_6^0,\ \omega_8 \equiv \omega_8^0, \tag{6.6.10}$$

рассматриваемых на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0. \tag{6.6.11}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = f - s = n-1$ штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества $Q_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

6.6.2. Неинтегрируемая связь. Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [197])

$$v \equiv \text{const}, \tag{6.6.12}$$

то в системе (6.6.1) вместо F_1 будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2. \tag{6.6.13}$$

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (6.6.12) [197]. Действительно, формально выражая величину T в силу системы (6.6.1), получим при $\cos\alpha \neq 0,\ n > 2$:

$$\begin{gathered} T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = m\sigma(\omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_p}^2) + \\ + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma}{(n-2)I_2} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \end{gathered} \tag{6.6.14}$$

где

$$\begin{gathered} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})) = \\ = 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}). \end{gathered} \tag{6.6.15}$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),\ s = 1, \ldots, n,\ (i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbb{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ (заданной равенством (6.6.12)), а именно:

$$\begin{gathered} \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ i_{2N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{3N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ \ldots \\ i_{n-1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{nN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} \cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right) \end{gathered} \tag{6.6.16}$$

(см. (6.4.2)).

6.6.2.1. Редукции в системе. На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (6.6.12). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (6.6.1) в результате действий порождает независимую систему порядка

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = 2(n-1)$$

следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v\sin\alpha\cos\beta_1 \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \dots\dots\dots \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix} + \Omega^{(1)}\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha\cos\beta_1 \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \dots\dots\dots \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}\end{pmatrix} +$$

$$+\Omega^{(2)}\begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} + \dot{\Omega}^{(1)}\begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix},$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_1} = (-1)^n x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{6.6.17}$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_2} = (-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-2}} = -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-1}} = x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v, при этом матрицы $\Omega^{(1)},\Omega^{(2)}$ размера $(n-1)\times n$ получаются из матриц

$$\Omega, \Omega^2,$$

соответственно, удалением первой строки.

В частности, при $n=5$ система (6.6.4) в результате действий порождает независимую систему восьмого порядка следующего вида:

$$\dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \omega_{10}v\cos\alpha - \sigma\dot{\omega}_{10} = 0,$$

$$\dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 -$$
$$-\dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \sigma\dot{\omega}_9 = 0,$$

$$\dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3 -$$
$$-\dot{\beta}_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \omega_7 v\cos\alpha - \sigma\dot{\omega}_7 = 0,$$

$$\dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + \tag{6.6.18}$$
$$+\dot{\beta}_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \omega_4 v\cos\alpha + \sigma\dot{\omega}_4 = 0,$$

$$3I_2\dot{\omega}_4 = -x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

$$3I_2\dot{\omega}_7 = x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

$$3I_2\dot{\omega}_9 = -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,$$

$$3I_2\dot{\omega}_{10} = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2,$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v.

Система (6.6.17) эквивалентна системе

$$\begin{gathered}
\dot{\alpha} v \cos\alpha + \ldots = 0, \\
\dot{\beta}_1 v \sin\alpha + \ldots = 0, \\
\dot{\beta}_2 v \sin\alpha \sin\beta_1 + \ldots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{\beta}_{n-3} v \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-4} + \ldots = 0, \\
\dot{\beta}_{n-2} v \sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} + \ldots = 0, \\
\dot{\omega}_{r_1} = (-1)^n \frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\dot{\omega}_{r_2} = (-1)^{n-1} \frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{n-1,N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{\omega}_{r_{n-2}} = -\frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\dot{\omega}_{r_{n-1}} = \frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha).
\end{gathered} \tag{6.6.19}$$

В частности, система (6.6.18) эквивалентна системе

$$\begin{gathered}
\dot{\alpha} v \cos\alpha + v\cos\alpha\left\{\omega_{10}\cos\beta_1 + \left[(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2\right]\sin\beta_1\right\} + \\
+\sigma\left\{-\dot{\omega}_{10}\cos\beta_1 + \left[\dot{\omega}_9\cos\beta_2 - (\dot{\omega}_7\cos\beta_3 - \dot{\omega}_4\sin\beta_3)\sin\beta_2\right]\sin\beta_1\right\} = 0, \\
\dot{\beta}_1 v \sin\alpha + v\cos\alpha\left\{\left[(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2\right]\cos\beta_1 - \omega_{10}\sin\beta_1\right\} + \\
+\sigma\left\{\left[\dot{\omega}_9\cos\beta_2 - (\dot{\omega}_7\cos\beta_3 - \dot{\omega}_4\sin\beta_3)\sin\beta_2\right]\cos\beta_1 + \dot{\omega}_{10}\sin\beta_1\right\} = 0, \\
\dot{\beta}_2 v \sin\alpha\sin\beta_1 + v\cos\alpha\left\{\left[\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3\right]\cos\beta_2 + \omega_9\sin\beta_2\right\} + \\
+\sigma\left\{-\left[\dot{\omega}_7\cos\beta_3 - \dot{\omega}_4\sin\beta_3\right]\cos\beta_2 - \dot{\omega}_9\sin\beta_2\right\} = 0, \\
\dot{\beta}_3 v \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + v\cos\alpha\left\{-\omega_4\cos\beta_3 - \omega_7\sin\beta_3\right\} + \\
+\sigma\left\{\dot{\omega}_4\cos\beta_3 + \dot{\omega}_7\sin\beta_3\right\} = 0, \\
\dot{\omega}_4 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\dot{\omega}_7 = \frac{v^2}{3I_2} x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\dot{\omega}_9 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \\
\dot{\omega}_{10} = \frac{v^2}{3I_2} x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha).
\end{gathered} \tag{6.6.20}$$

6.6.2.2. Новые квазискорости в системе. Введем новые квазискорости в системе:

$$\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\beta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\beta_{n-3}) \circ \ldots \circ T_{n-2,n-1}(\beta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{6.6.21}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta),\ k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.6.22}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix},\ m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\beta,\ m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\beta.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}. \tag{6.6.23}$$

В частности, при $n = 5$ преобразуются величины $\omega_4, \omega_7, \omega_9, \omega_{10}$ посредством композиции следующих трех поворотов:

$$\begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\beta_3) \circ T_{2,3}(\beta_2) \circ T_{3,4}(\beta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \tag{6.6.24}$$

где

$$T_{3,4}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

$$T_{2,3}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{1,2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = T_{3,4}(-\beta_1) \circ T_{2,3}(-\beta_2) \circ T_{1,2}(-\beta_3) \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix}, \tag{6.6.25}$$

т.е.

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_4 \cos\beta_3 + \omega_7 \sin\beta_3, \\ z_2 &= (\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3)\cos\beta_2 + \omega_9 \sin\beta_2, \\ z_3 &= [(-\omega_7 \cos\beta_3 + \omega_4 \sin\beta_3)\sin\beta_2 + \omega_9 \cos\beta_2]\cos\beta_1 + \omega_{10}\sin\beta_1, \\ z_4 &= [(\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9 \cos\beta_2]\sin\beta_1 + \omega_{10}\cos\beta_1. \end{aligned} \tag{6.6.26}$$

6.6.2.3. Системы нормального вида. Как видно из (6.6.20), на многообразии

$$O_1 = \left\{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \omega_4, \omega_7, \omega_9, \omega_{10}) \in \mathbb{R}^8 : \ \alpha = \frac{\pi}{2}k, \ \beta_1 = \pi l, \ \beta_2 = \pi m, \ k, l, m \in \mathbb{Z}\right\} \tag{6.6.27}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot\alpha$, $\dot\beta_1$, $\dot\beta_2$, $\dot\beta_3$. Формально, таким образом, на многообразии (6.6.27) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном и любых l, m неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение системы (6.6.20) вырождается.

Из этого следует, что система (6.6.18) вне и только вне многообразия (6.6.27) эквивалентна системе

$$\begin{gathered}
\dot\alpha = -z_4 + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot z_4 = \frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +\\
+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{-z_3\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) +\\
+z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) - z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\},\\
\dot z_3 = z_3 z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +\\
+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{z_4\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) - z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +\\
+z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\} -\\
-\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot z_2 = z_2 z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +\\
+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_4 + z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\} +\\
+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\} +\\
+\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot z_1 = z_1 z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +\\
+\frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\left\{z_4 - z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\} -\\
-\frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Delta_{v,3}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot\beta_1 = z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot\beta_2 = -z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot\beta_3 = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right),
\end{gathered} \tag{6.6.28}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) &= (\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\beta_3\right)),\\ \Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) &= (\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3\right)),\\ \Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) &= (\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\beta_3+\frac{\pi}{2}\right)),\end{aligned} \tag{6.6.29}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ представляется в виде (6.6.15).

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,z_1/v,z_2/v,z_3/v,z_4/v)$ в силу (6.6.26).

В общем случае, на многообразии

$$\begin{gathered}O_1=\{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_{n-1}})\in\mathbb{R}^{2(n-1)}:\\ \alpha=\frac{\pi}{2}k,\ \beta_1=\pi l_1,\ldots,\beta_{n-3}=\pi l_{n-3},\ k,l_1,\ldots,l_{n-3}\in\mathbb{Z}\}\end{gathered} \tag{6.6.30}$$

нельзя однозначно разрешить систему (6.6.19) относительно $\dot\alpha$, $\dot\beta_1$, $\ldots$, $\dot\beta_{n-2}$. Формально, таким образом, на многообразии (6.6.30) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном и любых $l_1,\ldots,l_{n-3}$ неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})$, а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение системы (6.6.19) вырождается.

Из этого следует, что система (6.6.17) вне и только вне многообразия (6.6.30) может быть приведена к следующему виду ($n>2$):

$$\begin{aligned}
\dot\alpha &= -z_{n-1}+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot z_{n-1} &= \frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)-(z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\
&+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^s z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\right\},\\
\dot z_{n-2} &= z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+(z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\\
&+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{z_{n-1}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)+\right.\\
&\left.+\sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}-\\
&-\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),\\
\dot z_{n-3} &= z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-(z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+\\
&+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\left[-z_{n-1}+z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\\
&+\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^s z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\}+\\
&+\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),
\end{aligned} \tag{6.6.31}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot z_1=\dot\beta_{n-2}(-\omega_{r_1}\sin\beta_{n-2}+\omega_{r_2}\cos\beta_{n-2})+(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$

$$= z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$

$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^s z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$

$$+(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\dot\beta_2 = -z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot\beta_{n-2} = (-1)^{n+1}z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}+$$

$$+\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right),$$

где

$$\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = (\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\ldots,\beta_{n-2}\right)),$$

$$\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = (\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3,\ldots,\beta_{n-2}\right)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{6.6.32}$$

$$\Delta_{v,n-3}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = (\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-3}+\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}\right)),$$

$$\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) = (\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}+\frac{\pi}{2}\right)),$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ представляется в виде (6.6.15).

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ в силу (6.6.23), при этом $(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N)$ — евклидово скалярное произведение.

6.6.2.4. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (6.6.31) после общего множителя

$$\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$, $s=1,\ldots,n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, во втором уравнении системы (6.6.31) (с левой частью $\dot z_{n-1}$) функции (6.6.32) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2. \tag{6.6.33}$$

А вот далее, в следующие уравнения системы (6.6.31) появление набора функций (6.6.32) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для $\dot z_{n-2}$ по-прежнему входит набор функций (6.6.32) с индексами (6.6.33). А в уравнение для $\dot z_{n-3}$ входит уже набор с индексами

$$2\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2 \tag{6.6.34}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается следующей таблицей 1.

Так минор

(1)

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (6.6.32)

Левая часть системы (6.6.31)	Распределение индексов s набора функций (6.6.32)					
$\dot{z}_{n-2}$	1	2	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-3}$	2	2	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-4}$	3	3	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-5}$	4	4	4	4	...	$n-2$
...	...	...	...	...	...	...
$\dot{z}_1$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	...	$n-2$

первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n=3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (6.6.32) при $s=1$. Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n=4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (6.6.32) при $s=1,2$. Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n=5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (6.6.31) функций (6.6.32) при $s=1,2,3$ и т.д.

6.6.2.5. Нарушение теоремы единственности. Нарушение теоремы единственности для системы (6.6.19) на многообразии (6.6.30) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (6.6.30) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (6.6.19), пересекая многообразие (6.6.30) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (6.6.12) необходимо выбрать значение T при $\cos\alpha \neq 0$ в виде (6.6.14).

Пусть

$$\lim_{\alpha\to\pi/2} \frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = L\left(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right). \tag{6.6.35}$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha\to\pi/2} \left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)\right)\right| < +\infty. \tag{6.6.36}$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega\right) = m\sigma(\omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{n-1}^2) - \frac{m\sigma L v^2}{(n-2)I_2},\ n > 2, \tag{6.6.37}$$

где значения $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{n-1}$ — произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_0}, \tag{6.6.38}$$

где R_0 — расстояние CW.

Равенства (6.6.37) и (6.6.38) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (6.6.30), что и доказывает сделанное замечание.

6.6.3. Постоянная скорость центра масс. Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [197])

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const} \tag{6.6.39}$$

($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс), то в системе (6.6.1) вместо F_1 должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \tag{6.6.40}$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = s(\alpha)v^2, \ \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{6.6.41}$$

Случай (6.6.41) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка после некоторого преобразования системы (6.6.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) =$$
$$= \sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{n-1} \tau_{i,j}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\omega_{r_i}\omega_{r_j} = T_1\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)v^2, \ \omega_0 = v. \tag{6.6.42}$$

Введем для начала новые квазискорости (6.6.21)–(6.6.23).

Систему (6.6.1) в случаях (6.6.7)–(6.6.9) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}
\dot v + \sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1} z_s^2\right)\cos\alpha - \sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \\
= \frac{T_1\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)v^2 - s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha, \\
\dot\alpha v + z_{n-1}v - \sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1} z_s^2\right)\sin\alpha - \sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \\
= \frac{s(\alpha)v^2 - T_1\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha, \\
\dot\beta_1\sin\alpha - z_{n-2}\cos\alpha - \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = 0. \\
\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1 + z_{n-3}\cos\alpha - \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot\beta_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} + (-1)^n z_1\cos\alpha - \\
- \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = 0, \\
\dot\omega_{r_1} = (-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \\
\dot\omega_{r_2} = (-1)^{n+1}\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{(n-1)N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot\omega_{r_{n-1}} = \frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha).
\end{gathered} \tag{6.6.43}$$

Здесь, как и ранее, введены функции (6.6.15), (6.6.32).

Зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ по-прежнему понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1/v, \ldots, z_{n-1}/v)$ в силу (6.6.23).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k,\ k = 1, \ldots, n-1,\ <\cdot>= n_1 v <'>,\ n_1 > 0,\ n_1 = \mathrm{const}, \tag{6.6.44}$$

система (6.6.43) приведется к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{6.6.45}$$

$$\begin{gathered}\alpha' = -Z_{n-1} + \sigma n_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right) \sin\alpha + \\ + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha) \cos\alpha \cdot \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - \\ - \frac{T_1\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - s(\alpha)}{m n_1} \sin\alpha,\end{gathered} \tag{6.6.46}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-1} = \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \left\{\sum_{s=1}^{n-2} (-1)^s Z_{n-1-s} \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right)\right\} - \\ - Z_{n-1} \cdot \Psi\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z\right),\end{gathered} \tag{6.6.47}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-2} = Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \times \\ \times \left\{Z_{n-1} \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) + \sum_{s=2}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-1-s} \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\} - \\ - \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - Z_{n-2} \cdot \Psi\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z\right),\end{gathered} \tag{6.6.48}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-3} = Z_{n-3} Z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3} Z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \{\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) \left[-Z_{n-1} + Z_{n-2} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right] + \\ + \sum_{s=3}^{n-2} (-1)^s Z_{n-1-s} \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\} + \\ + \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - Z_{n-3} \cdot \Psi\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z\right),\end{gathered} \tag{6.6.49}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{gathered}Z'_1 = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \left\{\sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}}\right\} + \\ + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} (-1)^{n+1} \Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) \left\{\sum_{s=2}^{n-1} (-1)^s Z_{n+1-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}}\right\} + \\ + (-1)^n \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right) - Z_1 \cdot \Psi\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z\right),\end{gathered} \tag{6.6.50}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z\right), \tag{6.6.51}$$

$$\beta_2' = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right), \tag{6.6.52}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1}Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}+$$

$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right), \tag{6.6.53}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha+$$

$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)+$$

$$+\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \tag{6.6.54}$$

Видно, что в системе (6.6.45)–(6.6.53) порядка $2(n-1)+1$ может быть выделена независимая подсистема (6.6.46)–(6.6.53) порядка $2(n-1)$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $2(n-1)$-мерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$.

В частности, при выполнении условия (6.6.41) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $\big(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\ z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v\big)$ (и, далее, от $\big(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},$ $n_1Z_1,\ldots,n_1Z_{n-1}\big)\big)$ в силу (6.6.23) и (6.6.44).

В частности, при $n=5$ система (6.6.45)–(6.6.53) примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z), \tag{6.6.55}$$

$$\alpha' = -Z_4 + \sigma n_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\sin\alpha+$$

$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_2,n_1Z\right)-$$

$$-\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\sin\alpha, \tag{6.6.56}$$

$$Z_4' = \frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right) - \left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+$$

$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{-Z_3\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)+Z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-$$

$$-Z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\} - Z_4\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{6.6.57}$$

$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2+Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$

$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{Z_4\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-\right.$$

$$\left.-\,Z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}-$$

$$-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right) - Z_3\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{6.6.58}$$

$$Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$

$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left[-Z_4+Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+$$

$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left[-Z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right]+$$
$$+\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_2\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{6.6.59}$$
$$Z_1'=Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)\left\{Z_4-Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}-$$
$$-\frac{s(\alpha)}{3I_2n_1^2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-Z_1\cdot\Psi\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z\right), \tag{6.6.60}$$
$$\beta_1'=Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{6.6.61}$$
$$\beta_2'=-Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{6.6.62}$$
$$\beta_3'=Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right), \tag{6.6.63}$$
где
$$\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z)=-\sigma n_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha+$$
$$+\frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)+$$
$$+\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z\right)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \tag{6.6.64}$$

При этом в системе (6.6.55)–(6.6.63) девятого порядка может быть выделена независимая подсистема (6.6.56)–(6.6.63) восьмого порядка, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем восьмимерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$.

В частности, при выполнении условия (6.6.41) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы восьмого порядка также возможен.

6.6.3.1. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (6.6.46)–(6.6.53) после общего множителя
$$\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$
величины $\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)$, $s=1,\ldots,n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, в уравнении (6.6.47) (с левой частью Z_{n-1}') функции (6.6.32) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.
$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2. \tag{6.6.65}$$
А вот далее, в уравнения (6.6.48)–(6.6.50) появление набора функций (6.6.32) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для Z_{n-2}' по-прежнему входит набор функций (6.6.32) с индексами (6.6.65). А в уравнение для Z_{n-3}' входит уже набор с индексами
$$2\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2 \tag{6.6.66}$$
т.е. функция $\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z\right)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается следующей таблицей 2.

Так минор
$$(1)$$

Таблица 2. Общее распределение индексов набора функций (6.6.32)

Левая часть системы (6.6.46)–(6.6.53)	Распределение индексов s набора функций (6.6.32)					
Z'_{n-2}	1	2	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-3}	2	2	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-4}	3	3	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-5}	4	4	4	4	...	$n-2$
...	...	...	...	...	...	...
Z'_1	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	...	$n-2$

первого порядка в левом верхнем углу таблицы 2 соответствует случаю $n=3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (6.6.32) (при $s=1$). Там же минор второго порядка
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
соответствует случаю $n=4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (6.6.32) (при $s=1,2$). Там же минор третьего порядка
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
соответствует случаю $n=5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (6.6.46)–(6.6.53) функций (6.6.32) (при $s=1,2,3$) и т.д.

6.7. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Выберем функцию $\mathbf{r}_N$ в следующем виде (диск $\mathcal{D}^{n-1}$ задается уравнением $x_{1N}\equiv 0$):
$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{6.7.1}$$
где
$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right) \tag{6.7.2}$$
(см. (6.4.2)).

В нашем случае
$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{6.7.3}$$

Таким образом, выполнены равенства
$$\begin{gathered} x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1,\ x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2,\ \ldots, \\ x_{n-1,N} = R(\alpha)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2},\ x_{nN} = R(\alpha)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}, \end{gathered} \tag{6.7.4}$$
убеждающие нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$).

Итак, для построения силового поля используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [10, 121, 122], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha,\ s(\alpha) = B\cos\alpha,\ A, B > 0. \tag{6.7.5}$$

6.7.1. Приведенные системы.

Теорема 6.7.1. *Совместные уравнения* (6.3.1), (6.4.3), (6.5.9) *при выполнении условий* (6.3.6)–(6.3.8), (6.7.1), (6.7.5) *редуцируются к динамической системе на касательном расслоении* (6.1.5) $(n-1)$*-мерной сферы* (6.1.4).

Действительно, если ввести безразмерные параметр и дифференцирование:

$$b_* = ln_0,\ n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2},\ <\cdot>= n_0 v_\infty <'>, \tag{6.7.6}$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
\xi'' + b_*\xi'\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \\
-\left[\eta_1'^2 + \eta_2'^2\sin^2\eta_1 + \eta_3'^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 + \ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\
\eta_1'' + b_*\eta_1'\cos\xi + \xi'\eta_1'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \\
-\left[\eta_2'^2 + \eta_3'^2\sin^2\eta_2 + \eta_4'^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 + \ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\
\eta_2'' + b_*\eta_2'\cos\xi + \xi'\eta_2'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\eta_1'\eta_2'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \\
-\left[\eta_3'^2 + \eta_4'^2\sin^2\eta_3 + \eta_5'^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\
\eta_3'' + b_*\eta_3'\cos\xi + \xi'\eta_3'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\eta_1'\eta_3'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\eta_2'\eta_3'\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - \\
-\left[\eta_4'^2 + \eta_5'^2\sin^2\eta_4 + \eta_6'^2\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5 + \ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_4\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_3\cos\eta_3 = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_{n-4}'' + b_*\eta_{n-4}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-4}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\eta_1'\eta_{n-4}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-5}'\eta_{n-4}'\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}} - \\
-\left[\eta_{n-3}'^2 + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4} = 0, \\
\eta_{n-3}'' + b_*\eta_{n-3}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-3}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\eta_1'\eta_{n-3}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-4}'\eta_{n-3}'\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} - \\
-\eta_{n-2}'^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0, \\
\eta_{n-2}'' + b_*\eta_{n-2}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-2}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\eta_1'\eta_{n-2}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-3}'\eta_{n-2}'\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0,\ b_* > 0.
\end{gathered} \tag{6.7.7}$$

В частности, при $n = 5$ имеем:

$$\begin{gathered}
\xi'' + b_*\xi' \cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \left[\eta_1'^2 + \eta_2'^2 \sin^2\eta_1 + \eta_3'^2 \sin^2\eta_1 \sin^2\eta_2\right] \frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\
\eta_1'' + b_*\eta_1' \cos\xi + \xi'\eta_1' \frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \left[\eta_2'^2 + \eta_3'^2 \sin^2\eta_2\right] \sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\
\eta_2'' + b_*\eta_2' \cos\xi + \xi'\eta_2' \frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_2' \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \eta_3'^2 \sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\
\eta_3'' + b_*\eta_3' \cos\xi + \xi'\eta_3' \frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_3' \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\eta_2'\eta_3' \frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} = 0, \ b_* > 0.
\end{gathered} \tag{6.7.8}$$

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (6.5.7)) к промежуточным безразмерным переменным

$$z_k = n_0 v_\infty Z_k, \ k = 1, \ldots, n-2, \ z_{n-1} = n_0 v_\infty Z_{n-1} - n_0 v_\infty b_* \sin\xi, \tag{6.7.9}$$

система (6.7.7) будет эквивалентна системе

$$\xi' = Z_{n-1} - b_* \sin\xi, \tag{6.7.10}$$

$$Z'_{n-1} = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.11}$$

$$Z'_{n-2} = -Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{6.7.12}$$

$$\begin{gathered}
Z'_{n-3} = -Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \\
+(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2},
\end{gathered} \tag{6.7.13}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z'_1 = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{s-1}}\right\}, \tag{6.7.14}$$

$$\eta'_1 = -Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.15}$$

$$\eta'_2 = Z_{n-3}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{6.7.16}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta'_{n-3} = (-1)^{n+1}Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4}}, \tag{6.7.17}$$

$$\eta'_{n-2} = (-1)^{n}Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}}, \tag{6.7.18}$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^{n-1}\{(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbb{R}^{2(n-1)} : \ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\} \tag{6.7.19}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (6.7.10)–(6.7.18) порядка $2(n-1)$ по причине цикличности переменной η_{n-2} выделяется независимая подсистема (6.7.10)–(6.7.17) порядка $2(n-1)-1$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\xi' = Z_4 - b_* \sin\xi, \tag{6.7.20}$$

$$Z'_4 = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.21}$$

$$Z'_3 = -Z_3Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{6.7.22}$$

$$Z_2' = -Z_2Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + Z_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{6.7.23}$$

$$Z_1' = -Z_1Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{6.7.24}$$

$$\eta_1' = -Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.25}$$

$$\eta_2' = Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{6.7.26}$$

$$\eta_3' = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}, \tag{6.7.27}$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^4\{(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3,) \in \mathbb{R}^8:\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \eta_2 \leqslant \pi,\ \eta_3 \bmod 2\pi\} \tag{6.7.28}$$

четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{(\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^4:\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \eta_2 \leqslant \pi,\ \eta_3 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (6.7.20)–(6.7.27) по причине цикличности переменной η_3 выделяется независимая подсистема седьмого порядка (6.7.20)–(6.7.26), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем семимерном многообразии.

6.7.2. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы (6.7.10)–(6.7.18) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов (в частности, для полного интегрирования системы восьмого порядка (6.7.20)–(6.7.27) необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов). Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n (в частности, до пяти) для интегрирования систем.

6.7.2.1. Система при отсутствии силового поля. Рассмотрим систему (6.7.20)–(6.7.27) на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$. При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (6.6.15) тождественно равна нулю (в частности, $b_* = 0$, а также коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (6.7.21) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_4, \tag{6.7.29}$$

$$Z_4' = (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.30}$$

$$Z_3' = -Z_3Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{6.7.31}$$

$$Z_2' = -Z_2Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + Z_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{6.7.32}$$

$$Z_1' = -Z_1Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{6.7.33}$$

$$\eta_1' = -Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.34}$$

$$\eta_2' = Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{6.7.35}$$

$$\eta_3' = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}. \tag{6.7.36}$$

Система (6.7.29)–(6.7.36) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 6.7.2. *Система* (6.7.29)–(6.7.36) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2} = C_1 = const, \tag{6.7.37}$$

$$\Phi_2(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin\xi = C_2 = const, \tag{6.7.38}$$

$$\Phi_3(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin\xi \sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{6.7.39}$$

$$\Phi_4(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = Z_1 \sin\xi \sin\eta_1 \sin\eta_2 = C_4 = const, \tag{6.7.40}$$

$$\Phi_5(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5 = const. \tag{6.7.41}$$

Четыре первых интеграла (6.7.37)–(6.7.40) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются четыре (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости пятимерного твердого тела, а именно:

$$\omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}, \ \omega_7 \equiv \omega_7^0 = \text{const}, \ \omega_9 \equiv \omega_9^0 = \text{const}, \ \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0 = \text{const}. \tag{6.7.42}$$

В частности, наличие первого интеграла (6.7.37) объясняется равенством

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2} \left[\omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2\right] \equiv C_1^2 = \text{const}. \tag{6.7.43}$$

Пятый первый интеграл (6.7.41) имеет кинематический смысл, “привязывает” уравнение на η_3 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\eta_3}{d\eta_2} = -\frac{Z_1}{Z_2} \frac{1}{\sin\eta_2}, \tag{6.7.44}$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (6.7.39), (6.7.40) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2} \sin^2\eta_2 - 1}, \tag{6.7.45}$$

то квадратура (6.7.44) примет вид

$$\eta_3 = \pm \int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_3^2}{C_4^2} - 1\right) - \frac{C_3^2}{C_4^2} u^2}}, \ u = \cos\eta_2. \tag{6.7.46}$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\eta_3 + C_5 = \pm \mathrm{arctg} \frac{\cos\eta_2}{\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2} \sin^2\eta_2 - 1}}, \ C_5 = \text{const}, \tag{6.7.47}$$

позволяющему получить первый интеграл (6.7.41). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\mathrm{tg}^2(\eta_3 + C_5) = \frac{C_4^2}{(C_3^2 - C_4^2)\mathrm{tg}^2\eta_2 - C_4^2}. \tag{6.7.48}$$

Теперь перефразируем теорему 6.7.2.

Теорема 6.7.3. *Система* (6.7.29)–(6.7.36) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin\xi} = C_1' = const, \tag{6.7.49}$$

$$\Psi_2(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_2' = const, \tag{6.7.50}$$

$$\Psi_3(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin\eta_2} = C_3' = const, \tag{6.7.51}$$

$$\Psi_4(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\eta_1} = C_4' = const, \tag{6.7.52}$$

$$\Psi_5(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5' = const. \tag{6.7.53}$$

Первый интеграл (6.7.53) также имеет кинематический смысл и “привязывает” уравнение на η_3, а функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 6.7.3 (в отличие от теоремы 6.7.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (6.7.49)–(6.7.53) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6.7.3 преобразованный набор первых интегралов (6.7.49)–(6.7.53) системы (6.7.29)–(6.7.36) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (6.7.29)–(6.7.36) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$\begin{aligned} w_4 &= -Z_4, \\ w_3 &= \sqrt{Z_3^2 + Z_2^2 + Z_1^2}, \\ w_2 &= \frac{Z_2}{Z_1}, \\ w_1 &= -\frac{Z_3}{\sqrt{Z_2^2 + Z_1^2}}, \end{aligned} \tag{6.7.54}$$

система (6.7.29)–(6.7.36) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= -w_4, \\ w_4' &= -w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ w_3' &= w_3 w_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.55}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\frac{1 + w_2^2}{w_2}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \\ \eta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{6.7.56}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\frac{1 + w_1^2}{w_1}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \\ \eta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{6.7.57}$$

$$\eta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \tag{6.7.58}$$

где

$$\begin{gathered}
d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = -Z_3(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi} = \\
= \mp\frac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\
d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = Z_2(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1} = \\
= \pm\frac{w_2w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \\
d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = -Z_1(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2} = \\
= \mp\frac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2},
\end{gathered} \tag{6.7.59}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_4,w_3,w_2,w_1),\ k=1,2,3, \tag{6.7.60}$$

— функции в силу замены (6.7.54).

Система (6.7.55)–(6.7.58) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^4\{(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbb{R}^8:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \eta_3 \bmod 2\pi\} \tag{6.7.61}$$

четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbb{R}^4:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \eta_3 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (6.7.55)–(6.7.58) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.7.55), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (6.7.56), (6.7.57) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_3) уравнение (6.7.58) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.7.55)–(6.7.58) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.7.55), по одному — для систем (6.7.56), (6.7.57) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.7.58) (*т.е. всего пять*).

Замечание 6.7.1. *Выпишем первые интегралы* (6.7.49)–(6.7.53) *в переменных* w_1,w_2,w_3,w_4 *в силу* (6.7.54). *Получим:*

$$\Theta_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \frac{w_3^2+w_4^2}{w_3\sin\xi} = C_1'' = const, \tag{6.7.62}$$

$$\Theta_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = w_3\sin\xi = C_2'' = const, \tag{6.7.63}$$

$$\Theta_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\eta_2} = C_3'' = const, \tag{6.7.64}$$

$$\Theta_4(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\eta_1} = C_4'' = const, \tag{6.7.65}$$

$$\Theta_5(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = C_5'' = const. \tag{6.7.66}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (6.7.62), (6.7.63) достаточны для интегрирования системы (6.7.55), первые интегралы (6.7.64), (6.7.65) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\ s=1,2, \tag{6.7.67}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (6.7.56), (6.7.57), и, наконец, первый интеграл (6.7.66) достаточен для "привязывания" уравнения (6.7.58). Доказана

Теорема 6.7.4. *Система* (6.7.29)–(6.7.36) *восьмого порядка обладает достаточным количеством (пятью) независимых первых интегралов.*

6.7.2.2. Система при наличии консервативного силового поля. Теперь рассмотрим систему (6.7.20)–(6.7.27) при условии $b_* = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (6.7.21) (в отличие от системы (6.7.29)–(6.7.36)). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_4, \tag{6.7.68}$$

$$Z_4' = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.69}$$

$$Z_3' = -Z_3 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{6.7.70}$$

$$Z_2' = -Z_2 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + Z_1^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{6.7.71}$$

$$Z_1' = -Z_1 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1 Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{6.7.72}$$

$$\eta_1' = -Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.73}$$

$$\eta_2' = Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{6.7.74}$$

$$\eta_3' = -Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}. \tag{6.7.75}$$

Итак, система (6.7.68)–(6.7.75) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 6.7.5. *Система* (6.7.68)–(6.7.75) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\xi = C_1 = const, \tag{6.7.76}$$

$$\Phi_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\xi = C_2 = const, \tag{6.7.77}$$

$$\Phi_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{6.7.78}$$

$$\Phi_4(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = Z_1\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2 = C_4 = const. \tag{6.7.79}$$

$$\Phi_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5 = const. \tag{6.7.80}$$

Первый интеграл (6.7.76) является интегралом полной энергии. Первый интеграл (6.7.80) имеет кинематический смысл, "привязывает" уравнение на η_3 и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 6.7.5.

Теорема 6.7.6. *Система* (6.7.68)–(6.7.75) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\xi}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\xi} = C_1' = const, \tag{6.7.81}$$

$$\Psi_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_2' = const, \tag{6.7.82}$$

$$\Psi_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\eta_2} = C_3' = const, \tag{6.7.83}$$

$$\Psi_4(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_2^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\eta_1} = C_4' = const, \tag{6.7.84}$$

$$\Psi_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5' = const. \tag{6.7.85}$$

Функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 6.7.6 (в отличие от теоремы 6.7.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (6.7.81)–(6.7.85) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6.7.6 преобразованный набор первых интегралов (6.7.81)–(6.7.85) системы (6.7.68)–(6.7.75) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (6.7.68)–(6.7.75) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (6.7.54) система (6.7.68)–(6.7.75) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\xi' = -w_4,\\ &w_4' = \sin\xi\cos\xi - w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\ &w_3' = w_3 w_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.86}$$

$$\left.\begin{aligned} &w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2},\\ &\eta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{6.7.87}$$

$$\left.\begin{aligned} &w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1},\\ &\eta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{6.7.88}$$

$$\eta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \tag{6.7.89}$$

где выполнены условия (6.7.59).

Система (6.7.86)–(6.7.89) рассматривается на касательном расслоении (6.7.61) четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{(\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^4 :\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \eta_2 \leqslant \pi,\ \eta_3 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (6.7.86)–(6.7.89) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.7.86), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (6.7.87), (6.7.88) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_3) уравнение (6.7.89) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.7.86)–(6.7.89) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.7.86), по одному — для систем (6.7.87), (6.7.88) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (6.7.89) (*т.е. всего пять*).

Замечание 6.7.2. *Выпишем первые интегралы* (6.7.81)–(6.7.85) *в переменных* w_1, w_2, w_3, w_4 *в силу* (6.7.54). *Получим:*

$$\Theta_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2 + \sin^2\xi}{w_3\sin\xi} = C_1'' = const, \tag{6.7.90}$$

$$\Theta_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = w_3\sin\xi = C_2'' = const, \tag{6.7.91}$$

$$\Theta_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\eta_2} = C_3'' = const, \tag{6.7.92}$$

$$\Theta_4(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\eta_1} = C_4'' = const, \tag{6.7.93}$$

$$\Theta_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5'' = const. \tag{6.7.94}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (6.7.90), (6.7.91) достаточны для интегрирования системы (6.7.86), первые интегралы (6.7.92), (6.7.93) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s}, \ s=1,2, \tag{6.7.95}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (6.7.87), (6.7.88), и, наконец, первый интеграл (6.7.94) достаточен для “привязывания” уравнения (6.7.89). Доказана

Теорема 6.7.7. *Система* (6.7.68)–(6.7.75) *восьмого порядка обладает достаточным количеством (пятью) независимых первых интегралов.*

6.7.3. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (6.7.20)–(6.7.27) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (6.7.20)–(6.7.27) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (6.7.54) система (6.7.20)–(6.7.27) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\xi' = -w_4 - b_*\sin\xi,\\ &w_4' = \sin\xi\cos\xi - w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\ &w_3' = w_3 w_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.96}$$

$$\left.\begin{aligned} &w_2' = d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2},\\ &\eta_2' = d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{6.7.97}$$

$$\left.\begin{aligned} &w_1' = d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1},\\ &\eta_1' = d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{6.7.98}$$

$$\eta_3' = d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3), \tag{6.7.99}$$

где выполнены условия (6.7.59).

Система (6.7.96)–(6.7.98) рассматривается на касательном расслоении (6.7.61) четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbb{R}^4:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \eta_3 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (6.7.96)–(6.7.99) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.7.96), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (6.7.97), (6.7.98) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_3) уравнение (6.7.99) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.7.96)–(6.7.99) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.7.96), по одному — для систем (6.7.97), (6.7.98) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (6.7.99) (*т.е. всего пять*).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (6.7.96) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} &\frac{dw_4}{d\xi} = \frac{\sin\xi\cos\xi - w_3^2\cos\xi/\sin\xi}{-w_4 - b_*\sin\xi},\\ &\frac{dw_3}{d\xi} = \frac{w_3 w_4\cos\xi/\sin\xi}{-w_4 - b_*\sin\xi}. \end{aligned} \tag{6.7.100}$$

Используя замену $\tau = \sin\xi$, перепишем систему (6.7.100) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned} \frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{\tau - w_3^2/\tau}{-w_4 - b_*\tau}, \\ \frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{w_3 w_4/\tau}{-w_4 - b_*\tau}. \end{aligned} \tag{6.7.101}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_2\tau,\ w_3 = u_1\tau, \tag{6.7.102}$$

приводим систему (6.7.101) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - u_1^2}{-u_2 - b_*}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1 u_2}{-u_2 - b_*}, \end{aligned} \tag{6.7.103}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 - b_*}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1 u_2 - bu_1}{-u_2 - b_*}. \end{aligned} \tag{6.7.104}$$

Сопоставим системе второго порядка (6.7.104) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 + b_* u_2}{2u_1 u_2 + b_* u_1}, \tag{6.7.105}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_* u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{6.7.106}$$

Итак, уравнение (6.7.105) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_* u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{6.7.107}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \xi) = \frac{w_4^2 + w_3^2 + b_* w_4 \sin\xi + \sin^2\xi}{w_3 \sin\xi} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{6.7.108}$$

Замечание 6.7.3. *Рассмотрим систему* (6.7.96) *с переменной диссипацией с нулевым средним* [160, 166, 209]*, становящейся консервативной при* $b_* = 0$*:*

$$\begin{aligned} \xi' &= -w_4, \\ w_4' &= \sin\xi\cos\xi - w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ w_3' &= w_3 w_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}. \end{aligned} \tag{6.7.109}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_4^2 + w_3^2 + \sin^2\xi = C_1^* = const, \tag{6.7.110}$$

$$w_3 \sin\xi = C_2^* = const. \tag{6.7.111}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (6.7.110), (6.7.111) *также является первым интегралом системы* (6.7.109). *Но при* $b_* \neq 0$ *каждая из функций*

$$w_4^2 + w_3^2 + b_* w_4 \sin\xi + \sin^2\xi \tag{6.7.112}$$

и (6.7.111) *по отдельности не является первым интегралом системы* (6.7.96). *Однако отношение функций* (6.7.112), (6.7.111) *является первым интегралом системы* (6.7.96) *при любом* b_*.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.7.96). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (6.7.107) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_*}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b_*^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{6.7.113}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_*^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{6.7.114}$$

и фазовое пространство системы (6.7.96) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (6.7.113).

Таким образом, в силу соотношения (6.7.107) первое уравнение системы (6.7.104) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + b_* u_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 - b_*}, \tag{6.7.115}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + b_* u_2 + 1)}\}, \tag{6.7.116}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (6.7.114).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (6.7.96) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(-b_* - u_2)du_2}{2(1 + b_* u_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + b_* u_2 + 1)}\}/2}. \tag{6.7.117}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\xi|. \tag{6.7.118}$$

Если

$$u_2 + \frac{b_*}{2} = r_1,\ b_1^2 = b_*^2 + C_1^2 - 4, \tag{6.7.119}$$

то правая часть равенства (6.7.117) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b_* \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b_*}{2} I_1, \tag{6.7.120}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)},\ r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{6.7.121}$$

При вычислении интеграла (6.7.121) возможны три случая.

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}}\right| + \text{const}. \tag{6.7.122}$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b_*^2}} \arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{6.7.123}$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{6.7.124}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_4}{\sin\xi} + \frac{b_*}{2}, \tag{6.7.125}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}} \ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}} \ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right| + \text{const}. \tag{6.7.126}$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b_*^2}} \arcsin \frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{6.7.127}$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{6.7.128}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (6.7.96) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 6.7.4. *В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла* (6.7.107)*.*

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \xi) = G\left(\sin\xi, \frac{w_4}{\sin\xi}, \frac{w_3}{\sin\xi}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{6.7.129}$$

Итак, найдены два первых интеграла (6.7.108), (6.7.129) независимой системы третьего порядка (6.7.96). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (6.7.97), (6.7.98) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.7.99).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (6.7.92)–(6.7.94), а именно:

$$\Theta_3(w_2; \eta_2) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\eta_2} = C_3 = \text{const}, \tag{6.7.130}$$

$$\Theta_4(w_1; \eta_1) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\eta_1} = C_4 = \text{const}, \tag{6.7.131}$$

$$\Theta_5(w_2, w_1; \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \eta_3 \pm \operatorname{arctg}\frac{C_4\cos\eta_2}{\sqrt{C_3^2\sin^2\eta_2 - C_4^2}} = C_5 = \text{const}, \tag{6.7.132}$$

при этом в левую часть равенства (6.7.132) вместо C_3, C_4 необходимо подставить интегралы (6.7.130), (6.7.131).

Теорема 6.7.8. *Система* (6.7.96)*–*(6.7.98) *восьмого порядка обладает достаточным количеством (пятью) независимых первых интегралов* (6.7.108)*,* (6.7.129)*,* (6.7.130)*,* (6.7.131)*,* (6.7.132)*.*

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (6.7.20)–(6.7.27) имеет пять первых интегралов, выражающихся соотношениями (6.7.108), (6.7.129), (6.7.130), (6.7.131), (6.7.132) (при этом используются выражения (6.7.117)–(6.7.128)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 6.7.9. *Три группы соотношений* (6.3.4)*,* (6.4.4)*,* (6.5.10) *при условиях* (6.3.6)*,* (6.3.9)*,* (6.3.10)*,* (6.7.1)*,* (6.7.5) *обладают пятью первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

6.7.4. Структура уравнений на касательных расслоениях к конечномерной сфере. Исследование полной системы (6.7.20)–(6.7.27) на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ было начато с исследования упрощенной системы (6.7.29)–(6.7.36), которая описывает динамику при отсутствии какого-либо силового поля. Таким образом, коэффициенты в правой части системы (6.7.29)–(6.7.36) носят лишь геометрический смысл и порождаются выбором координат $Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ на касательном расслоении.

Поставим вопрос: как меняются коэффициенты соответствующих систем при индуктивном увеличении размерности $n-1$ сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$? Другими словами, системами какого вида описываются фазовые (геодезические) потоки на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$ именно в выбранных нами координатах $Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$?

Несмотря на то, что (и в этой работе, и в ряде предыдущих работ автора) нами рассмотрена явно структура соответствующих уравнений до $n = 5$ включительно, начнем со случая $n = 2$. Это позволит произвести индуктивный переход от n к $n+1$ и "конструировать" аналогичные системы любого высокого порядка.

Замечание 6.7.5. ***(об аналитических первых интегралах при отсутствии силового поля).*** *При построении систем на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$ используется факт наличия в системе следующего набора аналитических первых интегралов:*

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2} = C_1 = const,\\
&\Phi_2(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\xi = C_2 = const,\\
&\Phi_3(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Phi_{n-2}(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4} = C_{n-2} = const,\\
&\Phi_{n-1}(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = Z_1\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3} = C_{n-1} = const.
\end{aligned}
\tag{6.7.133}
$$

Первые интегралы (6.7.133) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются $n-1$ (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости n-мерного твердого тела, а именно:

$$
\omega_{r_1} \equiv \omega_{r_1}^0 = \text{const}, \ \ldots, \ \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega_{r_{n-1}}^0 = \text{const}. \tag{6.7.134}
$$

В частности, наличие первого интеграла $\Phi_1(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = C_1$ из (6.7.133) объясняется равенством

$$
Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2}[\omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_{n-1}}^2] \equiv C_1^2 = \text{const}. \tag{6.7.135}
$$

При этом первые интегралы (6.7.133) являются функциями от компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$.

6.7.4.1. Начало при $n = 2$. Итак, при $n = 2$ следующая система задает геодезический поток на двумерном цилиндре $T_*\mathbb{S}^1\{Z_1; \xi\}$ как касательном расслоении одномерной сферы $\mathbb{S}^1\{\xi\}$:

$$
\begin{aligned}
\xi' &= Z_1,\\
Z_1' &= 0,
\end{aligned}
\tag{6.7.136}
$$

при этом, в силу замечания 6.7.5, существует естественный первый интеграл

$$
Z_1 = C_1 = \text{const}. \tag{6.7.137}
$$

Уравнение $\xi' = Z_1$ является кинематическим соотношением и задает координаты ξ, Z_1 в фазовом пространстве системы (6.7.136) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^1\{Z_1; \xi\}$).

6.7.4.2. Переход по n: $2 \to 3$. При переходе от $n = 2$ к $n = 3$ производится переобозначение

$$Z_1 \mapsto Z_2,$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 6.7.1. *При $n = 3$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^2\{Z_2, Z_1; \xi, \eta_1\}$ двумерной сферы $\mathbb{S}^2\{\xi, \eta_1\}$:*

$$\xi' = Z_2, \tag{6.7.138}$$

$$Z_2' = \underline{Z_1^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}}, \tag{6.7.139}$$

$$\underline{Z_1' = -Z_1 Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}}, \tag{6.7.140}$$

$$\eta_1' = -Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.141}$$

при этом, в силу замечания 6.7.5, существуют первые интегралы

$$Z_1^2 + Z_2^2 = C_1 = const, \tag{6.7.142}$$

$$Z_1 \sin\xi = C_2 = const. \tag{6.7.143}$$

Действительно, в силу (6.7.142) имеем:

$$Z_1' Z_1 + Z_2' Z_2 = 0,$$

поэтому существует такая функция $N_1(\xi, \eta_1, Z_1, Z_2)$, что

$$Z_2' = -Z_1 N_1(\xi, \eta_1, Z_1, Z_2), \;\; Z_1' = Z_2 N_1(\xi, \eta_1, Z_1, Z_2),$$

а в силу (6.7.143) должно выполняться равенство (в силу системы (6.7.138)–(6.7.141))

$$Z_1' \sin\xi + Z_1 \xi' \cos\xi = Z_2 N_1(\xi, \eta_1, Z_1, Z_2) \sin\xi + Z_1 Z_2 \cos\xi = 0,$$

откуда

$$N_1(\xi, \eta_1, Z_1, Z_2) = -Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi},$$

что и требовалось.

Уравнения (6.7.138), (6.7.141) являются кинематическими соотношениями и задают координаты ξ, η_1, Z_1, Z_2 в фазовом пространстве системы (6.7.138)–(6.7.141) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^2\{Z_2, Z_1; \xi, \eta_1\}$).

6.7.4.3. Переход по n: $3 \to 4$. При переходе от $n = 3$ к $n = 4$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_3 \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 6.7.2. *При $n = 4$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2\}$ трехмерной сферы $\mathbb{S}^3\{\xi, \eta_1, \eta_2\}$:*

$$\xi' = Z_3, \tag{6.7.144}$$

$$Z_3' = (Z_2^2 + \underline{Z_1^2}) \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.145}$$

$$Z_2' = -Z_2 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} - \underline{Z_1^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}}, \tag{6.7.146}$$

$$\underline{Z_1' = -Z_1 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1 Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}}, \tag{6.7.147}$$

$$\eta_1' = -Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.148}$$

$$\eta_2' = Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1}, \tag{6.7.149}$$

при этом, в силу замечания 6.7.5, существуют первые интегралы

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = C_1 = const, \tag{6.7.150}$$

$$\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin\xi = C_2 = const, \tag{6.7.151}$$

$$Z_1 \sin\xi \sin\eta_1 = C_3 = const. \tag{6.7.152}$$

Действительно, в силу (6.7.150), (6.7.151) аналогично доказательству предложения 6.7.1 находится подчеркнутый коэффициент в уравнении (6.7.145), а также делается вывод об уравнениях (6.7.146) и (6.7.147), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} Z_2' &= -Z_2 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} - Z_1^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} N_2(\xi, \eta_1, \eta_2, Z_1, Z_2, Z_3), \\ Z_1' &= -Z_1 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1 Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} N_2(\xi, \eta_1, \eta_2, Z_1, Z_2, Z_3). \end{aligned} \tag{6.7.153}$$

Далее, в силу (6.7.152) должно выполняться равенство (в силу системы (6.7.144)–(6.7.149))

$$Z_1' \sin\xi \sin\eta_1 + Z_1 \xi' \cos\xi \sin\eta_1 + Z_1 \eta_1' \sin\xi \cos\eta_1 =$$
$$= Z_1 Z_2 \cos\xi [-\cos\eta_1 + N_2(\xi, \eta_1, \eta_2, Z_1, Z_2, Z_3) \sin\eta_1] = 0,$$

откуда

$$N_2(\xi, \eta_1, \eta_2, Z_1, Z_2, Z_3) = \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1},$$

что и требовалось.

Уравнения (6.7.144), (6.7.148), (6.7.149) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\xi, \eta_1, \eta_2, Z_1, Z_2, Z_3$ в фазовом пространстве системы (6.7.144)–(6.7.149) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2\}$).

6.7.4.4. Переход по n: $4 \to 5$. При переходе от $n = 4$ к $n = 5$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 6.7.3. *При $n = 5$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$:*

$$\xi' = Z_4, \tag{6.7.154}$$

$$Z_4' = (Z_3^2 + Z_2^2 + \underline{Z_1^2}) \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.155}$$

$$Z_3' = -Z_3 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_2^2 + \underline{Z_1^2}) \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{6.7.156}$$

$$Z_2' = -Z_2 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \underline{Z_1^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{1}{\sin\eta_1} \frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}}, \tag{6.7.157}$$

$$\underline{Z_1' = -Z_1 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1 Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} \frac{1}{\sin\eta_1} \frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}}, \tag{6.7.158}$$

$$\eta_1' = -Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.159}$$

$$\eta_2' = Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1}, \tag{6.7.160}$$

$$\eta_3' = -Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1 \sin\eta_2}, \tag{6.7.161}$$

при этом, в силу замечания 6.7.5, существуют первые интегралы

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = C_1 = const, \tag{6.7.162}$$

$$\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin\xi = C_2 = const, \tag{6.7.163}$$

$$\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin\xi \sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{6.7.164}$$

$$Z_1 \sin\xi \sin\eta_1 \sin\eta_2 = C_4 = const. \tag{6.7.165}$$

Действительно, в силу (6.7.162)–(6.7.164) аналогично доказательству предложений 6.7.1, 6.7.2 находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнениях (6.7.155), (6.7.156), а также делается вывод об уравнениях (6.7.157) и (6.7.158), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} Z_2' &= -Z_2 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + Z_1^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} N_3(\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4), \\ Z_1' &= -Z_1 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1 Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} N_3(\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4). \end{aligned} \tag{6.7.166}$$

Далее, в силу (6.7.165) должно выполняться равенство (в силу системы (6.7.154)–(6.7.161))

$$Z_1' \sin\xi \sin\eta_1 \sin\eta_2 + Z_1 \xi' \cos\xi \sin\eta_1 \sin\eta_2 + Z_1 \eta_1' \sin\xi \cos\eta_1 \sin\eta_2 + Z_1 \eta_2' \sin\xi \sin\eta_1 \cos\eta_2 =$$
$$= Z_1 Z_2 \cos\xi[-N_3(\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \sin\eta_1 \sin\eta_2 + \cos\eta_2] = 0,$$

откуда

$$N_3(\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = \frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2},$$

что и требовалось.

Уравнения (6.7.154), (6.7.159)–(6.7.161) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ в фазовом пространстве системы (6.7.154)–(6.7.161) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$).

6.7.4.5. Переход по n: $5 \to 6$. При переходе от $n = 5$ к $n = 6$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_5 \\ Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 6.7.4. *При $n = 6$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^5\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbb{S}^5\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$:*

$$\xi' = Z_5, \tag{6.7.167}$$

$$Z_5' = (Z_4^2 + Z_3^2 + Z_2^2 + \underline{Z_1^2}) \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.168}$$

$$Z_4' = -Z_4 Z_5 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_3^2 + Z_2^2 + \underline{Z_1^2}) \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{6.7.169}$$

$$Z_3' = -Z_3 Z_5 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_3 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + (Z_2^2 + \underline{Z_1^2}) \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{6.7.170}$$

$$Z_2' = -Z_2 Z_5 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_2 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - \underline{Z_1^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{1}{\sin\eta_2}\frac{\cos\eta_3}{\sin\eta_3}}, \tag{6.7.171}$$

$$\underline{Z_1' = -Z_1 Z_5 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} + Z_1 Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{1}{\sin\eta_2}\frac{\cos\eta_3}{\sin\eta_3}}, \tag{6.7.172}$$

$$\eta_1' = -Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.173}$$

$$\eta_2' = Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{6.7.174}$$

$$\eta_3' = -Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}, \tag{6.7.175}$$

$$\eta_4' = Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3}, \tag{6.7.176}$$

при этом, в силу замечания 6.7.5, существуют первые интегралы

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2 = C_1 = const, \tag{6.7.177}$$

$$\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}\sin\xi = C_2 = const, \tag{6.7.178}$$

$$\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{6.7.179}$$

$$\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2 = C_4 = const. \tag{6.7.180}$$

$$Z_1\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3 = C_5 = const. \tag{6.7.181}$$

Действительно, в силу (6.7.177)–(6.7.180) аналогично доказательству предложений 6.7.1–6.7.3 находятся подчеркнутые коэффициенты в уравнениях (6.7.168)–(6.7.170), а также делается вывод об уравнениях (6.7.171) и (6.7.172), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} Z_2' &= -Z_2Z_5\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_2Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - \\ &- Z_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}N_4(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5), \\ Z_1' &= -Z_1Z_5\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} + \\ &+ Z_1Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}N_4(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5). \end{aligned} \tag{6.7.182}$$

Далее, в силу (6.7.181) должно выполняться равенство (в силу системы (6.7.167)–(6.7.176))

$$Z_1'\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3 + Z_1\xi'\cos\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3 + Z_1\eta_1'\sin\xi\cos\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3 +$$

$$+ Z_1\eta_2'\sin\xi\sin\eta_1\cos\eta_2\sin\eta_3 + Z_1\eta_3'\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3 =$$

$$= Z_1Z_2\cos\xi[-\cos\eta_3 + N_4(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5)\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3] = 0,$$

откуда

$$N_4(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5) = \frac{1}{\sin\eta_1}\frac{1}{\sin\eta_2}\frac{\cos\eta_3}{\sin\eta_3},$$

что и требовалось.

Уравнения (6.7.167), (6.7.173)–(6.7.176) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5$ в фазовом пространстве системы (6.7.167)–(6.7.176) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^5\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4\}$).

6.7.4.6. Переход по n: $n \to n+1$. При индуктивном переходе от n к $n+1$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_n \\ Z_{n-1} \\ \ldots \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчеркиваются.

Предложение 6.7.5. *При $n > 2$ следующая система задает геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^n\{Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}\}$ n-мерной сферы $\mathbb{S}^n\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}\}$:*

$$\xi' = Z_n, \tag{6.7.183}$$

$$Z_n' = (Z_{n-1}^2 + \ldots + Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.184}$$

$$Z_{n-1}' = -Z_{n-1}Z_n\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_{n-2}^2 + \ldots + Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{6.7.185}$$

$$Z_{n-2}' = -Z_{n-2}Z_n\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + (Z_{n-3}^2 + \ldots + Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{6.7.186}$$

. . . .

$$\begin{gathered} Z_2' = -Z_2Z_n\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_2Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} + \ldots + \\ +(-1)^n Z_2Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\ldots\frac{1}{\sin\eta_{n-4}}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} + \underline{(-1)^n Z_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\ldots\frac{1}{\sin\eta_{n-3}}\frac{\cos\eta_{n-2}}{\sin\eta_{n-2}}}, \end{gathered} \tag{6.7.187}$$

$$\begin{gathered} \underline{Z_1' = -Z_1Z_n\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} + \ldots +} \\ \underline{+(-1)^n Z_1Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\ldots\frac{1}{\sin\eta_{n-4}}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} + (-1)^{n+1} Z_1Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\ldots\frac{1}{\sin\eta_{n-3}}\frac{\cos\eta_{n-2}}{\sin\eta_{n-2}},} \end{gathered} \tag{6.7.188}$$

$$\eta_1' = -Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.189}$$

$$\eta_2' = Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{6.7.190}$$

. . . .

$$\eta_{n-2}' = (-1)^n Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}}, \tag{6.7.191}$$

$$\eta_{n-1}' = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-2}}, \tag{6.7.192}$$

при этом, в силу замечания 6.7.5, существуют первые интегралы

$$Z_1^2 + \ldots + Z_n^2 = C_1 = const, \tag{6.7.193}$$

$$\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2}\sin\xi = C_2 = const, \tag{6.7.194}$$

$$\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{6.7.195}$$

. . . .

$$\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3} = C_{n-1} = const. \tag{6.7.196}$$

$$Z_1\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-2} = C_n = const. \tag{6.7.197}$$

Действительно, в силу (6.7.193)–(6.7.196) аналогично доказательству предложений 6.7.1–6.7.4 находятся подчеркнутые коэффициенты во всех уравнениях до (6.7.187) и (6.7.188), а также делается вывод об уравнениях (6.7.187) и (6.7.188), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}Z_2' = -Z_2Z_n\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_2Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} + \ldots + \\ + (-1)^nZ_2Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\ldots\frac{1}{\sin\eta_{n-4}}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} + (-1)^nZ_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}N_{n-1}(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n), \\ Z_1' = -Z_1Z_n\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} + \ldots + \\ + (-1)^nZ_1Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\ldots\frac{1}{\sin\eta_{n-4}}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} + (-1)^{n+1}Z_1Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}N_{n-1}(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n).\end{gathered} \tag{6.7.198}$$

Далее, в силу (6.7.197) должно выполняться равенство (в силу системы (6.7.183)–(6.7.192))

$$\begin{gathered}Z_1'\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-2} + Z_1\xi'\cos\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-2} + Z_1\eta_1'\sin\xi\cos\eta_1\sin\eta_2\ldots\sin\eta_{n-2} + \ldots \\ \ldots + Z_1\eta_{n-3}'\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-3}\sin\eta_{n-2} + Z_1\eta_{n-2}'\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-2} = \\ = (-1)^nZ_1Z_2\cos\xi[\cos\eta_{n-2} - N_{n-1}(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n)\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-2}] = 0,\end{gathered}$$

откуда

$$N_{n-1}(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n) = \frac{1}{\sin\eta_1}\frac{1}{\sin\eta_2}\ldots\frac{1}{\sin\eta_{n-3}}\frac{\cos\eta_{n-2}}{\sin\eta_{n-2}},$$

что и требовалось.

Уравнения (6.7.183), (6.7.189)–(6.7.192) являются кинематическими соотношениями и задают координаты $\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n$ в фазовом пространстве системы (6.7.183)–(6.7.192) (касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^n\{Z_n,\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-1}\}$).

6.7.5. Общие замечания об интегрируемости системы при любом конечном n. Как уже было указано, для полного интегрирования системы (6.7.10)–(6.7.18) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем.

6.7.5.1. Система при отсутствии силового поля. Рассмотрим систему (6.7.10)–(6.7.18) на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\}$ и получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (6.6.15) тождественно равна нулю (в частности, $b_* = 0$, а также коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (6.7.11) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_{n-1}, \tag{6.7.199}$$

$$Z_{n-1}' = (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.200}$$

$$Z_{n-2}' = -Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{6.7.201}$$

$$\begin{gathered}Z_{n-3}' = -Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \\ +(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2},\end{gathered} \tag{6.7.202}$$

. . . .

$$Z_1' = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{s-1}}\right\}, \tag{6.7.203}$$

$$\eta_1' = -Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.204}$$

$$\eta_2' = Z_{n-3}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{6.7.205}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\eta_{n-3}' = (-1)^{n+1}Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-4}}, \tag{6.7.206}$$

$$\eta_{n-2}' = (-1)^{n}Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-3}}. \tag{6.7.207}$$

Система (6.7.199)–(6.7.207) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 6.7.10. *Система* (6.7.199)–(6.7.207) *обладает n независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(Z_{n-1},\dots,Z_1;\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2+\dots+Z_{n-1}^2} = C_1 = const, \tag{6.7.208}$$

$$\Phi_2(Z_{n-1},\dots,Z_1;\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2+\dots+Z_{n-2}^2}\sin\xi = C_2 = const, \tag{6.7.209}$$

$$\Phi_3(Z_{n-1},\dots,Z_1;\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2+\dots+Z_{n-3}^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{6.7.210}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Phi_{n-2}(Z_{n-1},\dots,Z_1;\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-4} = C_{n-2} = const, \tag{6.7.211}$$

$$\Phi_{n-1}(Z_{n-1},\dots,Z_1;\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-2}) = Z_1\sin\xi\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-3} = C_{n-1} = const, \tag{6.7.212}$$

$$\Phi_{n}(Z_{n-1},\dots,Z_1;\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-2}) = C_n = const. \tag{6.7.213}$$

Первые $n-1$ первых интеграла (6.7.208)–(6.7.212) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются $n-1$ (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости n-мерного твердого тела, а именно:

$$\omega_{r_1} \equiv \omega_{r_1}^0 = \mathrm{const},\ \dots,\ \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega_{r_{n-1}}^0 = \mathrm{const}. \tag{6.7.214}$$

В частности, наличие первого интеграла (6.7.208) объясняется равенством

$$Z_1^2+\dots+Z_{n-1}^2 = \frac{1}{n_0^2v_\infty^2}[\omega_{r_1}^2+\dots+\omega_{r_{n-1}}^2] \equiv C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{6.7.215}$$

Последний первый интеграл (6.7.213) имеет кинематический смысл, “привязывает” уравнение на β_{n-2} и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\eta_{n-2}}{d\eta_{n-3}} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\eta_{n-3}}, \tag{6.7.216}$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (6.7.211), (6.7.212) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\eta_{n-3}-1}, \tag{6.7.217}$$

то квадратура (6.7.216) примет вид

$$\eta_{n-2} = \pm\int\frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}-1\right)-\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}u^2}},\ u=\cos\eta_{n-3}. \tag{6.7.218}$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\eta_{n-2}+C_n = \pm\mathrm{arctg}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\eta_{n-3}-1}},\ C_n = \mathrm{const}, \tag{6.7.219}$$

позволяющему получить первый интеграл (6.7.213). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(\eta_{n-2}+C_n) = \frac{C_{n-1}^2}{(C_{n-2}^2 - C_{n-1}^2)\operatorname{tg}^2\eta_{n-3} - C_{n-1}^2}. \tag{6.7.220}$$

Теперь перефразируем теорему 6.7.10.

Теорема 6.7.11. *Система* (6.7.199)–(6.7.207) *обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\xi} = C_1' = const, \tag{6.7.221}$$

$$\Psi_2(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C_2' = const, \tag{6.7.222}$$

$$\Psi_3(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}}{Z_1\sin\eta_{n-3}} = C_3' = const, \tag{6.7.223}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Psi_{n-2}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2}\sin\eta_2} = C_{n-2}' = const, \tag{6.7.224}$$

$$\Psi_{n-1}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\sin\eta_1} = C_{n-1}' = const, \tag{6.7.225}$$

$$\Psi_n(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C_n' = const. \tag{6.7.226}$$

Первый интеграл (6.7.226) также имеет кинематический смысл и “привязывает” уравнение на η_{n-2}, а функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 6.7.11 (в отличие от теоремы 6.7.10) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (6.7.221)–(6.7.226) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6.7.11 преобразованный набор первых интегралов (6.7.221)–(6.7.226) системы (6.7.199)–(6.7.207) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (6.7.199)–(6.7.207) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$w_{n-1} = -Z_{n-1},\ w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2},\ w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1},\ w_{n-4} = -\frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}},\ \ldots, \tag{6.7.227}$$

$$w_2 = -\frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2}},\ w_1 = -\frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}},$$

система (6.7.199)–(6.7.207) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= -w_{n-1}, \\ w'_{n-1} &= -w_{n-2}^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ w'_{n-2} &= w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.228}$$

$$\left.\begin{aligned} w'_s &= d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s}, \\ \eta'_s &= d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}),\ s=1,\ldots,n-3, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.229}$$

$$\eta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}), \tag{6.7.230}$$

где

$$\begin{aligned} &d_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = -Z_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ &d_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = Z_{n-3}(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = (-1)^n Z_1(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}}, \end{aligned} \tag{6.7.231}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_{n-1},\ldots,w_1),\ k=1,\ldots,n-2, \tag{6.7.232}$$

— функции в силу замены (6.7.227).

Система (6.7.228)–(6.7.230) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^{n-1}\{(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbb{R}^{2(n-1)}:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\} \tag{6.7.233}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-1}:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (6.7.228)–(6.7.230) порядка $3+2(n-3)+1=2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.7.228), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (6.7.229) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (6.7.230) на η_{n-2} отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.7.228)–(6.7.230) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.7.228), по одному — для систем (6.7.229) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.7.230) (*т.е. всего* n).

Замечание 6.7.6. *Выпишем первые интегралы* (6.7.221)–(6.7.226) *в переменных* $w_1,\ldots,w_{n-1}$ *в силу* (6.7.227). *Получим:*

$$\Theta_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2+w_{n-1}^2}{w_{n-2}\sin\xi} = C''_1 = const, \tag{6.7.234}$$

$$\Theta_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = w_{n-2}\sin\xi = C''_2 = const, \tag{6.7.235}$$

$$\Theta_{s+2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\eta_s} = C''_{s+2} = const,\ s=1,\ldots,n-3, \tag{6.7.236}$$

$$\Theta_n(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C''_n = const. \tag{6.7.237}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (6.7.234), (6.7.235) достаточны для интегрирования системы (6.7.228), первые интегралы (6.7.236) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\ s=1,\ldots,n-3, \tag{6.7.238}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (6.7.229), и, наконец, первый интеграл (6.7.237) достаточен для "привязывания" уравнения (6.7.230). Доказана

Теорема 6.7.12. *Система* (6.7.199)–(6.7.207) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

6.7.5.2. Система при наличии консервативного силового поля. Теперь рассмотрим систему (6.7.10)–(6.7.18) при условии $b_* = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (6.7.11) (в отличие от системы (6.7.199)–(6.7.207)). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_{n-1}, \tag{6.7.239}$$

$$Z'_{n-1} = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.240}$$

$$Z'_{n-2} = -Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{6.7.241}$$

$$\begin{gathered} Z'_{n-3} = -Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \\ +(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \end{gathered} \tag{6.7.242}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z'_1 = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{s-1}}\right\}, \tag{6.7.243}$$

$$\eta'_1 = -Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.7.244}$$

$$\eta'_2 = Z_{n-3}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{6.7.245}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta'_{n-3} = (-1)^{n+1}Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4}}, \tag{6.7.246}$$

$$\eta'_{n-2} = (-1)^{n}Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}}. \tag{6.7.247}$$

Итак, система (6.7.239)–(6.7.247) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 6.7.13. *Система* (6.7.239)–(6.7.247) *обладает* n *независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2 + \sin^2\xi = C_1 = const, \tag{6.7.248}$$

$$\Phi_2(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\xi = C_2 = const, \tag{6.7.249}$$

$$\Phi_3(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{6.7.250}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi_{n-2}(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4} = C_{n-2} = const, \tag{6.7.251}$$

$$\Phi_{n-1}(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = Z_1\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3} = C_{n-1} = const, \tag{6.7.252}$$

$$\Phi_n(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = C_n = const. \tag{6.7.253}$$

Первый интеграл (6.7.248) является интегралом полной энергии. Первый интеграл (6.7.253) имеет кинематический смысл, "привязывает" уравнение на β_{n-2} и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 6.7.13.

Теорема 6.7.14. *Система* (6.7.239)–(6.7.247) *обладает* n *независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2+\sin^2\xi}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\xi} = C_1' = const, \tag{6.7.254}$$

$$\Psi_2(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C_2' = const, \tag{6.7.255}$$

$$\Psi_3(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}}{Z_1\sin\eta_{n-3}} = C_3' = const, \tag{6.7.256}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Psi_{n-2}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2}\sin\eta_2} = C_{n-2}' = const, \tag{6.7.257}$$

$$\Psi_{n-1}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\sin\eta_1} = C_{n-1}' = const, \tag{6.7.258}$$

$$\Psi_n(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C_n' = const. \tag{6.7.259}$$

Функции Ψ_2,Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2,Φ_n.

В формулировке теоремы 6.7.14 (в отличие от теоремы 6.7.13) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (6.7.254)–(6.7.259) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6.7.14 преобразованный набор первых интегралов (6.7.254)–(6.7.259) системы (6.7.239)–(6.7.247) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (6.7.239)–(6.7.247) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (6.7.227) система (6.7.239)–(6.7.247) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\xi' = -w_{n-1},\\ &w_{n-1}' = \sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\ &w_{n-2}' = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.260}$$

$$\left.\begin{aligned} &w_s' = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\\ &\eta_s' = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}),\ s=1,\ldots,n-3, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.261}$$

$$\eta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}), \tag{6.7.262}$$

где выполнены условия (6.7.231).

Система (6.7.260)–(6.7.262) рассматривается на касательном расслоении (6.7.233) $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-1}:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (6.7.260)–(6.7.262) порядка $3+2(n-3)+1 = 2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.7.260), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (6.7.261) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (6.7.262) на η_{n-2} отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.7.260)–(6.7.262) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.7.260), по одному — для систем (6.7.261) (всего

$n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.7.262) (*т.е. всего* n).

Замечание 6.7.7. *Выпишем первые интегралы* (6.7.254)–(6.7.259) *в переменных* $w_1, \ldots, w_{n-1}$ *в силу* (6.7.227). *Получим:*

$$\Theta_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2 + \sin^2 \xi}{w_{n-2} \sin \xi} = C_1'' = const, \tag{6.7.263}$$

$$\Theta_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = w_{n-2} \sin \xi = C_2'' = const, \tag{6.7.264}$$

$$\Theta_{s+2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin \eta_s} = C_{s+2}'' = const, \ s = 1, \ldots, n-3, \tag{6.7.265}$$

$$\Theta_n(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = C_n'' = const. \tag{6.7.266}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (6.7.263), (6.7.264) достаточны для интегрирования системы (6.7.260), первые интегралы (6.7.265) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos \eta_s}{\sin \eta_s}, \ s = 1, \ldots, n-3, \tag{6.7.267}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (6.7.261), и, наконец, первый интеграл (6.7.266) достаточен для "привязывания" уравнения (6.7.262). Доказана

Теорема 6.7.15. *Система* (6.7.239)–(6.7.247) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

6.7.6. Полный список первых интегралов при любом конечном n. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (6.7.10)–(6.7.18) порядка $2(n-1)$ (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (6.7.10)–(6.7.18) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (6.7.227) система (6.7.10)–(6.7.18) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\xi' = -w_{n-1} - b_* \sin \xi, \\ &w_{n-1}' = \sin \xi \cos \xi - w_{n-2}^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ &w_{n-2}' = w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.268}$$

$$\left.\begin{aligned} &w_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos \eta_s}{\sin \eta_s}, \\ &\eta_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \ s = 1, \ldots, n-3, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.269}$$

$$\eta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{6.7.270}$$

где выполнены условия (6.7.231).

Система (6.7.268)–(6.7.270) рассматривается на касательном расслоении (6.7.233) $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (6.7.268)–(6.7.270) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.7.268), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (6.7.269) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (6.7.270) на η_{n-2} отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.7.268)–(6.7.270) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.7.268), по одному — для систем (6.7.269) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.7.270) (*т.е. всего* n).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (6.7.268) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dw_{n-1}}{d\xi} &= \frac{\sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2\cos\xi/\sin\xi}{-w_{n-1} - b_*\sin\xi},\\ \frac{dw_{n-2}}{d\xi} &= \frac{w_{n-2}w_{n-1}\cos\xi/\sin\xi}{-w_{n-1} - b_*\sin\xi}.\end{aligned} \tag{6.7.271}$$

Используя замену $\tau = \sin\xi$, перепишем систему (6.7.271) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dw_{n-1}}{d\tau} &= \frac{\tau - w_{n-2}^2/\tau}{-w_{n-1} - b_*\tau},\\ \frac{dw_{n-2}}{d\tau} &= \frac{w_{n-2}w_{n-1}/\tau}{-w_{n-1} - b_*\tau}.\end{aligned} \tag{6.7.272}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-1} = u_2\tau,\ w_{n-2} = u_1\tau, \tag{6.7.273}$$

приводим систему (6.7.272) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - u_1^2}{-u_2 - b_*},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1u_2}{-u_2 - b_*},\end{aligned} \tag{6.7.274}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 - b_*},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 - b_*}.\end{aligned} \tag{6.7.275}$$

Сопоставим системе второго порядка (6.7.275) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 + b_*u_2}{2u_1u_2 + b_*u_1}, \tag{6.7.276}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_*u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{6.7.277}$$

Итак, уравнение (6.7.276) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_*u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{6.7.278}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 + b_*w_{n-1}\sin\xi + \sin^2\xi}{w_{n-2}\sin\xi} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{6.7.279}$$

Замечание 6.7.8. *Рассмотрим систему* (6.7.268) *с переменной диссипацией с нулевым средним* [160, 166]*, становящейся консервативной при* $b_* = 0$*:*

$$\begin{aligned}\xi' &= -w_{n-1},\\ w_{n-1}' &= \sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\ w_{n-2}' &= w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}.\end{aligned} \tag{6.7.280}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 + \sin^2\xi = C_1^* = const, \tag{6.7.281}$$

$$w_{n-2}\sin\xi = C_2^* = const. \tag{6.7.282}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (6.7.281), (6.7.282) *также является первым интегралом системы* (6.7.280). *Но при* $b_* \neq 0$ *каждая из функций*

$$w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 + b_* w_{n-1} \sin\xi + \sin^2\xi \tag{6.7.283}$$

и (6.7.282) *по отдельности не является первым интегралом системы* (6.7.268). *Однако отношение функций* (6.7.283), (6.7.282) *является первым интегралом системы* (6.7.268) *при любом* b_*.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.7.268). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (6.7.278) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_*}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b_*^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{6.7.284}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_*^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{6.7.285}$$

и фазовое пространство системы (6.7.268) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых в координатах u_1, u_2 равенством (6.7.284).

Таким образом, в силу соотношения (6.7.278) первое уравнение системы (6.7.275) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + b_* u_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 - b_*}, \tag{6.7.286}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + b_* u_2 + 1)}\}, \tag{6.7.287}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (6.7.285).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (6.7.268) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(-b_* - u_2)du_2}{2(1 + b_* u_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + b_* u_2 + 1)}\}/2}. \tag{6.7.288}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\xi|. \tag{6.7.289}$$

Если

$$u_2 + \frac{b_*}{2} = r_1,\ b_1^2 = b_*^2 + C_1^2 - 4, \tag{6.7.290}$$

то правая часть равенства (6.7.288) примет вид

$$\begin{gathered} -\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = \\ = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b}{2} I_1, \end{gathered} \tag{6.7.291}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)},\ r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{6.7.292}$$

При вычислении интеграла (6.7.292) возможны три случая.

I. $b_* > 2$.

$$\begin{gathered} I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}}\right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}}\right| + \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{6.7.293}$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b_*^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{6.7.294}$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{6.7.295}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_{n-1}}{\sin\xi} + \frac{b_*}{2}, \tag{6.7.296}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2-4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2-4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}} \right| + \text{const}. \tag{6.7.297}$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b_*^2}} \arcsin \frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{6.7.298}$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{6.7.299}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (6.7.268) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 6.7.9. *В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла* (6.7.278).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = G_2\left(\sin\xi, \frac{w_{n-1}}{\sin\xi}, \frac{w_{n-2}}{\sin\xi}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{6.7.300}$$

Итак, найдены два первых интеграла (6.7.279), (6.7.300) независимой системы третьего порядка (6.7.268). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (6.7.269) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (6.7.270).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (6.7.265), (6.7.266), а именно:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \eta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\eta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \ s = 1, \ldots, n-3, \tag{6.7.301}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, w_{n-4}; \eta_{n-4}, \eta_{n-3}, \eta_{n-2}) = \eta_{n-2} \pm \operatorname{arctg} \frac{C_{n-1}\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2\eta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C''_n = \text{const}, \tag{6.7.302}$$

при этом в левую часть равенства (6.7.302) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (6.7.301) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 6.7.16. *Система* (6.7.268)–(6.7.270) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством (n) независимых первых интегралов* (6.7.279), (6.7.300), (6.7.301), (6.7.302).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (6.7.10)–(6.7.18) имеет n первых интегралов, выражающийся соотношениями (6.7.279), (6.7.300), (6.7.301), (6.7.302) (при этом используются выражения (6.7.288)–(6.7.299)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 6.7.17. *Три группы соотношений* (6.3.1), (6.4.3), (6.5.9) *при условиях* (6.3.6)–(6.3.8), (6.7.1), (6.7.5) *обладают n первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

6.7.7. Топологические аналогии. Предъявим далее две группы аналогий, связанных с системой (6.6.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (6.6.12). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (6.6.31).

При выполнении условий (6.7.1), (6.7.5) система (6.6.31) примет вид

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\sin\alpha, \tag{6.7.303}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.7.304}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{6.7.305}$$

$$\begin{gathered}Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ -(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\end{gathered} \tag{6.7.306}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{6.7.307}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.7.308}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{6.7.309}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{6.7.310}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{6.7.311}$$

если ввести безразмерные параметр, переменные и дифференцирование по аналогии с (6.7.6):

$$b = \sigma n_0,\ n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2},\ z_k = n_0 v Z_k,\ k = 1, \ldots, n-1,\ <\cdot>= n_0 v <'> . \tag{6.7.312}$$

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -Z_4 + b\sin\alpha, \tag{6.7.313}$$

$$Z'_4 = \sin\alpha\cos\alpha - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.7.314}$$

$$Z'_3 = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{6.7.315}$$

$$Z'_2 = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{6.7.316}$$

$$Z'_1 = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{6.7.317}$$

$$\beta_1' = Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.7.318}$$

$$\beta_2' = -Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \tag{6.7.319}$$

$$\beta_3' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2}. \tag{6.7.320}$$

Теорема 6.7.18. *Система* (6.7.303)–(6.7.311) *(для свободного тела) эквивалентна системе* (6.7.10)–(6.7.18) *(для закрепленного маятника).*

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha,\ \eta_1 = \beta_1,\ \ldots,\ \eta_{n-2} = \beta_{n-2},\ b_* = -b, \tag{6.7.321}$$

а также сопоставить переменные $Z_k \leftrightarrow -Z_k,\ k = 1, \ldots, n-1$.

Для полного интегрирования системы (6.7.303)–(6.7.311) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов (в частности, для полного интегрирования системы (6.7.313)–(6.7.320) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов). Однако после следующей замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$w_{n-1} = Z_{n-1},\ w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2},\ w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1},\ w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}},\ \ldots, \tag{6.7.322}$$

$$w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}},\ w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}},$$

система (6.7.303)–(6.7.311) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha' = -w_{n-1} + b\sin\alpha, \\ &w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ &w_{n-2}' = w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.323}$$

$$\left.\begin{aligned} &w_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ &\beta_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),\ s = 1, \ldots, n-3, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.324}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{6.7.325}$$

где

$$\begin{aligned} &d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ &d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = -Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = (-1)^{n+1} Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}}, \end{aligned} \tag{6.7.326}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1),\ k = 1, \ldots, n-2, \tag{6.7.327}$$

— функции в силу замены (6.7.322).

В частности, при $n=5$ система (6.7.313)–(6.7.320) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= -w_4 + b\sin\alpha, \\ w_4' &= \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ w_3' &= w_3 w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.328}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \end{aligned}\right\} \tag{6.7.329}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \end{aligned}\right\} \tag{6.7.330}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \tag{6.7.331}$$

где

$$\begin{aligned} &d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = Z_3(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \\ &= \pm\frac{w_1 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ &d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = -Z_2(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} = \\ &= \mp\frac{w_2 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ &d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = Z_1(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} = \\ &= \pm\frac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \end{aligned} \tag{6.7.332}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_4,w_3,w_2,w_1),\ k=1,2,3, \tag{6.7.333}$$

— функции в силу замены (6.7.322).

Система (6.7.323)–(6.7.325) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^{n-1}\{(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\in\mathbb{R}^{2(n-1)}:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\ \beta_{n-2}\bmod 2\pi\} \tag{6.7.334}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-1}:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\ \beta_{n-2}\bmod 2\pi\}$.

В частности, система (6.7.328)–(6.7.331) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^4\{(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbb{R}^8:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\ \beta_3\bmod 2\pi\} \tag{6.7.335}$$

четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbb{R}^4:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\ \beta_3\bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (6.7.323)–(6.7.325) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.7.323), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (6.7.324) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (6.7.325) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (6.7.328)–(6.7.331) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.7.328), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (6.7.329), (6.7.330) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (6.7.331) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.7.323)–(6.7.325) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.7.323), по одному — для систем (6.7.324) (всего

$n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.7.325) (*т.е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (6.7.328)–(6.7.331) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.7.328), по одному — для систем (6.7.329), (6.7.330) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.7.331) (*т.е. всего пять*).

Следствие 6.7.1. 1) *Угол атаки* α *и углы* $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$ *для свободного тела эквивалентны соответственно углам отклонения* ξ *и* $\eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$ *закрепленного маятника.*

2) *Расстояние* $\sigma = CD$ *для свободного тела соответствует длине державки* $l = OD$ *закрепленного маятника.*

3) *Первые интегралы системы* (6.7.323)–(6.7.325) *могут быть автоматически получены через равенства* (6.7.279), (6.7.300), (6.7.301), (6.7.302) *после подстановок* (6.7.321) *(см. также* [197]*):*

$$\Theta_1'(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = const. \tag{6.7.336}$$

$$\Theta_2'(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = const. \tag{6.7.337}$$

$$\Theta_{s+2}'(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2} = const, \ s = 1, \ldots, n-3, \tag{6.7.338}$$

$$\Theta_n'(w_{n-3}, w_{n-4}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \beta_{n-2} \pm arctg\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = const, \tag{6.7.339}$$

при этом в левую часть равенства (6.7.339) *вместо* C_{n-2}, C_{n-1} *необходимо подставить интегралы* (6.7.338) *при* $s = n-4, n-3$.

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (6.6.39). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (6.6.45)–(6.6.53).

Тогда, в силу условий (6.6.39), (6.7.1), (6.7.5), (6.7.312) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (6.6.46)–(6.6.53)) примет вид аналитической системы

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{6.7.340}$$

$$\begin{gathered} Z_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{gathered} \tag{6.7.341}$$

$$\begin{gathered} Z_{n-2}' = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{gathered} \tag{6.7.342}$$

$$\begin{gathered} Z_{n-3}' = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \end{gathered}$$

$$+bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{6.7.343}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Z_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\dots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$

$$+bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{6.7.344}$$

$$\beta_1' = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.7.345}$$

$$\beta_2' = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{6.7.346}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\beta_{n-3}' = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-4}}, \tag{6.7.347}$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3}}, \tag{6.7.348}$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом:

$$n_1 = n_0. \tag{6.7.349}$$

В частности, при $n=5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -Z_4 + b\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{6.7.350}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - \left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+$$

$$+bZ_4\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{6.7.351}$$

$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2+Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$

$$+bZ_3\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{6.7.352}$$

$$Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$

$$+bZ_2\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{6.7.353}$$

$$Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$

$$+bZ_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{6.7.354}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.7.355}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{6.7.356}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{6.7.357}$$

Для полного интегрирования системы (6.7.340)–(6.7.348) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (6.7.322) система (6.7.340)–(6.7.348) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha,\\
&w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\
&+ bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha,\\
&w_{n-2}' = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\
&+ bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha,
\end{aligned}\right\} \tag{6.7.358}$$

$$\left.\begin{aligned} w_s' &= d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s},\\ \beta_s' &= d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\ s=1,\ldots,n-3,\end{aligned}\right\} \tag{6.7.359}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{6.7.360}$$

где выполнены условия (6.7.326).

В частности, при $n=5$ система (6.7.350)–(6.7.357) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= -w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha,\\ w_4' &= \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\ &+ bw_4(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha,\\ w_3' &= w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\ &+ bw_3(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{6.7.361}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\ \beta_2' &= d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3),\end{aligned}\right\} \tag{6.7.362}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\\ \beta_1' &= d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3),\end{aligned}\right\} \tag{6.7.363}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \tag{6.7.364}$$

где выполнены условия (6.7.332).

Система (6.7.358)–(6.7.360) рассматривается на касательном расслоении (6.7.334) $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-1}:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\ \beta_{n-2}\bmod 2\pi\}$.

В частности, система (6.7.361)–(6.7.364) рассматривается на касательном расслоении (6.7.335) четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbb{R}^4:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\ \beta_3\bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (6.7.358)–(6.7.360) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.7.358), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (6.7.359) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (6.7.360) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (6.7.361)–(6.7.364) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.7.361), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (6.7.362), (6.7.363) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (6.7.364) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.7.358)–(6.7.360) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.7.358), по одному — для систем (6.7.359) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.7.360) (*т.е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (6.7.361)–(6.7.364) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.7.361), по одному — для систем (6.7.362), (6.7.363) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.7.364) (*т.е. всего пять*).

Если вопрос о первых интегралах системы (6.7.303)–(6.7.311) (или (6.7.323)–(6.7.325)) решается с помощью следствия 6.7.1, то аналогичный вопрос для системы (6.7.340)–(6.7.348) (или (6.7.358)–(6.7.360)) решает следующая теорема 6.7.19.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (6.7.358) имеет следующий вид [197]:

$$\Theta_1''(w_{n-1},w_{n-2};\alpha) = \frac{w_{n-1}^2+w_{n-2}^2-bw_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \tag{6.7.365}$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.7.358), используя при этом первый интеграл (6.7.365). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные:

$$\tau = \sin\alpha,\ w_{n-1} = u_2\tau,\ w_{n-2} = u_1\tau,\ p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{6.7.366}$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2-b)p + 2b(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2)}{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)}, \tag{6.7.367}$$

$$U_1(C_1,u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2-bu_2+1)}\right\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0. \tag{6.7.368}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (6.7.367) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (6.7.367), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1-(u_2-1)^2} \pm 1]\exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-(u_2-1)^2}}{1 \pm \sqrt{1-(u_2-1)^2}}}\right],\ C = \mathrm{const}. \tag{6.7.369}$$

Тогда искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2''(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{6.7.370}$$

используя при этом обозначения и замены (6.7.366).

Итак, найдены два первых интеграла (6.7.365), (6.7.370) независимой системы третьего порядка (6.7.358). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (6.7.359) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (6.7.360).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (6.7.338), (6.7.339), а именно:

$$\Theta_{s+2}''(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2} = \mathrm{const},\ s = 1, \ldots, n-3, \tag{6.7.371}$$

$$\Theta_n''(w_{n-3}, w_{n-4}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \beta_{n-2} \pm \mathrm{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \mathrm{const}, \tag{6.7.372}$$

при этом в левую часть равенства (6.7.372) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (6.7.371) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 6.7.19. *n первых интегралов* (6.7.365), (6.7.370), (6.7.371), (6.7.372) *системы* (6.7.358)–(6.7.360) *являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Теорема 6.7.20. *n первых интегралов* (6.7.365), (6.7.370), (6.7.371), (6.7.372) *системы* (6.7.358)–(6.7.360) *эквивалентны n первым интегралам* (6.7.336), (6.7.337), (6.7.338), (6.7.339) *системы* (6.7.323)–(6.7.325).

Действительно, пары первых интегралов (6.7.365), (6.7.336), (6.7.371), (6.7.338) и (6.7.372), (6.7.339) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные w_k, $k = 1, \ldots, n-1$, для системы (6.7.358)–(6.7.360) с фазовыми переменными w_k, $k = 1, \ldots, n-1$, для системы (6.7.323)–(6.7.325). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (6.7.370), (6.7.337), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Итак, мы имеем следующие топологичекие и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение закрепленного на (обобщенном) сферическом шарнире многомерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).

2) Движение многомерного свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).

3) Сложное движение многомерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [2, 11, 21, 24, 37, 54].

6.8. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

6.8.1. Введение зависимости от угловой скорости. Данная глава посвящена динамике многомерного твердого тела в пространстве $\mathbb{E}^n$. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \dots, x_{nN})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на $(n-1)$-мерный диск $\mathcal{D}^{n-1}$, $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, \dots, x_{nN})$ от тензора угловой скорости Ω лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [41, 42, 197].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{6.8.1}$$

где $R = (R_1, \dots, R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости Ω. При этом зависимость функции R от тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v_D}\Omega \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{6.8.2}$$

Здесь $(h_1, \dots, h_n)$ — некоторые положительные параметры.

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то

$$x_{2N} = Q_2 - h_1 \frac{\omega_{r_{n-1}}}{v_D},\ x_{3N} = Q_3 + h_1 \frac{\omega_{r_{n-2}}}{v_D},\ \dots,\ x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1} h_1 \frac{\omega_{r_1}}{v}. \tag{6.8.3}$$

Таким образом, функция $\mathbf{r}_N$ выбирается в следующем виде (диск $\mathcal{D}^{n-1}$ задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{i}_N - \frac{1}{v_D}\Omega h, \tag{6.8.4}$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}\right),\ h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},\ \Omega \in \mathrm{so}(n) \tag{6.8.5}$$

(см. (6.1.6), (6.4.2)).

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{6.8.6}$$

Таким образом, выполнены равенства

$$\begin{gathered} x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1 - h_1\frac{\omega_{r_{n-1}}}{v_D},\ x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2 + h_1\frac{\omega_{r_{n-2}}}{v_D},\ \ldots, \\ x_{n-1,N} = R(\alpha)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} + (-1)^n h_1\frac{\omega_{r_2}}{v}, \\ x_{nN} = R(\alpha)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} + (-1)^{n+1}h_1\frac{\omega_{r_1}}{v}, \end{gathered} \tag{6.8.7}$$

убеждающее нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от тензора угловой скорости).

Итак, для построения силового поля также используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [121, 122], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha,\ s(\alpha) = B\cos\alpha,\ A, B > 0. \tag{6.8.8}$$

6.8.2. Приведенные системы.

Теорема 6.8.1. *Совместные уравнения* (6.3.1), (6.4.3), (6.5.9) *при выполнении условий* (6.3.6)–(6.3.8), (6.8.4), (6.8.8) *редуцируются к динамической системе на касательном расслоении* (6.1.5) $(n-1)$*-мерной сферы* (6.1.4).

Действительно, если ввести безразмерные параметры и дифференцирование:

$$b_* = ln_0,\ n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2},\ H_{1*} = \frac{h_1 B}{(n-2)I_2 n_0},\ <\cdot>= n_0 v_\infty <'>, \tag{6.8.9}$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered} \xi'' + (b_* - H_{1*})\xi'\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \\ - \left[\eta_1'^2 + \eta_2'^2\sin^2\eta_1 + \eta_3'^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 + \ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\ \eta_1'' + (b_* - H_{1*})\eta_1'\cos\xi + \xi'\eta_1'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \\ - \left[\eta_2'^2 + \eta_3'^2\sin^2\eta_2 + \eta_4'^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 + \ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\ \eta_2'' + (b_* - H_{1*})\eta_2'\cos\xi + \xi'\eta_2'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_2'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \\ - \left[\eta_3'^2 + \eta_4'^2\sin^2\eta_3 + \eta_5'^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\ \eta_3'' + (b_* - H_{1*})\eta_3'\cos\xi + \xi'\eta_3'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_3'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\eta_2'\eta_3'\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - \\ - \left[\eta_4'^2 + \eta_5'^2\sin^2\eta_4 + \eta_6'^2\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5 + \ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_4\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_3\cos\eta_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{6.8.10}$$

$$\eta_{n-4}'' + (b_* - H_{1*})\eta_{n-4}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-4}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_{n-4}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots +$$
$$+ 2\eta_{n-5}'\eta_{n-4}'\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}} - \left[\eta_{n-3}'^2 + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4} = 0,$$
$$\eta_{n-3}'' + (b_* - H_{1*})\eta_{n-3}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-3}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_{n-3}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots +$$
$$+ 2\eta_{n-4}'\eta_{n-3}'\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} - \eta_{n-2}'^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0,$$
$$\eta_{n-2}'' + (b_* - H_{1*})\eta_{n-2}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-2}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_{n-2}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots +$$
$$+ 2\eta_{n-3}'\eta_{n-2}'\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0, \quad b_* > 0,\ H_{1*} > 0.$$

В частности, при $n = 5$ имеем:

$$\begin{gathered}
\xi'' + (b_* - H_{1*})\xi'\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \left[\eta_1'^2 + \eta_2'^2\sin^2\eta_1 + \eta_3'^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\right]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0,\\
\eta_1'' + (b_* - H_{1*})\eta_1'\cos\xi + \xi'\eta_1'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \left[\eta_2'^2 + \eta_3'^2\sin^2\eta_2\right]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0,\\
\eta_2'' + (b_* - H_{1*})\eta_2'\cos\xi + \xi'\eta_2'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_2'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \eta_3'^2\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0,\\
\eta_3'' + (b_* - H_{1*})\eta_3'\cos\xi + \xi'\eta_3'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_3'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\eta_2'\eta_3'\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} = 0,\ b_* > 0,\ H_{1*} > 0.
\end{gathered} \tag{6.8.11}$$

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (6.5.7)) к промежуточным безразмерным переменным

$$z_k = n_0 v_\infty (1 + b_* H_{1*}) Z_k,\ k = 1, \ldots, n-2,\ z_{n-1} = n_0 v_\infty (1 + b_* H_{1*}) Z_{n-1} - n_0 v_\infty b_* \sin\xi, \tag{6.8.12}$$

система (6.8.10) будет эквивалентна системе

$$\xi' = (1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-1} - b_* \sin\xi, \tag{6.8.13}$$

$$\begin{gathered}
Z_{n-1}' = -\sin\xi\cos\xi +\\
+ (1 + b_* H_{1*})\,(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*} Z_{n-1}\cos\xi,
\end{gathered} \tag{6.8.14}$$

$$\begin{gathered}
Z_{n-2}' = -(1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-2} Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} -\\
-(1 + b_* H_{1*})\,(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + H_{1*} Z_{n-2}\cos\xi,
\end{gathered} \tag{6.8.15}$$

$$\begin{gathered}
Z_{n-3}' = -(1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-3} Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + (1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-3} Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +\\
+ (1 + b_* H_{1*})\,(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} + H_{1*} Z_{n-3}\cos\xi,
\end{gathered} \tag{6.8.16}$$

. . . .

$$\begin{gathered}
Z_1' = -(1 + b_* H_{1*})\, Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1} Z_{n-s}\frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{s-1}}\right\} +\\
+ H_{1*} Z_1\cos\xi,
\end{gathered} \tag{6.8.17}$$

$$\eta_1' = -(1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.8.18}$$

$$\eta_2' = (1 + b_* H_{1*})\, Z_{n-3}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{6.8.19}$$

. . . .

$$\eta'_{n-3} = (-1)^{n+1}\left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-4}}, \tag{6.8.20}$$

$$\eta'_{n-2} = (-1)^{n}\left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3}}, \tag{6.8.21}$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^{n-1}\{(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbb{R}^{2(n-1)}:\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi,\ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\} \tag{6.8.22}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}:\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi,\ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (6.8.13)–(6.8.21) порядка $2(n-1)$ по причине цикличности переменной η_{n-2} выделяется независимая подсистема (6.8.13)–(6.8.20) порядка $2(n-1)-1$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\xi' = \left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_4 - b_* \sin\xi, \tag{6.8.23}$$

$$Z'_4 = -\sin\xi\cos\xi +$$

$$+ \left(1 + b_* H_{1*}\right)\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*} Z_4 \cos\xi, \tag{6.8.24}$$

$$Z'_3 = -\left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_3 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} -$$

$$-\left(1 + b_* H_{1*}\right)\left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + H_{1*} Z_3 \cos\xi, \tag{6.8.25}$$

$$Z'_2 = -\left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_2 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + \left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_2 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +$$

$$+ \left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_1^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} + H_{1*} Z_2 \cos\xi, \tag{6.8.26}$$

$$Z'_1 = -\left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_1 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + \left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_1 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} -$$

$$-\left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_1 Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} + H_{1*} Z_1 \cos\xi, \tag{6.8.27}$$

$$\eta'_1 = -\left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{6.8.28}$$

$$\eta'_2 = \left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{6.8.29}$$

$$\eta'_3 = -\left(1 + b_* H_{1*}\right) Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}, \tag{6.8.30}$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^4\{(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^8:\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \eta_2 \leqslant \pi,\ \eta_3 \bmod 2\pi\} \tag{6.8.31}$$

четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{(\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^4:\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \eta_2 \leqslant \pi,\ \eta_3 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (6.8.23)–(6.8.30) по причине цикличности переменной η_3 выделяется независимая подсистема седьмого порядка (6.8.23)–(6.8.29), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем семимерном многообразии.

6.8.3. Полный список первых интегралов при любом конечном n. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (6.8.13)–(6.8.21) порядка $2(n-1)$ (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (6.8.13)–(6.8.21) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$w_{n-1} = -Z_{n-1},\ w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2},\ w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1},\ w_{n-4} = -\frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}},\ \ldots, \tag{6.8.32}$$

$$w_2 = -\frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}},\ w_1 = -\frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}},$$

система (6.8.13)–(6.8.21) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\xi' = -(1 + b_* H_{1*}) w_{n-1} - b_* \sin\xi, \\ &w'_{n-1} = \sin\xi\cos\xi - (1 + b_* H_{1*}) w_{n-2}^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*} w_{n-1}\cos\xi, \\ &w'_{n-2} = (1 + b_* H_{1*}) w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*} w_{n-2}\cos\xi, \end{aligned}\right\} \tag{6.8.33}$$

$$\left.\begin{aligned} &w'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s}, \\ &\eta'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}),\ s = 1, \ldots, n-3, \end{aligned}\right\} \tag{6.8.34}$$

$$\eta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{6.8.35}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = -(1 + b_* H_{1*}) Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = (1 + b_* H_{1*}) Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = (-1)^n (1 + b_* H_{1*}) Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3}}, \end{gathered} \tag{6.8.36}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1),\ k = 1, \ldots, n-2, \tag{6.8.37}$$

— функции в силу замены (6.8.32).

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\left.\begin{aligned} &\xi' = -(1 + b_* H_{1*}) w_4 - b_* \sin\xi, \\ &w'_4 = \sin\xi\cos\xi - (1 + b_* H_{1*}) w_3^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*} w_4\cos\xi, \\ &w'_3 = (1 + b_* H_{1*}) w_3 w_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*} w_3\cos\xi, \end{aligned}\right\} \tag{6.8.38}$$

$$\left.\begin{aligned} &w'_2 = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \frac{1 + w_2^2}{w_2} \frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \\ &\eta'_2 = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{6.8.39}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1},\\ \eta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3),\end{aligned}\right\} \tag{6.8.40}$$

$$\eta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \tag{6.8.41}$$

где

$$\begin{aligned} &d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = -Z_3(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi} =\\ &= \mp\frac{w_1 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\\ &d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = Z_2(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1} =\\ &= \pm\frac{w_2 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1},\\ &d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = -Z_1(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2} =\\ &= \mp\frac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2},\end{aligned} \tag{6.8.42}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_4, w_3, w_2, w_1),\ k = 1, 2, 3, \tag{6.8.43}$$

— функции в силу замены (6.8.32).

Система (6.8.33)–(6.8.35) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^{n-1}\{(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbb{R}^{2(n-1)} :\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi,\ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\} \tag{6.8.44}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1} :\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi,\ \eta_{n-2} \bmod 2\pi\}$.

В частности, система (6.8.38)–(6.8.41) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^4\{(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^8 :\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \eta_2 \leqslant \pi,\ \eta_3 \bmod 2\pi\} \tag{6.8.45}$$

четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{(\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^4 :\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \eta_2 \leqslant \pi,\ \eta_3 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (6.8.33)–(6.8.35) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.8.33), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (6.8.34) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (6.8.35) на η_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (6.8.38)–(6.8.41) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.8.38), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (6.8.39), (6.8.40) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (6.8.41) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.8.33)–(6.8.35) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.8.33), по одному — для систем (6.8.34) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.8.35) (*т.е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (6.8.38)–(6.8.41) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.8.38), по одному — для систем (6.8.39), (6.8.40) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.8.41) (*т.е. всего пять*).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (6.8.33) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_{n-1}}{d\xi} &= \frac{\sin\xi\cos\xi - (1+b_*H_{1*})w_{n-2}^2\cos\xi/\sin\xi + H_{1*}w_{n-1}\cos\xi}{-(1+b_*H_{1*})w_{n-1} - b_*\sin\xi},\\ \frac{dw_{n-2}}{d\xi} &= \frac{(1+b_*H_{1*})w_{n-2}w_{n-1}\cos\xi/\sin\xi + H_{1*}w_{n-2}\cos\xi}{-(1+b_*H_{1*})w_{n-1} - b_*\sin\xi}.\end{aligned} \tag{6.8.46}$$

Используя замену $\tau = \sin\xi$, перепишем систему (6.8.46) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned} \frac{dw_{n-1}}{d\tau} &= \frac{\tau - (1+b_*H_{1*})w_{n-2}^2/\tau + H_{1*}w_{n-1}}{-(1+b_*H_{1*})w_{n-1} - b_*\tau}, \\ \frac{dw_{n-2}}{d\tau} &= \frac{(1+b_*H_{1*})w_{n-2}w_{n-1}/\tau + H_{1*}w_{n-2}}{-(1+b_*H_{1*})w_{n-1} - b_*\tau}. \end{aligned} \tag{6.8.47}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-1} = u_2\tau,\ w_{n-2} = u_1\tau, \tag{6.8.48}$$

приводим систему (6.8.47) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - (1+b_*H_{1*})u_1^2 + H_{1*}u_2}{-(1+b_*H_{1*})u_2 - b_*}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{(1+b_*H_{1*})u_1u_2 + H_{1*}u_1}{-(1+b_*H_{1*})u_2 - b_*}, \end{aligned} \tag{6.8.49}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{(1+b_*H_{1*})(u_2^2 - u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{-(1+b_*H_{1*})u_2 - b_*}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1+b_*H_{1*})u_1u_2 + (b_* + H_{1*})u_1}{-(1+b_*H_{1*})u_2 - b_*}. \end{aligned} \tag{6.8.50}$$

Сопоставим системе второго порядка (6.8.50) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1+b_*H_{1*})(u_1^2 - u_2^2) + (b_* + H_{1*})u_2}{2(1+b_*H_{1*})u_1u_2 + (b_* + H_{1*})u_1}, \tag{6.8.51}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1+b_*H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{6.8.52}$$

Итак, уравнение (6.8.51) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1+b_*H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{6.8.53}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = \frac{(1+b_*H_{1*})(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) + (b_* + H_{1*})w_{n-1}\sin\xi + \sin^2\xi}{w_{n-2}\sin\xi} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{6.8.54}$$

Замечание 6.8.1. *Рассмотрим систему* (6.8.33) *с переменной диссипацией с нулевым средним* [160, 166, 197], *становящейся консервативной при* $b_* = H_{1*}$*:*

$$\begin{aligned} &\xi' = -(1+b_*^2)w_{n-1} - b_*\sin\xi, \\ &w_{n-1}' = \sin\xi\cos\xi - (1+b_*^2)w_{n-2}^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + b_*w_{n-1}\cos\xi, \\ &w_{n-2}' = (1+b_*^2)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + b_*w_{n-2}\cos\xi. \end{aligned} \tag{6.8.55}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b_*^2)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) + 2b_*w_{n-1}\sin\xi + \sin^2\xi = C_1^* = const, \tag{6.8.56}$$

$$w_{n-2}\sin\xi = C_2^* = const. \tag{6.8.57}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (6.8.56), (6.8.57) *также является первым интегралом системы* (6.8.55). *Но при* $b_* \neq H_{1*}$ *каждая из функций*

$$(1+b_*H_{1*})(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) + (b_* + H_{1*})w_{n-1}\sin\xi + \sin^2\xi \tag{6.8.58}$$

и (6.8.57) *по отдельности не является первым интегралом системы* (6.8.33). *Однако отношение функций* (6.8.58), (6.8.57) *является первым интегралом системы* (6.8.33) *при любых* b_*, H_{1*}.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.8.33). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (6.8.53) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1+b_*H_{1*})}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1+b_*H_{1*})}\right)^2 = \frac{(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4}{4(1+b_*H_{1*})^2}. \tag{6.8.59}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{6.8.60}$$

и фазовое пространство системы (6.8.33) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (6.8.59).

Таким образом, в силу соотношения (6.8.53) первое уравнение системы (6.8.50) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1+b_*H_{1*})u_2^2 + 2(b_*+H_{1*})u_2 + 2 - C_1U_1(C_1,u_2)}{-b_* - (1+b_*H_{1*})u_2}, \tag{6.8.61}$$

где

$$U_1(C_1,u_2) = \frac{1}{2(1+b_*H_{1*})}\{C_1 \pm U_2(C_1,u_2)\}, \tag{6.8.62}$$

$$U_2(C_1,u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})(1+(b_*+H_{1*})u_2 + (1+b_*H_{1*})u_2^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (6.8.60).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (6.8.33) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau} = \\ = \int\frac{(-b_* - (1+b_*H_{1*})u_2)du_2}{2(1+(b_*+H_{1*})u_2 + (1+b_*H_{1*})u_2^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1,u_2)\}/(2(1+b_*H_{1*}))}. \tag{6.8.63}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\xi|. \tag{6.8.64}$$

Если

$$u_2 + \frac{b_*+H_{1*}}{2(1+b_*H_{1*})} = r_1,\ b_1^2 = (b_*-H_{1*})^2 + C_1^2 - 4, \tag{6.8.65}$$

то правая часть равенства (6.8.63) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2)}{(b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2}} + \\ +(b_*-H_{1*})(1+b_*H_{1*})\int\frac{dr_1}{(b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2}} = \\ = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{-b_*+H_{1*}}{2}I_1, \tag{6.8.66}$$

где

$$I_1 = \int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)},\ r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1+b_*H_{1*})r_1^2}. \tag{6.8.67}$$

При вычислении интеграла (6.8.67) возможны три случая.

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4}}\right|+\text{const}. \tag{6.8.68}$$

II. $|b_*-H_{1*}|<2$.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4-(b_*-H_{1*})^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}. \tag{6.8.69}$$

III. $|b_*-H_{1*}|=2$.

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}. \tag{6.8.70}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1=\frac{w_{n-1}}{\sin\xi}+\frac{b_*+H_{1*}}{2(1+b_*H_{1*})}, \tag{6.8.71}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $|b_*-H_{1*}|>2$.

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4}\pm 2(1+b_*H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+b_*H_{1*})^2r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4}\mp 2(1+b_*H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+b_*H_{1*})^2r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(b_*-H_{1*})^2-4}}\right|+\text{const}. \tag{6.8.72}$$

II. $|b_*-H_{1*}|<2$.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4-(b_*-H_{1*})^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+b_*H_{1*})^2r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4(1+b_*H_{1*})^2r_1^2}\pm C_1)}+\text{const}. \tag{6.8.73}$$

III. $|b_*-H_{1*}|=2$.

$$I_1=\mp\frac{2(1+b_*H_{1*})r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4(1+b_*H_{1*})^2r_1^2}\pm C_1)}+\text{const}. \tag{6.8.74}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (6.8.33) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 6.8.2. *В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла* (6.8.53).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1},w_{n-2};\xi)=G\left(\sin\xi,\frac{w_{n-1}}{\sin\xi},\frac{w_{n-2}}{\sin\xi}\right)=C_2=\text{const}. \tag{6.8.75}$$

Итак, найдены два первых интеграла (6.8.54), (6.8.75) независимой системы третьего порядка (6.8.33). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (6.8.34) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.8.35).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (6.7.371), (6.7.372), а именно:

$$\Theta''_{s+2}(w_s;\eta_s)=\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\eta_s}=C_{s+2}=\text{const},\ s=1,\dots,n-3, \tag{6.8.76}$$

$$\Theta''_n(w_{n-3},w_{n-4};\eta_{n-4},\eta_{n-3},\eta_{n-2})=\eta_{n-2}\pm\operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3}-C_{n-1}^2}}=C_n=\text{const}, \tag{6.8.77}$$

при этом в левую часть равенства (6.8.77) вместо C_{n-2},C_{n-1} необходимо подставить интегралы (6.8.76) при $s=n-4,n-3$.

Теорема 6.8.2. *Система* (6.8.33)–(6.8.35) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством (n) независимых первых интегралов* (6.8.54), (6.8.75), (6.8.76), (6.8.77).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (6.8.33)–(6.8.35) имеет n первых интегралов, выражающихся соотношениями (6.8.54), (6.8.75), (6.8.76), (6.8.77) (при этом используются выражения (6.8.63)–(6.8.74)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 6.8.3. *Три группы соотношений* (6.3.1), (6.4.3), (6.5.9) *при условиях* (6.3.6)–(6.3.8), (6.8.4), (6.8.8) *обладают n первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

6.8.4. Топологические аналогии. Предъявим далее еще две группы аналогий, связанных с системой (6.6.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий снова касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (6.6.12). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (6.6.31).

При выполнении условий (6.8.4), (6.8.8) система (6.6.31) примет вид

$$\alpha' = -(1+bH_1)\,Z_{n-1} + b\sin\alpha, \tag{6.8.78}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha -$$
$$-(1+bH_1)\,(Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 Z_{n-1}\cos\alpha, \tag{6.8.79}$$

$$Z'_{n-2} = (1+bH_1)\,Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+$$
$$+(1+bH_1)\,(Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - H_1 Z_{n-2}\cos\alpha, \tag{6.8.80}$$

$$Z'_{n-3} = (1+bH_1)\,Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)\,Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$
$$-(1+bH_1)\,(Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - H_1 Z_{n-3}\cos\alpha, \tag{6.8.81}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z'_1 = (1+bH_1)\,Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} -$$
$$-H_1 Z_1\cos\alpha, \tag{6.8.82}$$

$$\beta'_1 = (1+bH_1)\,Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.8.83}$$

$$\beta'_2 = -(1+bH_1)\,Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{6.8.84}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n\,(1+bH_1)\,Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{6.8.85}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}\,(1+bH_1)\,Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \tag{6.8.86}$$

если ввести безразмерные параметры, переменные и дифференцирование по аналогии с (6.8.9):

$$b=\sigma n_0,\ n_0^2=\frac{AB}{(n-2)I_2},\ H_1=\frac{h_1 B}{(n-2)I_2 n_0},\ z_k=n_0 v Z_k,\ k=1,\ldots,n-1,\ <\cdot>=n_0 v <'>\ . \tag{6.8.87}$$

В частности, при $n=5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -(1+bH_1)\,Z_4 + b\sin\alpha, \tag{6.8.88}$$

$$Z'_4 = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)\,(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 Z_4\cos\alpha, \tag{6.8.89}$$

$$Z'_3 = (1+bH_1)\,Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1+bH_1)\,(Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - H_1 Z_3\cos\alpha, \tag{6.8.90}$$

$$Z_2' = (1+bH_1)\,Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)\,Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - {}$$

$$- (1+bH_1)\,Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - H_1Z_2\cos\alpha, \tag{6.8.91}$$

$$Z_1' = (1+bH_1)\,Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)\,Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + {}$$

$$+ (1+bH_1)\,Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - H_1Z_1\cos\alpha, \tag{6.8.92}$$

$$\beta_1' = (1+bH_1)\,Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.8.93}$$

$$\beta_2' = -\,(1+bH_1)\,Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{6.8.94}$$

$$\beta_3' = (1+bH_1)\,Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{6.8.95}$$

Теорема 6.8.4. *Система* (6.8.78)–(6.8.86) *(для свободного тела) эквивалентна системе* (6.8.13)–(6.8.21) *(для закрепленного маятника).*

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha,\ \eta_1 = \beta_1,\ \ldots,\ \eta_{n-2} = \beta_{n-2},\ b_* = -b,\ H_{1*} = -H_1, \tag{6.8.96}$$

а также сопоставить переменные $Z_k \leftrightarrow -Z_k,\ k = 1,\ldots,n-1$.

Для полного интегрирования системы (6.8.78)–(6.8.86) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов (в частности, для полного интегрирования системы (6.8.88)–(6.8.95) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов). Однако после следующей замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$w_{n-1} = Z_{n-1},\ w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2},\ w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1},\ w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}},\ \ldots, \tag{6.8.97}$$

$$w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2}},\ w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}},$$

система (6.8.78)–(6.8.86) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha' = -(1+bH_1)w_{n-1} + b\sin\alpha, \\ &w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1w_{n-1}\cos\alpha, \\ &w_{n-2}' = (1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1w_{n-2}\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{6.8.98}$$

$$\left.\begin{aligned} &w_s' = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ &\beta_s' = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\ s = 1,\ldots,n-3, \end{aligned}\right\} \tag{6.8.99}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{6.8.100}$$

где

$$\begin{gathered}
d_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = (1+bH_1)Z_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
d_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = -(1+bH_1)Z_{n-3}(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = (-1)^{n+1}(1+bH_1)Z_1(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}},
\end{gathered} \tag{6.8.101}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_{n-1},\ldots,w_1),\ k=1,\ldots,n-2, \tag{6.8.102}$$

— функции в силу замены (6.8.97).

В частности, при $n=5$ система (6.8.88)–(6.8.95) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha' &= -(1+bH_1)w_4 + b\sin\alpha,\\
w_4' &= \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1w_4\cos\alpha,\\
w_3' &= (1+bH_1)w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1w_3\cos\alpha,
\end{aligned}\right\} \tag{6.8.103}$$

$$\left.\begin{aligned}
w_2' &= d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\
\beta_2' &= d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3),
\end{aligned}\right\} \tag{6.8.104}$$

$$\left.\begin{aligned}
w_1' &= d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\\
\beta_1' &= d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3),
\end{aligned}\right\} \tag{6.8.105}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \tag{6.8.106}$$

где

$$\begin{aligned}
&d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (1+bH_1)Z_3(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =\\
&= \pm(1+bH_1)\frac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
&d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = -(1+bH_1)Z_2(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} =\\
&= \mp(1+bH_1)\frac{w_2w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\\
&d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (1+bH_1)Z_1(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} =\\
&= \pm(1+bH_1)\frac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2},
\end{aligned} \tag{6.8.107}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_4,w_3,w_2,w_1),\ k=1,2,3, \tag{6.8.108}$$

— функции в силу замены (6.8.97).

Система (6.8.98)–(6.8.100) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^{n-1}\{(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\in\mathbb{R}^{2(n-1)}:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\ \beta_{n-2}\bmod 2\pi\} \tag{6.8.109}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-1}:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\ \beta_{n-2}\bmod 2\pi\}$.

В частности, система (6.8.103)–(6.8.106) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^4\{(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbb{R}^8:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\ \beta_3\bmod 2\pi\} \tag{6.8.110}$$

четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbb{R}^4:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\ \beta_3\bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (6.8.98)–(6.8.100) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.8.98), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (6.8.99) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (6.8.100) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (6.8.103)–(6.8.106) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.8.103), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (6.8.104), (6.8.105) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (6.8.106) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.8.98)–(6.8.100) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.8.98), по одному — для систем (6.8.99) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.8.100) (*т.е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (6.8.103)–(6.8.106) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.8.103), по одному — для систем (6.8.104), (6.8.105) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.8.106) (*т.е. всего пять*).

Следствие 6.8.1. 1) *Угол атаки* α *и углы* $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$ *для свободного тела эквивалентны соответственно углам отклонения* ξ *и* $\eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$ *закрепленного маятника.*

2) *Расстояние* $\sigma = CD$ *для свободного тела соответствует длине державки* $l = OD$ *закрепленного маятника.*

3) *Первые интегралы системы* (6.8.98)–(6.8.100) *могут быть автоматически получены через равенства* (6.8.54), (6.8.75), (6.8.76), (6.8.77) *после подстановок* (6.8.96) *(см. также* [197]*):*

$$\Theta_1'(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{(1+bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = const. \tag{6.8.111}$$

$$\Theta_2'(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = const. \tag{6.8.112}$$

$$\Theta_{s+2}''(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2} = const, \ \ s = 1, \ldots, n-3, \tag{6.8.113}$$

$$\Theta_n''(w_{n-3}, w_{n-4}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \beta_{n-2} \pm arctg\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = const, \tag{6.8.114}$$

при этом в левую часть равенства (6.8.114) *вместо* C_{n-2}, C_{n-1} *необходимо подставить интегралы* (6.8.113) *при* $s = n-4, n-3$.

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (6.6.39). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (6.6.45)–(6.6.53).

Тогда, в силу условий (6.6.39), (6.8.4), (6.8.8), (6.8.87) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (6.6.46)–(6.6.53)) примет вид аналитической системы

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 Z_{n-1}\cos^2\alpha, \tag{6.8.115}$$

$$Z_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+ bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha +$$

$$+bH_1Z_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_{n-1}\cos\alpha, \tag{6.8.116}$$

$$Z'_{n-2} = (1+bH_1)Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-3}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$
$$+bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha+$$
$$+bH_1Z_{n-2}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_{n-2}\cos\alpha, \tag{6.8.117}$$

$$Z'_{n-3} = (1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-$$
$$-(1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-4}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha+$$
$$+bH_1Z_{n-3}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_{n-3}\cos\alpha, \tag{6.8.118}$$

. . . .

$$Z'_1 = (1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha+$$
$$+bH_1Z_1Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_1\cos\alpha, \tag{6.8.119}$$

$$\beta'_1 = (1+bH_1)Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.8.120}$$

$$\beta'_2 = -(1+bH_1)Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{6.8.121}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n(1+bH_1)Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{6.8.122}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}(1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{6.8.123}$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом:

$$n_1 = n_0. \tag{6.8.124}$$

В частности, при $n=5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha-$$
$$-bH_1Z_4\cos^2\alpha, \tag{6.8.125}$$

$$Z'_4 = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+$$
$$+bZ_4(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha+$$
$$+bH_1Z_4^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_4\cos\alpha, \tag{6.8.126}$$

$$Z'_3 = (1+bH_1)Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1+bH_1)(Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$
$$+bZ_3(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha+$$
$$+bH_1Z_3Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_3\cos\alpha, \tag{6.8.127}$$

$$Z'_2 = (1+bH_1)Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-$$
$$-(1+bH_1)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$

$$+bZ_2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha+ \\ +bH_1Z_2Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_2\cos\alpha, \tag{6.8.128}$$

$$Z_1' = (1+bH_1)Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+ \\ +(1+bH_1)Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+ \\ +bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha+ \\ +bH_1Z_1Z_4\sin\alpha\cos\alpha - H_1Z_1\cos\alpha, \tag{6.8.129}$$

$$\beta_1' = (1+bH_1)Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{6.8.130}$$

$$\beta_2' = -(1+bH_1)Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{6.8.131}$$

$$\beta_3' = (1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{6.8.132}$$

Для полного интегрирования системы (6.8.115)–(6.8.123) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (6.8.97) система (6.8.115)–(6.8.123) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha- \\ &- bH_1w_{n-1}\cos^2\alpha, \\ &w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+ \\ &+ bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha+ \\ &+ bH_1w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1w_{n-1}\cos\alpha, \\ &w_{n-2}' = (1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+ \\ &+ bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha+ \\ &+ bH_1w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1w_{n-2}\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{6.8.133}$$

$$\left.\begin{aligned} &w_s' = d_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\frac{1+w_1^s}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ &\beta_s' = d_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\ \ s=1,\ldots,n-3, \end{aligned}\right\} \tag{6.8.134}$$

$$\beta_{n-2}' = d_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_2), \tag{6.8.135}$$

где выполнены условия (6.8.101).

В частности, при $n=5$ система (6.8.125)–(6.8.132) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha' = -w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha- \\ &- bH_1w_4\cos^2\alpha, \\ &w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+ \\ &+ bw_4(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha+ \\ &+ bH_1w_4^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1w_4\cos\alpha, \\ &w_3' = (1+bH_1)w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+ \\ &+ bw_3(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha+ \\ &+ bH_1w_3w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1w_3\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{6.8.136}$$

$$\left.\begin{aligned} &w_2' = d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ &\beta_2' = d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \end{aligned}\right\} \tag{6.8.137}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned}\right\} \tag{6.8.138}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{6.8.139}$$

где выполнены условия (6.8.107).

Система (6.8.133)–(6.8.135) рассматривается на касательном расслоении (6.8.109) $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}:\ 0 \leqslant \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-3} \leqslant \pi,\ \beta_{n-2} \bmod 2\pi\}$.

В частности, система (6.8.136)–(6.8.139) рассматривается на касательном расслоении (6.8.110) четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4:\ 0 \leqslant \alpha, \beta_1, \beta_2 \leqslant \pi,\ \beta_3 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (6.8.133)–(6.8.135) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.8.133), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (6.8.134) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (6.8.135) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (6.8.136)–(6.8.139) выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.8.136), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (6.8.137), (6.8.138) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (6.8.139) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.8.133)–(6.8.135) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.8.133), по одному — для систем (6.8.134) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.8.135) (*т.е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (6.8.136)–(6.8.139) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (6.8.136), по одному — для систем (6.8.137), (6.8.138) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.8.139) (*т.е. всего пять*).

Если вопрос о первых интегралах системы (6.8.78)–(6.8.86) (или (6.8.98)–(6.8.100)) решается с помощью следствия 6.8.1, то аналогичный вопрос для системы (6.8.115)–(6.8.123) (или (6.8.133)–(6.8.135)) решает следующая теорема 6.8.5.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (6.8.133) имеет следующий вид [197]:

$$\Theta_1''(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{(1+bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{6.8.140}$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.8.133), используя при этом первый интеграл (6.8.140). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные:

$$\tau = \sin\alpha,\ w_{n-1} = u_2\tau,\ w_{n-2} = u_1\tau,\ p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{6.8.141}$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1+bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \tag{6.8.142}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)(1 - (b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0. \tag{6.8.143}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (6.8.142) зависит от произвольной постоянной

C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (6.8.142), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2,\ C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4},\ A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[1 - A_1 u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times$$

$$\times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4) A_1 (A_1 u_2 - 1)},\ C = \mathrm{const}. \tag{6.8.144}$$

Тогда искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\Theta_2''(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{6.8.145}$$

используя при этом обозначения и замены (6.8.141).

Итак, найдены два первых интеграла (6.8.140), (6.8.145) независимой системы третьего порядка (6.8.133). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (6.8.134) (всего $n - 3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (6.8.135).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (6.8.113), (6.8.114), а именно:

$$\Theta_{s+2}'(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2} = \mathrm{const},\ s = 1, \ldots, n - 3, \tag{6.8.146}$$

$$\Theta_n'(w_{n-3}, w_{n-4}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \beta_{n-2} \pm \mathrm{arctg} \frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \mathrm{const}, \tag{6.8.147}$$

при этом в левую часть равенства (6.8.147) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (6.8.146) при $s = n - 4, n - 3$.

Теорема 6.8.5. *n первых интегралов* (6.8.140), (6.8.145), (6.8.146), (6.8.147) *системы* (6.8.133)–(6.8.135) *являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Теорема 6.8.6. *n первых интегралов* (6.8.140), (6.8.145), (6.8.146), (6.8.147) *системы* (6.8.133)–(6.8.135) *эквивалентны n первым интегралам* (6.8.111), (6.8.112), (6.8.113), (6.8.114) *системы* (6.8.98)–(6.8.100).

Действительно, пары первых интегралов (6.8.140), (6.8.111), (6.8.146), (6.8.113) и (6.8.147), (6.8.114) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные $w_k,\ k = 1, \ldots, n-1$, для системы (6.8.133)–(6.8.135) с фазовыми переменными $w_k,\ k = 1, \ldots, n - 1$, для системы (6.8.98)–(6.8.100). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (6.8.145), (6.8.112), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Итак, мы имеем следующие топологичекие и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение закрепленного на (обобщенном) сферическом шарнире многомерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости).

2) Движение многомерного свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи и при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости).

3) Сложное движение многомерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости.

О более общих топологических аналогиях см. также [160, 166, 197].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Некоторое уточнение алгоритма Конвея// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2005. № 3. — С. 53–55.
2. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Феноменологический подход к определению межфазных сил// Докл. РАН. — 2007. — *412*, № 1. — С. 44–47.
3. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Архимедовы равномерные структуры// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 46–51.
4. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Общий спектральный подход к динамике сплошной среды// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 52–70.
5. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Многообразия непрерывных структур// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 71–86.
6. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Группы цветов// Совр. мат. прилож. — 2009. — *62.* — С. 15–27.
7. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Псевдодифференциальные операторы в теории многофазных многоскоростных течений// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65.* — С. 11–30.
8. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Операторы усреднения и реальные уравнения гидромеханики// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65.* — С. 31–47.
9. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Формулы интегрирования десятого порядка точности и выше// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2010. № 4. — С. 3–7.
10. *Андреев А. В., Шамолин М. В.* Математическое моделирование воздействия среды на твердое тело и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. серия. — 2014. — № 10 (121). — С. 109–115.
11. *Андронов А. А.* Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
12. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы// Докл. АН СССР. — 1937. — *14*, № 5. — С. 247–250.
13. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
14. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. Мат. ин-та им В. А. Стеклова АН СССР. — М.: Наука, 1967. — *90.*
15. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1, 2. — М.: Физматгиз, 1960.
16. *Арнольд В. И.* Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела в идеальной жидкости// Усп. мат. наук. — 1969. — *24*, № 3. — С. 225–226.
17. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
18. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики// Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — М.: ВИНИТИ, 1985. — *3.*
19. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.
20. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
21. *Беляев А. В.* О движении многомерного тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести// Мат. сб. — 1981. — *114*, № 3. — С. 465–470.
22. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9.*
23. *Берже М.* Геометрия. Т. I, II. — М.: Мир, 1984.
24. *Бессе А. Л.* Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1981.
25. *Бивин Ю. К., Викторов В. В., Степанов Л. П.* Исследование движения твердого тела в глинистой среде// Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. — 1978. № 2. — С. 159–165.
26. *Бивин Ю. К., Глухов Ю. М., Пермяков Ю. В.* Вертикальный вход твердых тел в воду// Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. — 1985. — № 6. — С. 3–9.
27. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. — М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
28. *Бишоп Р. Л.* Колебания. — М.: Наука, 1986.
29. *Блисс Дж. А.* Лекции по вариационному исчислению. — М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
30. *Богоявленский О. И.* Методы качественной теории динамических систем в асторофизике и газовой динамике. — М.: Наука, 1980.
31. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.

32. *Богоявленский О. И., Ивах Г. Ф.* Топологический анализ интегрируемых случаев В. А. Стеклова// Усп. мат. наук. — 1985. — *40*, № 4. — С. 145—146.
33. *Бойко Г. Л., Ерошин В. А.* Определение перегрузок при ударе профиля о поверхность жидкости// Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. — 1975. — № 1. — С. 35–38.
34. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики// Фундам. прикл. мат. — 1999. — *5*, № 3. — С. 775–790.
35. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2001. — № 1. – С. 29–31.
36. *Браилов А. В.* Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения// Докл. АН СССР. — 1983. — *268*, № 5. — С. 1043–1046.
37. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
38. *Бурбаки Н.* Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
39. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
40. *Буров А. А., Субханкулов Г. И.* О движении твердого тела в магнитном поле// Прикл. мат. мех. — 1986. — *50*, № 6. — С. 960–966.
41. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969.
42. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988.
43. *Бялый М. Л.* О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе// Функц. анал. прилож. — 1987. — *21*, № 4. — С. 64–65.
44. *Валле Пуссен Ш. Ж.* Лекции по теоретической механике. Т. 1.— М.: ИЛ, 1948; Т. 2. — М.: ИЛ, 1949.
45. *Вишик С. В., Должанский С. Ф.* Аналоги уравнений Эйлера—Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли// Докл. АН СССР. — *238*, № 5. — С. 1032–1035.
46. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1960.
47. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
48. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
49. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
50. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65*. — С. 3–10.
51. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 3–10.
52. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
53. *Гледзер Е. Б., Должанский Ф. С., Обухов А. М.* Системы гидродинамического типа и их приложения. — М.: Наука, 1981.
54. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973.
55. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
56. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
57. *Гриффитс Ф.* Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. — М.: Мир, 1986.
58. *Гробман Д. М.* Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве// Мат. сб. — 1962. — *56*, № 1. — С. 77–94.
59. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
60. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа// Докл. АН СССР. — 1984. — *279*, № 2. — С. 294–297.

61. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
62. *Ерошин В. А.* Рикошет пластинки от поверхности идеальной несжимаемой жидкости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1970. — № 6. — С. 99–104.
63. *Ерошин В. А.* Погружение диска в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности// Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. — 1983. — № 2. — С. 142–144.
64. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
65. *Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И, Якимов Ю. Л.* Экспериментальное определение давления на диске при погружении в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности// Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. — 1988. — № 2. — С. 21–25.
66. *Ерошин В. А., Романенков Н. И., Серебряков И. В., Якимов Ю. Л.* Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости// Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. — 1980. — № 6. — С. 44–51.
67. *Жуковский Н. Е.* О падении легких, продолговатых тел, вращающихся вокруг своей продольной оси// Полн. собр. соч. — М.: Физматгиз, 1937. — *5*. — С. 72–80, 100–115.
68. *Жуковский Н. Е.* О парении птиц// Полн. собр. соч. — М.: Физматгиз, 1937. — *5*. — С. 49–59.
69. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология. — М.-Л.: Гостехиздат, 1938.
70. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
71. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. — М.: Наука, 1976.
72. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. — М.: Изд-во МГУ, 1980.
73. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
74. *Козлов В. В.* О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости// Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. — 1989. — № 5. — С. 10–17.
75. *Козлов В. В.* К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1990. — № 1. — С. 79–87.
76. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947.
77. *Левшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1961.
78. *Лич Дж. У.* Классическая механика. — М.: ИЛ, 1961.
79. *Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986.
80. *Лунев В. В.* Гидродинамическая аналогия задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле сил Лоренца// Докл. АН СССР. — 1984. — *276*, № 2. — С. 351–355.
81. *Ляпунов А. М.* Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости// Собр. соч. Т. 1 — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — С. 320–324.
82. *Манин Ю. И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. — М.: ВИНИТИ, 1978. — *11*. — С. 5–112.
83. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981.
84. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.–Л.: Гостехиздат, 1949.
85. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
86. *Одареев В. А.* Декомпозиционный анализ динамики и устойчивости продольного возмущенного движения экраноплана/ Дисс. на соискание уч. степ. докт. наук. — М.: МГАИ, 1995.
87. *Окунев Ю. М., Садовничий В. А.* Модельные динамические системы одной задачи внешней баллистики и их аналитические решения// В сб.: Проблемы современной механики. — М.: Изд-во МГУ. — 1998. — С. 28–46.
88. *Окунев Ю. М., Самсонов В. А., Локшин Б. Я., Досаев М. З., Климина Л. А., Селюцкий Ю. Д., Привалова О. Г., Шамолин М. В., Кобрин А. И.* Проблемы управления движением тел в сплошной среде/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 5103. — М.: Ин-т механики МГУ, 2010.
89. *Окунев Ю. М., Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов комплексных неавтономных уравнений// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65*. — С. 122–131.
90. *Палис Ж., Ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Введение. — М.: Мир, 1986.
91. *Переломов А. М.* Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости// Функц. анал. прилож. — 1981. — *15*, № 2. — С. 83–85.

92. *Поляков Н. Л., Шамолин М. В.* О замкнутых симметричных классах функций, сохраняющих любой одноместный предикат// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2013. — № 6 (107). — С. 61–73.
93. *Поляков Н. Л., Шамолин М. В.* Об одном обобщении теоремы Эрроу// Докл. РАН. — 2014. — *456*, № 2. — С. 143–145.
94. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2012. — № 9 (100). — С. 136–150.
95. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2013. — № 9/1 (110). — С. 35–41.
96. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2014. — № 7 (118). — С. 60–69.
97. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
98. *Пуанкаре А.* Новые методы в небесной механике// *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1971, 1972.
99. *Пуанкаре А.* О науке. — М.: Наука, 1983.
100. *Самсонов В. А.* Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы. — М.: Наука, 1980.
101. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
102. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3969. — М.: Ин-т механики МГУ, 1990.
103. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4141. — М.: Ин-т механики МГУ, 1991.
104. *Самсонов В. А., Шамолин М. В., Ерошин В. А., Макаршин В. М.* Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4396. — М.: Ин-т механики МГУ, 1995.
105. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1983; т. 2. — М.: Наука, 1984.
106. *Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В.* Локальная разрешимость одной задачи со свободной границей// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2011. — № 8 (89). — С. 86–94.
107. *Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В.* Исследование межфазной зоны в одной сингулярно предельной задаче// Совр. мат. прилож. — 2012. — *78*. — С. 109–118.
108. *Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В.* Локальная разрешимость капиллярной задачи// Совр. мат. прилож. — 2012. — *78*. — С. 119–125.
109. *Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В.* Квазистационарная задача Стефана со значениями на фронте, зависящими от его геометрии// Совр. мат. прилож. — 2012. — *78*. — С. 126–134.
110. *Синг Дж. Л.* Классическая динамика. — М.: Физматгиз, 1963.
111. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 1. — С. 113–185.
112. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. — Харьков, 1893.
113. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946.
114. *Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л.* Асимптотическая теория отрывных течений. — М.: Наука, 1987.
115. *Табачников В. Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки// Тр. ЦАГИ. — 1974. — № 1621. — С. 18–24.
116. *Трофимов В. В.* Вложения конечных групп регулярными элементами в компактные группы Ли// Докл. АН СССР. — 1976. — *226*, № 4. — С. 785–786.
117. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
118. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
119. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. — М.: ОНТИ, 1937.
120. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
121. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// В кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
122. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
123. *Шамолин М. В.* Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием/ Дисс. на соискание уч. степ. конд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1991.

124. *Шамолин М. В.* Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1992. — № 2. — С. 52–56.
125. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1992. — № 1. — С. 52–58.
126. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
127. *Шамолин М. В.* Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1993. — № 2. — С. 66–70.
128. *Шамолин М. В.* Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1993. — № 1. — С. 68–71.
129. *Шамолин М. В.* Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде// Докл. РАН. — 1994. — *337*, № 5. — С. 611–614.
130. *Шамолин М. В.* Относительная структурная устойчивость динамических систем задачи движения тела в среде// В сб.: Аналитические, численные и экспериментальные методы в механике. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — С. 14–19.
131. *Шамолин М. В.* Определение относительной грубости и двупараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, № 1. — С. 175–176.
132. *Шамолин М. В.* Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1996. — № 2. — С. 55–63.
133. *Шамолин М. В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой// Докл. РАН. — 1996. — *349*, № 2. — С. 193–197.
134. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1996. — № 4. — С. 57–69.
135. *Шамолин М. В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1997. — № 2. — С. 65–68.
136. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения// Усп. мат. наук. — 1997. — *52*, № 3. — С. 177–178.
137. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
138. *Шамолин М. В.* Методы нелинейного анализа в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// В сб.: CD Proc. of the Congress "Nonlinear Analysis and Its Applications," Moscow, Russia, September 1–5, 1998. — М., 1999. — С. 497–508.
139. *Шамолин М. В.* Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1998— № 6. — С. 29–37.
140. *Шамолин М. В.* Некоторые классы частных решений в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1999. — № 2. — С. 178–189.
141. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
142. *Шамолин М. В.* О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией// Усп. мат. наук. — 1999. — *54*, № 5. — С. 181–182.
143. *Шамолин М. В.* Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2000. — *371*, № 4. — С. 480–483.
144. *Шамолин М. В.* О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек// Усп. мат. наук. — 2000. — *55*, № 3. — С. 187–188.
145. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
146. *Шамолин М. В.* Об устойчивости движения твердого тела в сопротивляющейся среде, закрученного вокруг своей продольной оси// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2001. — № 1. — С. 189–193.
147. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твердого тела// Прикл. мех. — 2001. — *37*, № 6. — С. 74–82.
148. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2001. — № 5. — С. 22–28.

149. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
150. *Шамолин М. В.* Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой// Прикл. мех. — 2004. — *40*, № 4. — С. 137–144.
151. *Шамолин М. В.* Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой/ Дисс. на соискание уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2004.
152. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2004.
153. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 4. — С. 482–485.
154. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
155. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbb{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
156. *Шамолин М. В.* Модельная задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4818. — М.: Ин-т механики МГУ, 2006.
157. *Шамолин М. В.* К задаче о пространственном торможении твердого тела в сопротивляющейся среде// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2006. — № 3. — С. 45–57.
158. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учете вращательных производных момента силы ее воздействия// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2007. — № 3. — С. 187–192.
159. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
160. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
161. *Шамолин М. В.* Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2008. — *418*, № 1. — С. 46–51.
162. *Шамолин М. В.* Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии его со средой// Прикл. мех. — 2007. — *43*, № 10. — С. 49–67.
163. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости// Прикл. мат. мех. — 2008. — *72*, № 2. — С. 273–287.
164. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2008. — № 3. — С. 43–49.
165. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем// Совр. мат. прилож. — 2009. — *62*. — С. 131–171.
166. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. и прикл. матем. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
167. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
168. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электр. модел. — 2009. — *31*, № 1. — С. 97–115.
169. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электр. модел. — 2009. — *31*, № 3. — С. 73–90.
170. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электр. модел. — 2009. — *31*, № 4. — С. 55–66.
171. *Шамолин М. В.* Классификация случаев полной интегрируемости в динамике симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65*. — С. 132–142.
172. *Шамолин М. В.* Об устойчивости прямолинейного поступательного движения// Прикл. мех. — 2009. — *45*, № 6. — С. 125–140.
173. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела// Докл. РАН. — 2010. — *431*, № 3. — С. 339–343.

174. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
175. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электр. модел. — 2010. — *32*, № 1. — С. 45–52.
176. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 5052. — М.: Ин-т механики МГУ, 2010.
177. *Шамолин М. В.* Пространственное движение твердого тела в среде с сопротивлением// Прикл. мех. — 2010. — *46*, № 7. — С. 120–133.
178. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электр. модел. — 2010. — *32*, № 5. — С. 31–44.
179. *Шамолин М. В.* Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 84–99.
180. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
181. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
182. *Шамолин М. В.* Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электр. модел. — 2011. — *33*, № 3. — С. 121–126.
183. *Шамолин М. В.* Динамические инварианты интегрируемых динамических систем с переменной диссипацией// Вестн. Нижегородск. ун-та. — 2011. — № 4, ч. 2. — С. 356–357.
184. *Шамолин М. В.* Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2011. — № 3. — С. 24–30.
185. *Шамолин М. В.* Движение твердого тела в сопротивляющейся среде// Мат. модел. — 2011. — *23*, № 12. — С. 79–104.
186. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
187. *Шамолин М. В.* Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2011. — № 5 (86). — С. 187–189.
188. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
189. *Шамолин М. В.* Некоторые вопросы качественной теории в динамике систем с переменной диссипацией// Совр. мат. прилож. — 2012. — *78*. — С. 138–147.
190. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения твердого тела в сопротивляющейся среде при учете линейного демпфирования// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2012. — № 4. — С. 44–47.
191. *Шамолин М. В.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости// Мат. модел. — 2012. — *24*, № 10. — С. 109–132.
192. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
193. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Автомат. телемех. — 2013. — № 8. — С. 173–190.
194. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
195. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5. — С. 185–186.
196. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в задачах динамики твердого тела, взаимодействующего со средой// Прикл. мех. — 2013. — *49*, № 6. — С. 44–54.
197. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 2013. — *125*. — С. 5–254.

198. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
199. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в пространственной динамике твердого тела в неконсервативном поле сил// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2014. — № 30. — С. 287–350.
200. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле// Докл. РАН. — 2015. — *460*, № 2. — С. 165–169.
201. *Шамолин М. В.* Моделирование движения твердого тела в сопротивляющейся среде и аналогии с вихревыми дорожками// Мат. модел. — 2015. — *27*, № 1. — С. 33–53.
202. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемости в динамике многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле при наличии следящей силы// Фундам. прикл. мат. — 2014. — *19*, № 3. — С. 187–222.
203. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
204. *Шамолин М. В.* Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2015. — № 3. — С. 11–14.
205. *Шамолин М. В., Цыпцын С. В.* Аналитическое и численное исследование траекторий движения тела в сопротивляющейся среде/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4289. — М.: Ин-т механики МГУ, 1993.
206. *Шамолин М. В., Шебаршов Д. В.* Некоторые вопросы геометрии в классической механике/ Деп. в ВИНИТИ РАН 12.05.99. — № 1499–В99.
207. *Шамолин М. В., Шебаршов Д. В.* Методы решения основной задачи дифференциальной диагностики/ Деп. в ВИНИТИ 12.05.99. — № 1500–В99.
208. *Шорыгин О. П., Шульман Н. А.* Вход диска в воду с углом атаки// Уч. зап. ЦАГИ. — 1977. — *8*, № 1. — С.12–21.
209. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.
210. *Якоби К.* Лекции по динамике. — М.-Л.: ОНТИ, 1936.
211. *Aidagulov R. R., Shamolin M. V.* Polynumbers, norms, metrics, and polyingles// J. Math. Sci. — 2015. — *204*, № 6. — C. 742–759.
212. *Aidagulov R. R., Shamolin M. V.* Finsler spaces, bingles, polyingles, and their symmetry groups// J. Math. Sci. — 2015. — *204*, № 6. — C. 732–741.
213. *Aidagulov R. R., Shamolin M. V.* Topology on polynumbers and fractals// J. Math. Sci. — 2015. — *204*, № 6. — C. 760–771.
214. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov// J. Math. Sci. — 2008. — *154*, № 4. — 462–495.
215. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov// J. Math. Sci. — 2009. — *161*, № 5. — C. 603–614.
216. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov// J. Math. Sci. — 2015. — *204*, № 6. — C. 715–731.
217. *Okunev Yu. M., Shamolin M. V.* On the construction of the general solution of a class of complex nonautonomous equations// J. Math. Sci. — 2015. — *204*, № 6. — C. 787–799.
218. *Shamolin M. V.* Three-dimensional structural optimization of controlled rigid motion in a resisting medium// Proc. WCSMO–2, Zakopane, Poland, May 26–30, 1997. — Zakopane, Poland, 1997. — C. 387–392.
219. *Shamolin M. V.* Some classical problems in a three-dimensional dynamics of a rigid body interacting with a medium// Proc. ICTACEM’98, Kharagpur, India, December 1–5, 1998. — Kharagpur, India: Indian Inst. Technology, 1998. — C. 1–11.
220. *Shamolin M. V.* Mathematical modelling of interaction of a rigid body with a medium and new cases of integrability//CD Proc. of ECCOMAS 2000. Barcelona, Spane, September 11–14. — Barcelona, 2000.
221. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — C. 2526–2555.
222. *Shamolin M. V.* New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2003. — *114*, № 1. — C. 919–975.
223. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — *114*, No. 1. — C. 976–1024.

224. *Shamolin M. V.* Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body// J. Math. Sci. — 2004. — *122*, № 1. — C. 2841–2915.
225. *Shamolin M. V.* Structural stable vector fields in rigid body dynamics// Proc. 8th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2005), Lodz, Poland, Dec. 12–15, 2005. — Lodz: Tech. Univ., 2005. — *1*. — C. 429–436.
226. *Shamolin M. V.* The cases of integrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body interacting with a medium// Proc. 9th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2007), Lodz, Poland, Dec. 17–20, 2007. — Lodz: Tech. Univ., 2007. — *1*. — C. 415–422.
227. *Shamolin M. V.* Some methods of analysis of the dynamic systems with various dissipation in dynamics of a rigid body// Proc. Appl. Math. Mech.. — 2008. — *8*. — C. 10137–10138.
228. *Shamolin M. V.* Dynamical systems with variable dissipation: methods and applications// Proc. 10th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2009), Lodz, Poland, Dec. 7–10, 2009. — Lodz: Tech. Univ., 2009. — C. 91–104.
229. *Shamolin M. V.* The various cases of complete integrability in dynamics of a rigid body interacting with a medium// Multibody Dynamics, ECCOMAS Thematic Conf. Warsaw, Poland, 29 June–2 July 2009. — Polish Acad. Sci., Warsaw, 2009.
230. *Shamolin M. V.* New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium// Proc. Appl. Math. Mech. — 2009. — *9*, № 1. — C. 139–140.
231. *Shamolin M. V.* Dynamical systems with various dissipation: background, methods, applications// CD Proc. of XXXVIII Summer School–Conf. “Advances Problems in Mechanics” (APM 2010), July 1–5, 2010, St. Petersburg (Repino), Russia; St. Petersburg, IPME, 2010, pp. 612–621.
232. *Shamolin M. V.* Integrability and nonintegrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body, In: PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.), 10:1, 63–64 (2010).
233. *Shamolin M. V.* Cases of complete integrability in transcendental functions in dynamics and certain invariant indices, In: CD Proc. 5th Intern. Sci. Conf. on Physics and Control PHYSCON 2011, Leon, Spain, September 5–8, 2011; Leon, Spain, 5 p.
234. *Shamolin M. V.* Variety of the cases of integrability in dynamics of a 2D-, 3D-, and 4D-rigid body interacting with a medium, In: Proc. of 11th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2011), Lodz, Poland, Dec. 5–8, 2011; Tech. Univ. Lodz, 2011, pp. 11–24.
235. *Shamolin M. V.* Cases of Complete Integrability in Transcendental Functions in Dynamics and Certain Invariant Indices, In: PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.), 12:1, 43–44 (2012).
236. *Shamolin M. V.* Cases of integrability in transcendental functions in 3D Dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Proc. ECCOMAS Multibody Dynamics 2013, 1–4 July, 2013, University of Zagreb, Croatia; University of Zagreb, 2013, pp. 903–912.
237. *Shamolin M. V.* Variety of the cases of integrability in Dynamics of a symmetric 2D-, 3D- and 4D-rigid body in a nonconservative field, In: Intern. J. Structural Stability and Dynamics, Vol. 13, No. 7 (2013) 1340011 (14 pages).
238. *Shamolin M. V.* Review of Cases of Integrability in Dynamics of Lower- and Multidimensional Rigid Body in a Nonconservative Field of Forces, In: Recent Advances in Mathematics, Statistics and Economics, Proc. of 2014 Intern. EUROPMENT Conf. on Pure Math.–Appl. Math. (PM–AM’14), Venice, Italy, March 15–17, 2014; Venice, pp. 86–102.
239. *Shamolin M. V.* New cases of integrability in multidimensional dynamics in a nonconservative field, In: XLII Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics”, June 30 – July 5, 2014, St. Petersburg (Repino), Russia (APM 2014), CD Proceedings; St. Petersburg, 2014, pp. 435–446.
240. *Shamolin M. V.* On Stability of Certain Key Types of Rigid Body Motion in a Nonconservative Field, In: Proc. 2014 International Simposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2014), Luzern, Switzerland, September 14–18, 2014; Luzern, 2014, pp. 36–39.
241. *Shamolin M. V.* Dynamical Pendulum-Like Nonconservative Systems, In: Applied Non-Linear Dynamical Systems, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 93, 2014, pp. 503–525.
242. *Shamolin M. V.* On stability of certain key types of rigid body motion in a nonconservative field, In: PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.), 14:1, 311–312 (2014).
243. *Shamolin M. V.* Classification of Integrable Cases in the Dynamics of a Four-Dimensional Rigid Body in a Nonconservative Field in the Presence of a Tracking Force, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 204, No. 6, 2015, pp. 808–870.
244. *Shamolin M. V.* Certain Integrable Cases in Dynamics of a Multi-Dimensional Rigid Body in a Nonconservative Field, In: New Developments in Pure and Applied Mathematics, Proc. of Intern. Conf. on

Pure Math.–Appl. Math. (PM–AM'15), Mathematics and Computers in Science and Engineering Series, Vol. 42, Vienna, Austria, March 15–17, 2015; Vienna, pp. 328–342.

245. *Shamolin M. V.* Multidimensional pendulum in a nonconservative force field, In: XLIII Summer School–Conference "Advanced Problems in Mechanics", June 22–27, 2015, St. Petersburg, Russia (APM 2015), Proceedings; St. Petersburg, 2015, pp. 322–332.

М. В. Шамолин
Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin@rambler.ru; shamolin@imec.msu.ru