



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

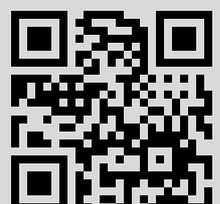
М. В. Шамолин, Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Часть 1, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2017, том 134, 6–128

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 91.188.184.61

25 апреля 2017 г., 14:43:31





МАЛОМЕРНЫЕ И МНОГОМЕРНЫЕ МАЯТНИКИ В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ.

ЧАСТЬ 1

© 2017 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Работа посвящена новым случаям интегрируемости систем на касательном расслоении к конечномерной сфере. К такого рода задачам приводятся системы из динамики многомерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Ключевые слова: закрепленное твердое тело, маятник, многомерное тело, интегрируемая система, система с переменной диссипацией, трансцендентный первый интеграл.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 37E10, 37N05

*Светлой памяти и к 100-летию со дня рождения
моего деда гвардии капитана Николая Николаевича Полозова*

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Введение	9
Глава 2. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на двумерной плоскости	11
2.1. Модельные предположения	12
2.2. Группа динамических уравнений на алгебре Ли $so(2)$	13
2.3. Первая группа кинематических уравнений	14
2.4. Вторая группа кинематических уравнений	14
2.5. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы	15
2.5.1. Неинтегрируемая связь	16
2.5.2. Постоянная скорость центра масс	17
2.6. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости	18
2.6.1. Приведенные системы	18
2.6.2. Общие замечания об интегрируемости системы	19
2.6.3. Трансцендентный первый интеграл	20
2.6.4. Топологические аналогии	21
2.7. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости	23
2.7.1. Введение зависимости от угловой скорости	23
2.7.2. Приведенные системы	24
2.7.3. Трансцендентный первый интеграл	25
2.7.4. Топологические аналогии	25

Глава 3. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в трехмерном пространстве	28
3.1. Модельные предположения	29
3.2. Группа динамических уравнений на алгебре Ли $so(3)$	30
3.2.1. Циклический первый интеграл	31
3.3. Первая группа кинематических уравнений	31
3.4. Вторая группа кинематических уравнений	32
3.5. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы	32
3.5.1. Циклический первый интеграл	34
3.5.2. Неинтегрируемая связь	34
3.5.3. Постоянная скорость центра масс	36
3.6. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости	38
3.6.1. Приведенные системы	38
3.6.2. Общие замечания об интегрируемости системы	39
3.6.3. Полный список первых интегралов	42
3.6.4. Топологические аналогии	46
3.7. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости	48
3.7.1. Введение зависимости от угловой скорости	48
3.7.2. Приведенные системы	49
3.7.3. Полный список первых интегралов	50
3.7.4. Топологические аналогии	54
Глава 4. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в четырехмерном пространстве	57
4.1. Модельные предположения	57
4.2. Группа динамических уравнений на алгебре Ли $so(4)$	59
4.2.1. Циклические первые интегралы	60
4.3. Первая группа кинематических уравнений	61
4.4. Вторая группа кинематических уравнений	61
4.5. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы	62
4.5.1. Циклические первые интегралы	63
4.5.2. Неинтегрируемая связь	64
4.5.3. Постоянная скорость центра масс	66
4.6. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости	68
4.6.1. Приведенные системы	69
4.6.2. Общие замечания об интегрируемости системы	69
4.6.3. Полный список первых интегралов	74
4.6.4. Топологические аналогии	78
4.7. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости	82
4.7.1. Введение зависимости от угловой скорости	82
4.7.2. Приведенные системы	83
4.7.3. Полный список первых интегралов	84
4.7.4. Топологические аналогии	88
Глава 5. Случаи интегрируемости в динамике n -мерного твердого тела в неконсервативном поле при $n = 5$ и $n = 6$	92
5.1. Некоторые общие рассуждения	93
5.1.1. Случаи динамической симметрии пятимерного и шестимерного тела	93
5.1.2. Динамика на $so(n)$ и \mathbb{R}^n	93
5.2. Более общая задача о движении со следящей силой	95

5.3. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости	102
5.3.1. Приведенная система	102
5.3.2. Полный список инвариантных соотношений	105
5.3.3. Топологические аналогии	109
5.4. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости	110
5.4.1. Введение зависимости от угловой скорости	110
5.4.2. Приведенная система	111
5.4.3. Полный список инвариантных соотношений	114
5.4.4. Топологические аналогии	118
Список литературы	119

СОДЕРЖАНИЕ ЧАСТИ 2

(см. т. 135)

Глава 6. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в многомерном пространстве	6
6.1. Модельные предположения	6
6.2. Некоторые общие рассуждения	8
6.2.1. Случаи динамической симметрии многомерного тела	8
6.2.2. Динамика на $so(n)$ и \mathbb{R}^n	8
6.3. Группа динамических уравнений на алгебре Ли $so(n)$	10
6.3.1. Циклические первые интегралы	12
6.4. Первая группа кинематических уравнений	13
6.5. Вторая группа кинематических уравнений	14
6.6. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы	16
6.6.1. Циклические первые интегралы	19
6.6.2. Неинтегрируемая связь	19
6.6.3. Постоянная скорость центра масс	27
6.7. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости	31
6.7.1. Приведенные системы	32
6.7.2. Общие замечания об интегрируемости системы	34
6.7.3. Полный список первых интегралов	40
6.7.4. Структура уравнений на касательных расслоениях к конечномерной сфере	44
6.7.5. Общие замечания об интегрируемости системы при любом конечном n	50
6.7.6. Полный список первых интегралов при любом конечном n	56
6.7.7. Топологические аналогии	60
6.8. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости	67
6.8.1. Введение зависимости от угловой скорости	67
6.8.2. Приведенные системы	68
6.8.3. Полный список первых интегралов при любом конечном n	71
6.8.4. Топологические аналогии	76
Список литературы	84

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

Работа представляет собой развитие результатов по интегрированию уравнений движения маломерного твердого тела, находящегося в некотором поле сил, построенном при условии квазистационарного взаимодействия твердого тела со средой (см., например, [160]).

Построение неконсервативного силового поля, действующего на закрепленное многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных закрепленных твердых тел, находящихся, в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил, поскольку ранее другими авторами использовалось поле сил лишь потенциальное.

Ранее автором была показана интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения закрепленного маятника в потоке набегающей среды при учете зависимости момента сил от угловой скорости тела, когда у системы динамических уравнений был найден в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле комплексного анализа) функцией квазискоростей. При этом все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности, которая имеет форму (одномерной) пластины. Позднее задача была обобщена на пространственный случай (сферический маятник), при этом был найден в явном виде полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части его поверхности, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. Также в дальнейшем исследовались уравнения движения закрепленных четырехмерных твердых тел различных типов динамической симметрии, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску. В работе показана интегрируемость в элементарных функциях совместных уравнений движения динамически симметричного закрепленного многомерного твердого тела под действием неконсервативной пары сил при наличии линейного демпфирующего момента (дополнительной зависимости силового поля от тензора угловой скорости тела).

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получены новые случаи интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов или узлов, предельных циклов).

Во многих задачах многомерной динамики возникают механические системы, пространствами положений которых являются сферы конечной размерности. Соответственно, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к таким сферам. Так, например, физический маятник на цилиндрическом шарнире в плоскопараллельном силовом поле может быть рассмотрен на своем фазовом цилиндре, а изучение пространственного (трехмерного) маятника на сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере.

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики n -мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле породили системы на касательном расслоении к $(n - 1)$ -мерной сфере. В работе будет тщательно разобран индуктивный переход от систем на касательных расслоениях к маломерным сферам до систем на касательных расслоениях к сферам произвольной размерности. При этом исследование начинается для систем при отсутствии силового поля и продолжается системами при наличии некоторых неконсервативных силовых полей (см. также [197]).

В гл. 2 систематизируются результаты по исследованию уравнений плоскопараллельного движения симметричного закрепленного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о плоскопараллельном движении свободного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил). В гл. 2 результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму одномерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

В гл. 3 систематизируются результаты по исследованию уравнений пространственного движения динамически симметричного закрепленного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид также заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о пространственном движении свободного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело также действует неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил). В гл. 3 результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

В гл. 4 систематизируются результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного закрепленного четырехмерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид по-прежнему заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного четырехмерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил).

В гл. 4 результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

В гл. 5 представлен обзор по полученным ранее, а также новым случаям интегрируемости в динамике пятимерного и шестимерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле

сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним.

В гл. 6 систематизируются результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного закрепленного n -мерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид также заимствован из результатов маломерной динамики. Параллельно рассматривается задача о движении свободного n -мерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил).

В гл. 6 результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n - 1)$ -мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

Поскольку предварительные результаты из двумерной и трехмерной динамики движения конкретных твердых тел в средах позволили построить некоторую обобщенную методику исследования динамических систем специального вида, необходимо сослаться на ряд прикладных работ [74, 75, 230, 240, 242].

В данной обзорной работе, тем не менее, не уделено должного внимания такому аспекту, как (абсолютная и относительная) грубость рассматриваемых динамических систем с переменной диссипацией. По данному вопросу автор предлагает ознакомиться с работами [127, 131, 136].

Хотелось также отметить также ряд топологических работ, которые позволили развить качественные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на однородных пространствах [1, 3, 5, 6, 7, 9, 12, 19, 22, 23, 29, 49, 82, 85, 90, 92, 93, 95, 97, 98, 99, 111, 124, 128, 144, 161, 184, 211, 212, 213, 217], а также уравнений с частными производными [106, 108, 109].

Данная тематика также тесно связана с такой областью знаний, как дифференциальная и топологическая диагностика (данный термин введен И. Т. Борисенком и М. В. Шамолиным при рассмотрении так называемых диагностических пространств, хотя в подобных работах прошлого приходится слышать термин «техническая диагностика», см. также [34, 35, 152, 168, 169, 170, 175, 178, 182, 207, 223]).

ГЛАВА 2

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ МАЯТНИКА НА ДВУМЕРНОЙ ПЛОСКОСТИ

В данной главе систематизируются результаты по исследованию уравнений плоскопараллельного движения симметричного закрепленного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о плоскопараллельном движении свободного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи, см. также [13, 15, 101, 102, 113]), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил, см. также [102, 123, 125]).

Ранее в [101, 123] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения закрепленного тела-маятника в однородном потоке набегающей среды в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый

интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

В данной главе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму одномерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

2.1. МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим однородную плоскую пластину AB , симметричную относительно плоскости, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через державку OD . Пластина жестко закреплена перпендикулярно державке OD , находящейся на цилиндрическом шарнире O , и обтекается однородным потоком среды (рис. 1). В этом случае тело представляет собой физический маятник, в котором пластина AB и ось шарнира перпендикулярны плоскости движения. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$, а державка сопротивления не создает.

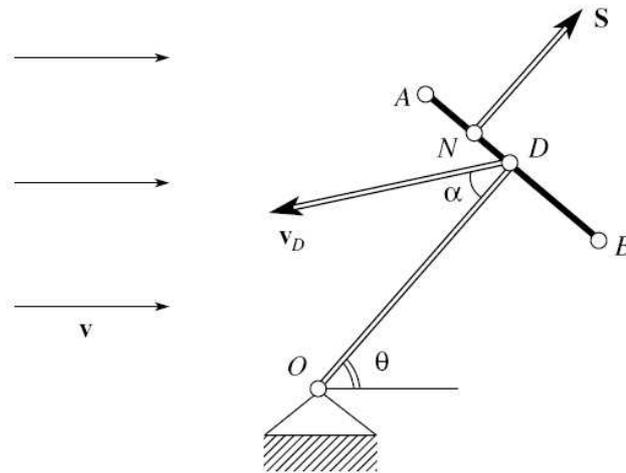


Рис. 1. Закрепленный маятник на цилиндрическом шарнире в потоке набегающей среды

Предположим, что суммарная сила \mathbf{S} воздействия потока среды на пластину направлена параллельно державке, а точка N приложения этой силы определяется, по крайней мере, углом атаки α , который измеряется между вектором скорости \mathbf{v}_D точки D относительно потока и державкой OD (рис. 1, при этом на рисунке показан угол атаки, равный $\pi - \alpha$), а также приведенной угловой скоростью

$$\omega \cong \frac{l\Omega}{v_D}, \quad v_D = |\mathbf{v}_D|$$

(l — длина державки, Ω — алгебраическое значение проекции угловой скорости маятника на ось шарнира). Подобные условия возникают при использовании модели струйного обтекания плоских тел [59, 62, 66, 79, 105].

Таким образом, примем, что сила \mathbf{S} направлена по нормали к пластине в сторону, противоположную направлению скорости \mathbf{v}_D , и проходит через некоторую точку N пластины, смещенную от точки D вверх по потоку (см. также [100, 103, 232]).

Вектор

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{OD}}{l} \tag{2.1.1}$$

определяет ориентацию державки. Тогда

$$\mathbf{S} = -s(\alpha)v_D^2\mathbf{e}, \quad (2.1.2)$$

где

$$s(\alpha) = s_1(\alpha)\text{sign} \cos \alpha, \quad (2.1.3)$$

где коэффициент сопротивления $s_1 \geq 0$ зависит лишь от угла атаки α . В силу свойств симметрии пластины относительно точки D функция $s(\alpha)$ является четной.

Пусть $Dx_1x_2 = Dxy$ — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось $Dx = Dx_1$ имеет направляющий вектор \mathbf{e} (см. (2.1.1)), а ось $Dx_2 = Dy$ сонаправлена с вектором \mathbf{DA} (рис. 1). На этом же рисунке показан и угол отклонения маятника $\theta = \xi$.

Пространством положений такого физического маятника является окружность (одномерная сфера)

$$\mathbb{S}^1\{\xi \in \mathbb{R}^1 : \xi \bmod 2\pi\}, \quad (2.1.4)$$

а фазовым пространством — касательное расслоение окружности

$$T_*\mathbb{S}^1\{(\dot{\xi}; \xi) \in \mathbb{R}^2 : \xi \bmod 2\pi\} \quad (2.1.5)$$

— двумерный цилиндр.

Свяжем с величиной Ω кососимметрическую матрицу

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} \in \text{so}(2). \quad (2.1.6)$$

Расстояние от центра пластины D до центра давления (точки N , рис. 1) будет иметь вид

$$|\mathbf{r}_N| = r_N = DN \left(\alpha, \frac{l\Omega}{v_D} \right), \quad (2.1.7)$$

где

$$\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}\} = \{0, y_N\}$$

в системе $Dx_1x_2 = Dxy$.

Сразу же заметим, что используемая модель воздействия потока среды на закрепленный маятник аналогична построенной модели для свободного тела и в дальнейшем учитывает влияние вращательной производной момента силы воздействия среды по угловой скорости маятника (см. также [33, 63]). Анализ задачи о физическом маятнике в потоке позволит обнаружить качественные аналогии в динамике частично закрепленных и свободных тел.

2.2. ГРУППА ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА АЛГЕБРЕ ЛИ $\text{so}(2)$

Если I — центральный момент инерции тела-маятника, то общее уравнение его движения примет следующий вид:

$$I\dot{\Omega} = DN \left(\alpha, \frac{l\Omega}{v_D} \right) s(\alpha)v_D^2, \quad (2.2.1)$$

поскольку момент силы воздействия среды равен определителю следующей вспомогательной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} \\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.2)$$

где $\{-s(\alpha)v_D^2, 0\}$ — разложение силы \mathbf{S} воздействия среды в системе координат Dx_1x_2 .

Поскольку размерность алгебры Ли $\text{so}(2)$ равна 1, единственное уравнение (2.2.1) и составляет группу динамических уравнений на $\text{so}(2)$, а, попросту говоря, уравнение движения.

Видно, что в правую часть уравнения (2.2.1) прежде всего входит угол атаки, поэтому данное уравнение не является замкнутым. Для того, чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическому уравнению на алгебре Ли $\text{so}(2)$ присоединить несколько групп кинематических уравнений.

2.3. ПЕРВАЯ ГРУППА КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки D (формального центра пластины AB) и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v_D \cdot \mathbf{i}_v(\alpha) = \tilde{\Omega} \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty) \mathbf{i}_v(-\xi), \quad (2.3.1)$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.3.2)$$

Равенство (2.3.1) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат Dx_1x_2 .

Действительно, в левой части равенства (2.3.1) стоит скорость точки D маятника относительно потока в проекциях на связанную с маятником систему координат Dx_1x_2 . При этом вектор $\mathbf{i}_v(\alpha)$ — единичный вектор вдоль оси вектора \mathbf{v}_D . Вектор $\mathbf{i}_v(\alpha)$ является образом единичного вектора вдоль оси Dx_1 , повернутого около вертикали (оси Dx_3) на угол α и имеет разложение (2.3.2).

В правой части равенства (2.3.1) стоит сумма скоростей точки D при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора $\mathbf{OD} = \{l, 0\}$ в системе координат Dx_1x_2 .

На втором слагаемом правой части равенства (2.3.1) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора $(-\mathbf{v}_\infty) = \{-v_\infty, 0\}$ в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат Dx_1x_2 необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол $(-\xi)$, что алгебраически эквивалентно умножению величины $(-v_\infty)$ на вектор $\mathbf{i}_v(-\xi)$.

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (2.3.1) в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_D \cos \alpha &= -v_\infty \cos \xi, \\ v_D \sin \alpha &= l\Omega + v_\infty \sin \xi. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

2.4. ВТОРАЯ ГРУППА КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости $\tilde{\Omega}$ и координаты $\dot{\xi}, \xi$ фазового пространства (2.1.5) исследуемого маятника — касательного расслоения $T_*\mathbb{S}^1\{\dot{\xi}; \xi\}$.

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n, n = 2$, сначала выражается набор, состоящий из фазовой переменной Ω , через новую переменную z_1 (из набора z):

$$\Omega = z_1. \quad (2.4.1)$$

Затем вместо переменной z подставляется следующая зависимость:

$$z_1 = \dot{\xi}. \quad (2.4.2)$$

Таким образом, две группы уравнений (2.4.1) и (2.4.2) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$\Omega = \dot{\xi}. \quad (2.4.3)$$

Видно, что три группы соотношений (2.2.1), (2.3.3), (2.4.3) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят две следующие функции:

$$r_N = DN \left(\alpha, \frac{l\Omega}{v_D} \right), \quad s(\alpha). \quad (2.4.4)$$

При этом функция s считается зависимой лишь от α , а функция $r_N = DN$ может зависеть, наряду с углом α , вообще говоря, и от приведенной угловой скорости $\omega \cong l\Omega/v_D$.

2.5. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ СВОБОДНОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Параллельно рассматриваемой задаче о движении закрепленного тела, рассмотрим плоскопараллельное движение свободного симметричного твердого тела с передним плоским торцом (одномерной пластиной AB) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [79, 87, 114, 115] с той же моделью воздействия среды (рис. 2).

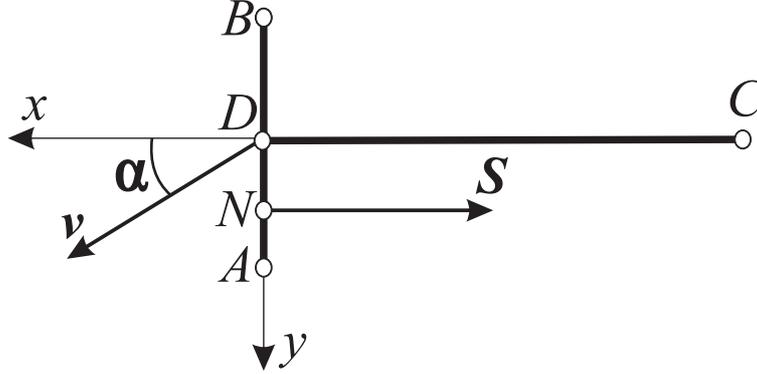


Рис. 2. Плоскопараллельное движение свободного симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде

Если (v, α) — полярные координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр пластины AB), Ω — значение его угловой скорости, I, m — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на пластину отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= \frac{F_x}{m}, \\ \dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

$$I \dot{\Omega} = y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2,$$

где

$$F_x = -S, \quad S = s(\alpha) v^2, \quad \sigma = CD, \quad (2.5.2)$$

при этом

$$\left(0, y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \right) \quad (2.5.3)$$

— координаты точки N приложения силы \mathbf{S} в системе координат $Dx_1x_2 = Dxy$, связанной с телом (рис. 2).

Первые два уравнения системы (2.5.1) описывают движение центра масс на двумерной евклидовой плоскости \mathbb{E}^2 в проекциях на систему координат Dx_1x_2 . При этом $Dx_1 = Dx$ — серединный перпендикуляр к пластине, проходящий через центр масс C симметричного тела, а $Dx_2 = Dy$ — ось, выбранная вдоль пластины. Третье же уравнение системы (2.5.1) получено из теоремы об изменении кинетического момента тела в проекции на ось, перпендикулярную рисунку.

Таким образом, фазовым пространством системы динамических уравнений (2.5.1) третьего порядка является прямое произведение

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \text{so}(2) \quad (2.5.4)$$

двумерного цилиндра на алгебру Ли $\text{so}(2)$. При этом, поскольку сила воздействия среды не зависит от положения тела на плоскости, система динамических уравнений (2.5.1) отделяется от системы кинематических уравнений и может быть рассмотрена самостоятельно (см. также [17, 20, 28, 40, 44]).

2.5.1. Неинтегрируемая связь. Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [101, 110, 132, 138])

$$v \equiv \text{const}, \quad (2.5.5)$$

то в системе (2.5.1) вместо F_x будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2. \quad (2.5.6)$$

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (2.5.5) (см. [150, 156, 160]). Действительно, формально выражая величину T в силу системы (2.5.1), получим при $\cos \alpha \neq 0$:

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = m\sigma\Omega^2 + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right]. \quad (2.5.7)$$

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (2.5.5). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (2.5.1) в результате действий порождает независимую систему второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma\dot{\Omega} &= 0, \\ I\dot{\Omega} &= y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v .

Как видно из (2.5.8), на многообразии

$$O = \left\{ (\alpha, \Omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (2.5.9)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}$. Формально, таким образом, на многообразии (2.5.9) происходит нарушение теоремы единственности.

Из этого следует, что система (2.5.8) вне и только вне многообразия (2.5.9) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\Omega + \frac{\sigma v y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)}{I \cos \alpha}, \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Нарушение теоремы единственности для системы (2.5.8) на многообразии (2.5.9) происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (2.5.9) проходит неособая фазовая траектория системы (2.5.8), пересекая многообразие (2.5.9) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (2.5.5) необходимо выбрать значение T при $\cos \alpha \neq 0$ в виде (2.5.7).

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)}{\cos \alpha} = L \left(\frac{\Omega}{v} \right). \quad (2.5.11)$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right) \right| < +\infty. \quad (2.5.12)$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v \left(\frac{\pi}{2}, \Omega \right) = m\sigma\Omega^2 - \frac{m\sigma Lv^2}{I}. \quad (2.5.13)$$

где значение Ω произвольно.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W евклидовой плоскости \mathbb{E}^2 , необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v \left(\frac{\pi}{2}, \Omega \right) = \frac{mv^2}{R_0}, \quad (2.5.14)$$

где R_0 — расстояние CW .

Равенства (2.5.13) и (2.5.14) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (2.5.9), что и доказывает сделанное замечание.

2.5.2. Постоянная скорость центра масс. Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [102, 112, 119])

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const} \quad (2.5.15)$$

(\mathbf{V}_C — скорость центра масс), то в системе (2.5.1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \quad (2.5.16)$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (2.5.17)$$

Случай (2.5.17) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы второго порядка после некоторого преобразования системы третьего порядка (2.5.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = \tau_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 + \tau_2 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega v + \tau_3 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega^2 = T_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2. \quad (2.5.18)$$

Систему (2.5.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma\Omega^2 \cos \alpha - \sigma \sin \alpha \left[\frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] &= \frac{T_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha)v^2}{m} \cos \alpha, \\ \dot{\alpha} v + \Omega v - \sigma \cos \alpha \left[\frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] - \sigma\Omega^2 \sin \alpha &= \frac{s(\alpha)v^2 - T_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \\ \dot{\Omega} &= \frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Вводя далее новые безразмерные фазовую переменную и дифференцирование по формулам

$$\Omega = n_1 v \omega, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle ' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const}, \quad (2.5.20)$$

приведем систему (2.5.19) к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (2.5.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha + \left[\frac{\sigma}{In_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \cos \alpha - \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{mn_1} \sin \alpha, \\ \omega' &= \frac{1}{In_1^2} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) - \omega \left[\frac{\sigma}{In_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \sigma n_1 \omega^3 \cos \alpha - \\ &\quad - \omega \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{mn_1} \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (2.5.22)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha + \left[\frac{\sigma}{In_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{mn_1} \cos \alpha.$$

Видно, что в системе третьего порядка (2.5.21), (2.5.22) может быть выделена независимая подсистема второго порядка (2.5.22), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем двумерном фазовом цилиндре.

В частности, при выполнении условия (2.5.17) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы второго порядка также возможен.

2.6. СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Выберем функцию \mathbf{r}_N в следующем виде (пластина AB задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \end{pmatrix} = R(\alpha) \mathbf{i}_N, \quad (2.6.1)$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (2.6.2)$$

(см. (2.3.2)). В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6.3)$$

Таким образом, выполнено равенство

$$x_{2N} = R(\alpha), \quad (2.6.4)$$

убеждающее нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от угла α).

Итак, для построения силового поля используется пара функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [121, 122, 126], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B > 0. \quad (2.6.5)$$

2.6.1. Приведенные системы.

Теорема 2.6.1. Совместные уравнения (2.2.1), (2.3.3), (2.4.3) при выполнении условий (2.6.1), (2.6.5) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (2.1.5) одномерной сферы (2.1.4).

Действительно, если ввести безразмерные параметр и дифференцирование:

$$b_* = ln_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v_\infty \langle ' \rangle, \quad (2.6.6)$$

то полученное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\xi'' + b_* \xi' \cos \xi + \sin \xi \cos \xi = 0. \quad (2.6.7)$$

Фазовый портрет уравнения (2.6.7) ($\alpha \leftrightarrow \xi - \pi$, $\Omega \leftrightarrow \xi'$) изображен на рис. 3, при этом положения равновесия на оси абсцисс расположены через $\pi/2$.

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (2.4.2)) к переменным w

$$w_1 = -\frac{1}{n_0 v_\infty} z_1 - b_* \sin \xi, \quad (2.6.8)$$

уравнение (2.6.7) будет эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \xi' &= -w_1 - b_* \sin \xi, \\ w_1' &= \sin \xi \cos \xi, \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

на касательном расслоении

$$T_* \mathbb{S}^1 \{(w_1; \xi) \in \mathbb{R}^2 : \xi \bmod 2\pi\} \quad (2.6.10)$$

одномерной сферы $\mathbb{S}^1 \{\xi \in \mathbb{R}^1 : \xi \bmod 2\pi\}$.

Фазовый портрет системы (2.6.9) ($\alpha \leftrightarrow \xi - \pi$, $\omega \leftrightarrow w_1$) изображен на рис. 4.

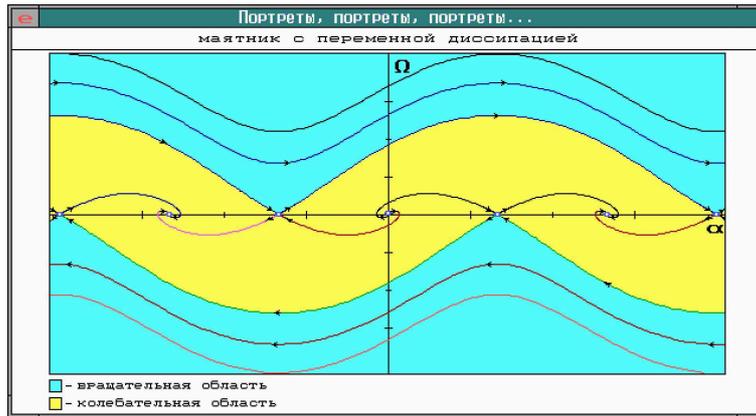


Рис. 3. Фазовый портрет закрепленного маятника на цилиндрическом шарнире в потоке набегающей среды

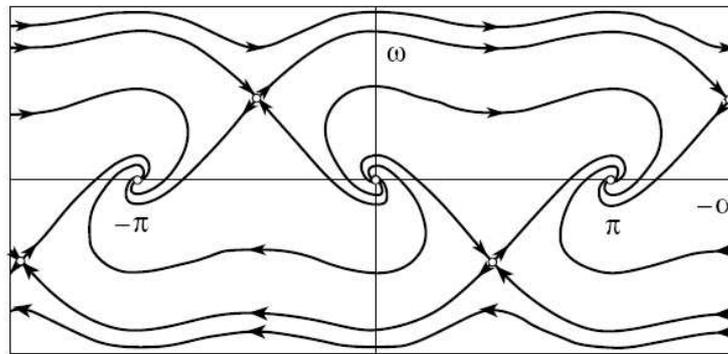


Рис. 4. Динамическая система с переменной диссипацией

2.6.2. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы (2.6.9) второго порядка необходимо знать, вообще говоря, один независимый первый интеграл.

2.6.2.1. Система при отсутствии силового поля. Рассмотрим систему (2.6.9) на касательном расслоении $T_*S^1\{w_1; \xi\}$ одномерной сферы $S^1\{\xi\}$. При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (2.1.7) тождественно равна нулю (в частности, $b_* = 0$, а также коэффициент $\sin \xi \cos \xi$ во втором уравнении системы (2.6.9) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = -w_1, \tag{2.6.11}$$

$$w_1' = 0. \tag{2.6.12}$$

Система (2.6.11), (2.6.12) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Предложение 2.6.1. Система (2.6.11), (2.6.12) обладает одним аналитическим первым интегралом следующего вида:

$$\Phi_1(w_1; \xi) = w_1^2 = C_1 = \text{const}. \tag{2.6.13}$$

Данный первый интеграл (2.6.13) констатирует тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняется (вообще говоря, ненулевая) компонента угловой скорости («двумерного») твердого тела, а именно,

$$\Omega \equiv \Omega^0 = \text{const}. \tag{2.6.14}$$

В частности, наличие первого интеграла (2.6.13) объясняется равенством

$$w_1^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2} \Omega^2 \equiv C_1 = \text{const}. \tag{2.6.15}$$

2.6.2.2. Система при наличии консервативного силового поля. Теперь рассмотрим систему (2.6.9) при условии $b_* = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin \xi \cos \xi$ во втором уравнении системы (2.6.9) (в отличие от системы (2.6.11), (2.6.12)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -w_1, \quad (2.6.16)$$

$$w_1' = \sin \xi \cos \xi. \quad (2.6.17)$$

Итак, система (2.6.16), (2.6.17) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Предложение 2.6.2. Система (2.6.16), (2.6.17) обладает одним аналитическим первым интегралом следующего вида:

$$\Phi_1(w_1; \xi) = w_1^2 + \sin^2 \xi = C_1 = \text{const}. \quad (2.6.18)$$

Первый интеграл (2.6.18) является интегралом полной энергии.

2.6.3. Трансцендентный первый интеграл. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы второго порядка (2.6.9) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Поставим в соответствие системе (2.6.9) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{dw_1}{d\xi} = \frac{\sin \xi \cos \xi}{-w_1 - b_* \sin \xi}. \quad (2.6.19)$$

Используя замену $\tau = \sin \xi$, перепишем уравнение (2.6.19) в алгебраическом виде:

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \frac{\tau}{-w_1 - b_* \tau}. \quad (2.6.20)$$

Далее, вводя однородную переменную по формуле $w_1 = u\tau$, приводим уравнение (2.6.20) к следующей квадратуре:

$$\frac{(-b_* - u)du}{1 + b_*u + u^2} = \frac{d\tau}{\tau}. \quad (2.6.21)$$

Интегрирование квадратуры (2.6.21) приводит к рассмотрению трех случаев. Несложный подсчет приводит к следующим первым интегралам.

I. $b_*^2 - 4 < 0$:

$$\ln(1 + b_*u + u^2) + \frac{2b_*}{\sqrt{4 - b_*^2}} \arctg \frac{2u + b_*}{\sqrt{4 - b_*^2}} + \ln \tau^2 = \text{const}. \quad (2.6.22)$$

II. $b_*^2 - 4 > 0$:

$$\ln |1 + b_*u + u^2| - \frac{b_*}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{2u + b_* + \sqrt{b_*^2 - 4}}{2u + b_* - \sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \ln \tau^2 = \text{const}. \quad (2.6.23)$$

III. $b_*^2 - 4 = 0$:

$$\ln |u - 1| + \frac{1}{u - 1} + \ln |\tau| = \text{const}. \quad (2.6.24)$$

Другими словами, в переменных (ξ, w_1) найденные первые интегралы имеют следующий вид.

I. $b_*^2 - 4 < 0$:

$$\left[\sin^2 \xi + b_* w_1 \sin \xi + w_1^2 \right] \times \exp \left\{ \frac{2b_*}{\sqrt{4 - b_*^2}} \arctg \frac{2w_1 + b_* \sin \xi}{\sqrt{4 - b_*^2} \sin \xi} \right\} = \text{const}. \quad (2.6.25)$$

II. $b_*^2 - 4 > 0$:

$$\left[\sin^2 \xi + b_* w_1 \sin \xi + w_1^2 \right] \times \left| \frac{2w_1 + b_* \sin \xi + \sqrt{b_*^2 - 4} \sin \xi}{2w_1 + b_* \sin \xi - \sqrt{b_*^2 - 4} \sin \xi} \right|^{-b_*/\sqrt{b_*^2 - 4}} = \text{const}. \quad (2.6.26)$$

III. $b_*^2 - 4 = 0$:

$$(w_1 - \sin \xi) \exp \left\{ \frac{\sin \xi}{w_1 - \sin \xi} \right\} = \text{const}. \quad (2.6.27)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (2.6.9) имеет первый интеграл, выражающийся соотношениями (2.6.25)–(2.6.27) (или (2.6.22)–(2.6.24)), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 2.6.2. *Три группы соотношений (2.2.1), (2.3.3), (2.4.3) при условиях (2.6.1), (2.6.5) обладают первым интегралом (полным набором), являющимся трансцендентной функцией с точки зрения комплексного анализа, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций.*

2.6.4. Топологические аналогии. Предъявим далее две группы аналогий, связанных с системой (2.5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (2.5.5). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (2.5.10).

При выполнении условий (2.6.1), (2.6.5) система (2.5.10) примет вид

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + b \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.6.28)$$

если ввести безразмерные параметр, переменную и дифференцирование по аналогии с (2.6.6):

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad \Omega = n_0 v \omega, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle ' \rangle. \quad (2.6.29)$$

Теорема 2.6.3. *Система (2.6.28) (для свободного тела) эквивалентна системе (2.6.9) (для закрепленного маятника).*

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \quad w_1 = \omega, \quad b_* = -b. \quad (2.6.30)$$

Следствие 2.6.1. 1) *Фазовый портрет системы (2.6.28) изображен на рис. 4.*

2) *Угол атаки α для свободного тела (рис. 2) эквивалентен углу отклонения ξ закрепленного маятника (рис. 1).*

3) *Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.*

4) *Первый интеграл системы (2.6.28) может быть автоматически получен через равенства (2.6.22)–(2.6.24) (или (2.6.25)–(2.6.27)) после подстановок (2.6.30) (см. также [36, 56, 72]):*

I. $b^2 - 4 < 0$:

$$\left[\sin^2 \alpha - b \omega \sin \alpha + \omega^2 \right] \times \exp \left\{ -\frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \arctg \frac{2\omega - b \sin \alpha}{\sqrt{4-b^2} \sin \alpha} \right\} = \text{const}. \quad (2.6.31)$$

II. $b^2 - 4 > 0$:

$$\left[\sin^2 \alpha - b \omega \sin \alpha + \omega^2 \right] \times \left| \frac{2\omega - b \sin \alpha + \sqrt{b^2 - 4} \sin \alpha}{2\omega - b \sin \alpha - \sqrt{b^2 - 4} \sin \alpha} \right|^{b/\sqrt{b^2-4}} = \text{const}. \quad (2.6.32)$$

III. $b^2 - 4 = 0$:

$$(\omega - \sin \alpha) \exp \left\{ \frac{\sin \alpha}{\omega - \sin \alpha} \right\} = \text{const}. \quad (2.6.33)$$

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (2.5.15). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (2.5.22).

Тогда, в силу условий (2.5.15), (2.6.1), (2.6.5), (2.6.29) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (2.5.22)) примет вид аналитической системы

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b\omega^2 \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha,\end{aligned}\quad (2.6.34)$$

при этом постоянная n_1 выбирается следующим образом:

$$n_1 = n_0. \quad (2.6.35)$$

Если вопрос о первом интеграле системы (2.6.28) решается с помощью следствия 2.6.1, то аналогичный вопрос для системы (2.6.34) решает теорема 2.6.4 (см. ниже).

Для этого введем следующие обозначения и новые переменные (ср. с [70, 81, 84, 91, 120]):

$$\begin{aligned}C_1 &= 2 - b, \quad C_2 = b > 0, \quad C_3 = -2 - b < 0, \\ u_1 &= \omega - \sin \alpha, \quad v_1 = \omega + \sin \alpha, \quad u_1 = v_1 t_1, \quad v_1^2 = \frac{1}{q_1};\end{aligned}\quad (2.6.36)$$

тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения

$$\frac{dq_1}{dt_1} = a_1(t_1)q_1 + a_2(t_1), \quad (2.6.37)$$

где

$$a_1(t_1) = \frac{2(C_3 t_1 + C_2)}{C_3 t_1^2 - C_1}, \quad a_2(t_1) = \frac{4C_2 t_1}{C_3 t_1^2 - C_1}. \quad (2.6.38)$$

Общее решение уравнения (2.6.37) имеет следующий вид [176, 179, 197]:

I. $b < 2$:

$$q_1(t_1) = k(t_1)(-C_3 t_1^2 + C_1) \exp \left\{ -\frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2+b}{2-b}} t_1 \right\} + \operatorname{const}. \quad (2.6.39)$$

II. $b > 2$:

$$q_1(t_1) = k(t_1)(-C_3 t_1^2 + C_1) \left| \frac{\sqrt{-C_1} + \sqrt{-C_3} t_1}{\sqrt{-C_1} - \sqrt{-C_3} t_1} \right|^{C_2/\sqrt{C_1 C_3}} + \operatorname{const}. \quad (2.6.40)$$

III. $b = 2$:

$$q_1(t_1) = k(t_1) t_1^2 \exp \left\{ \frac{1}{t_1} \right\} + \operatorname{const}. \quad (2.6.41)$$

При этом в случае **I**

$$k(t_1) = -\frac{b}{8} \exp \left\{ \frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \left[\frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \sin 2\zeta - 2 \cos 2\zeta \right] \right\} + \operatorname{const}, \quad \operatorname{tg} \zeta = \sqrt{\frac{2-b}{2+b}} t_1, \quad (2.6.42)$$

в случае **II**

$$k(t_1) = \pm |\zeta|^{b/\sqrt{b^2-4}} \mp \frac{b}{b+2\sqrt{b^2-4}} |\zeta|^{b/\sqrt{b^2-4}+2} + \operatorname{const}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{b-2}{b+2}} \left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right), \quad (2.6.43)$$

и в случае **III**

$$k(t_1) = -2 \frac{t_1 + 1}{t_1} \exp \left\{ -\frac{1}{t_1} \right\}. \quad (2.6.44)$$

Таким образом, равенства (2.6.39)–(2.6.44) позволяют получить искомый первый интеграл системы (2.6.34), используя обозначения и замены (2.6.36).

Теорема 2.6.4. *Первый интеграл системы (2.6.34) является трансцендентной функцией своих фазовых переменных и выражается через конечную комбинацию элементарных функций.*

Ввиду громоздкости вида полученного первого интеграла приведем его лишь в случае **III**:

$$\exp \left\{ \frac{\sin \alpha + \omega}{\sin \alpha - \omega} \right\} \frac{1 - 4\omega \sin \alpha + 4\omega^2}{(\omega - \sin \alpha)^2} = C_1 = \operatorname{const}. \quad (2.6.45)$$

Теорема 2.6.5. *Первый интеграл системы (2.6.28) постоянен на фазовых траекториях системы (2.6.34).*

Доказательство проведем для случая $b = 2$. Действительно, перепишем первый интеграл (2.6.45) системы (2.6.34) в следующем виде:

$$\exp \left\{ \frac{n_0 v \sin \alpha + \Omega}{n_0 v \sin \alpha - \Omega} \right\} \frac{n_0^2 v^2 - 2bn_0 v \Omega \sin \alpha + b^2 \Omega^2}{(\Omega - n_0 v \sin \alpha)^2} = \text{const}. \quad (2.6.46)$$

Видно, что числитель второго множителя пропорционален квадрату скорости центра масс тела \mathbf{V}_C с постоянным коэффициентом n_0^2 . Но, в силу (2.5.15), данная величина постоянна на траекториях системы (2.6.34). Значит, на них постоянна и функция

$$\exp \left\{ \frac{n_0 v \sin \alpha + \Omega}{n_0 v \sin \alpha - \Omega} \right\} \frac{V_C^2}{(\Omega - n_0 v \sin \alpha)^2} = \text{const}. \quad (2.6.47)$$

Возьмем далее степень $(-1/2)$ от левой части равенства (2.6.47) и заключаем, что следующая функция также постоянна на фазовых траекториях системы (2.6.34):

$$\exp \left\{ \frac{\Omega + n_0 v \sin \alpha}{2(\Omega - n_0 v \sin \alpha)} \right\} (\Omega - n_0 v \sin \alpha) = \text{const}. \quad (2.6.48)$$

Теперь, разделив равенство (2.6.48) на \sqrt{e} , получим функцию

$$\exp \left\{ \frac{n_0 v \sin \alpha}{\Omega - n_0 v \sin \alpha} \right\} (\Omega - n_0 v \sin \alpha) = \text{const}, \quad (2.6.49)$$

постоянную на фазовых траекториях системы (2.6.34). Но первый интеграл (2.6.49) полностью аналогичен первому интегралу (2.6.33), что и требовалось.

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1. Движение закрепленного на цилиндрическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).
2. Плоскопараллельное движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).
3. Плоскопараллельное сложное движение твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [18, 89, 96, 118].

2.7. СЛУЧАЙ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

2.7.1. Введение зависимости от угловой скорости. Данная глава посвящена динамике двумерного твердого тела на плоскости. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же, данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на одномерную пластину, $Q = (Q_1, Q_2)$ — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}) = (x_N, y_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [163].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (2.7.1)$$

где $R = (R_1, R_2)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v_D} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (2.7.2)$$

Здесь (h_1, h_2) — некоторые положительные параметры (ср. с [64, 65, 76, 78, 80]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \frac{\Omega}{v_D}. \quad (2.7.3)$$

Таким образом, функция \mathbf{r}_N выбирается в следующем виде (пластина AB задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \end{pmatrix} = R(\alpha) \mathbf{i}_N - \frac{1}{v_D} \tilde{\Omega} h, \quad (2.7.4)$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2} \right), \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.5)$$

(см. (2.1.6), (2.3.2)). В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7.6)$$

Таким образом, выполнено равенство

$$x_{2N} = R(\alpha) - h_1 \frac{\Omega}{v_D}, \quad (2.7.7)$$

убеждающее нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Итак, для построения силового поля также используется пара функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [121, 122], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B > 0. \quad (2.7.8)$$

2.7.2. Приведенные системы.

Теорема 2.7.1. Совместные уравнения (2.2.1), (2.3.3), (2.4.3) при выполнении условий (2.7.4), (2.7.8) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (2.1.5) одномерной сферы (2.1.4).

Действительно, если ввести безразмерные параметры и дифференцирование:

$$b_* = ln_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad H_{1*} = \frac{h_1 B}{In_0}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v_\infty \langle \cdot \rangle', \quad (2.7.9)$$

то полученное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\xi'' + (b_* - H_{1*}) \xi' \cos \xi + \sin \xi \cos \xi = 0. \quad (2.7.10)$$

Фазовый портрет уравнения (2.7.10) ($\alpha \leftrightarrow \xi - \pi$, $\Omega \leftrightarrow \xi'$) при $b_* > H_{1*}$ изображен на рис. 3, при этом положения равновесия на оси абсцисс расположены через $\pi/2$. При $b_* < H_{1*}$ фазовый портрет уравнения (2.7.10) совпадает с фазовым портретом, изображенным на рис. 3, уже без сдвига по оси абсцисс ($\alpha \leftrightarrow \xi$, $\Omega \leftrightarrow \xi'$).

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (2.4.2)) к переменным w

$$w_1 = -\frac{1}{1 + b_* H_{1*}} \left(\frac{1}{n_0 v_\infty} z_1 + b_* \sin \xi \right), \quad (2.7.11)$$

уравнение (2.7.10) будет эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \xi' &= -(1 + b_* H_{1*}) w_1 - b_* \sin \xi, \\ w_1' &= \sin \xi \cos \xi + H_{1*} w_1 \cos \xi. \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

Фазовый портрет системы (2.7.12) ($\alpha \leftrightarrow \xi - \pi$, $\omega \leftrightarrow w_1$) при $b_* > H_{1*}$ изображен на рис. 4. При $b_* < H_{1*}$ фазовый портрет системы (2.7.12) совпадает с фазовым портретом, изображенным на рис. 4, уже без сдвига по оси абсцисс ($\alpha \leftrightarrow \xi$, $\Omega \leftrightarrow \xi'$).

2.7.3. Трансцендентный первый интеграл. Сопоставим системе (2.7.12) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{dw_1}{d\xi} = \frac{\sin \xi \cos \xi + H_{1*} w_1 \cos \xi}{-(1 + b_* H_{1*}) w_1 - b_* \sin \xi}. \quad (2.7.13)$$

Используя замену $\tau = \sin \xi$, перепишем уравнение (2.7.13) в алгебраическом виде

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \frac{\tau + H_{1*} w_1}{-(1 + b_* H_{1*}) w_1 - b_* \tau}. \quad (2.7.14)$$

Далее, вводя однородную переменную по формуле $w_1 = u\tau$, приводим уравнение (2.7.14) к следующей квадратуре:

$$\frac{(-b_* - (1 + b_* H_{1*})u)du}{1 + (b_* + H_{1*})u + (1 + b_* H_{1*})u^2} = \frac{d\tau}{\tau}. \quad (2.7.15)$$

Интегрирование квадратуры (2.7.15) приводит к рассмотрению трех случаев. Несложный подсчет приводит к следующим первым интегралам.

I. $|b_* - H_{1*}| < 2$:

$$\begin{aligned} & \ln(1 + (b_* + H_{1*})u + (1 + b_* H_{1*})u^2) + \\ & + \frac{2b_*}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \operatorname{arctg} \frac{2(1 + b_* H_{1*})u + (b_* + H_{1*})}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} + \ln \tau^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

II. $|b_* - H_{1*}| > 2$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + b_* H_{1*}} \ln |1 + (b_* + H_{1*})u + (1 + b_* H_{1*})u^2| + \ln \tau^2 - \\ & - \frac{b_* \sqrt{1 + b_* H_{1*}}}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \ln \left| \frac{2(1 + b_* H_{1*})^{3/2} u + (b_* + H_{1*}) \sqrt{1 + b_* H_{1*}} + \sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}{2(1 + b_* H_{1*})^{3/2} u + (b_* + H_{1*}) \sqrt{1 + b_* H_{1*}} - \sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| = \\ & = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$:

$$\ln \left| u + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})} \right| - \frac{b_* - H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})u + (b_* + H_{1*})} + \ln |\tau| = \text{const}. \quad (2.7.18)$$

В переменных (ξ, w_1) найденные первые интегралы имеют достаточно громоздкий вид. Тем не менее, в случае **III** мы приведем его в явном виде:

$$\left(w_1 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})} \sin \xi \right) \exp \left\{ \frac{(-b_* + H_{1*}) \sin \xi}{2(1 + b_* H_{1*}) w_1 + (b_* + H_{1*}) \sin \xi} \right\} = \text{const}. \quad (2.7.19)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (2.7.12) имеет первый интеграл, выражающийся соотношениями (2.7.16)–(2.7.18) (или, в частности, в случае **III** (2.7.19)), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 2.7.2. *Три группы соотношений (2.2.1), (2.3.3), (2.4.3) при условиях (2.7.4), (2.7.8) обладают первым интегралом (полным набором), являющимся трансцендентной функцией с точки зрения комплексного анализа, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций.*

2.7.4. Топологические аналогии. Предъявим далее еще две группы аналогий, связанных с системой (2.5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий снова касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (2.5.5). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (2.5.10).

При выполнении условий (2.7.4), (2.7.8) система (2.5.10) примет вид

$$\begin{aligned}\alpha' &= -(1 + bH_1)\omega + b \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - H_1\omega \cos \alpha,\end{aligned}\quad (2.7.20)$$

если ввести безразмерные параметры, переменную и дифференцирование по аналогии с (2.7.9):

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad H_1 = \frac{h_1 B}{In_0}, \quad \Omega = n_0 v \omega, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle. \quad (2.7.21)$$

Теорема 2.7.3. Система (2.7.20) (для свободного тела) эквивалентна системе (2.7.12) (для закрепленного маятника).

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \quad w_1 = \omega, \quad b_* = -b, \quad H_{1*} = -H_1. \quad (2.7.22)$$

Следствие 2.7.1. 1) Фазовый портрет системы (2.7.20) при $b_* > H_{1*}$ изображен на рис. 4. При $b_* < H_{1*}$ фазовый портрет системы (2.7.20) совпадает с фазовым портретом, изображенным на рис. 4, но со сдвигом по оси абсцисс ($\alpha \leftrightarrow \alpha + \pi$).

- 2) Угол атаки α для свободного тела (рис. 2) эквивалентен углу отклонения ξ закрепленного маятника (рис. 1).
- 3) Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.
- 4) Первый интеграл системы (2.7.20) может быть автоматически получен через равенства (2.7.13)–(2.7.15) (или (2.7.16)–(2.7.18)) после подстановок (2.7.22) (см. также [137, 141]).

В переменных (α, ω) найденные первые интегралы имеют достаточно громоздкий вид. Тем не менее, в случае **III** мы приведем его в явном виде:

$$\left(\omega - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)} \sin \alpha \right) \exp \left\{ \frac{(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\omega - (b + H_1) \sin \alpha} \right\} = \text{const}. \quad (2.7.23)$$

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (2.5.15). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (2.5.22).

Тогда в силу условий (2.5.15), (2.7.4), (2.7.8), (2.7.21) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (2.5.22)) примет вид аналитической системы

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b\omega^2 \sin \alpha - bH_1\omega \cos^2 \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha + bH_1\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1\omega \cos \alpha,\end{aligned}\quad (2.7.24)$$

при этом постоянная n_1 выбирается следующим образом:

$$n_1 = n_0. \quad (2.7.25)$$

Если вопрос о первом интеграле системы (2.7.20) решается с помощью следствия 2.7.1, то аналогичный вопрос для системы (2.7.24) решает следующая теорема 2.7.4.

Для этого введем следующие обозначения и новые переменные (ср. с [159, 162]):

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{b}{2} - \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2}, \quad A_2 = 1 + \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} + \frac{H_1}{2} > 0, \quad A_3 = 1 - \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2}, \\ u_1 &= \omega - \sin \alpha, \quad v_1 = \omega + \sin \alpha, \quad u_1 = v_1 t_1, \quad v_1^2 = \frac{1}{q_1};\end{aligned}\quad (2.7.26)$$

тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения

$$\frac{dq_1}{dt_1} = a_1(t_1)q_1 + a_2(t_1), \quad (2.7.27)$$

где

$$a_1(t_1) = \frac{2(A_2 t_1 - A_1)}{A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3}, \quad a_2(t_1) = \frac{2b(-t_1 + H_1(t_1^2 - 1)/4)}{A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3}. \quad (2.7.28)$$

Общее решение уравнения (2.7.27) имеет следующий вид [164, 165]:

I. $|b - H_1| < 2$:

$$q_1(t_1) = k(t_1)(A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3) \times \exp \left\{ -\frac{2(b - bH_1 - H_1)}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{2 + b + bH_1 + H_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} t_1 + \frac{bH_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \right\} \right\}. \quad (2.7.29)$$

II. $|b - H_1| > 2$:

$$q_1(t_1) = k(t_1)(A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3) \times \left| \frac{\sqrt{4 - (b - H_1)^2} + (2 + b + bH_1 + H_1)t_1 + bH_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2} - (2 + b + bH_1 + H_1)t_1 - bH_1} \right|^{(b - bH_1 - H_1)/\sqrt{4 - (b - H_1)^2}}. \quad (2.7.30)$$

III. $|b - H_1| = 2$:

$$q_1(t_1) = k(t_1) \left(t_1 + \frac{bH_1}{2A_2} \right)^2 \exp \left\{ \frac{2(b - H_1)}{(2 + b + bH_1 + H_1)t_1 + bH_1} \right\}. \quad (2.7.31)$$

Для поиска решения неоднородного уравнения (2.7.27), (2.7.28) находится величина k как функция t_1 , выражающаяся через конечную комбинацию элементарных функций. Ввиду громоздкости выкладок дальнейшие рассуждения приводятся лишь в случае **III**.

Таким образом, равенства (2.7.29)–(2.7.31) позволяют получить искомым первый интеграл системы (2.7.24), используя обозначения и замены (2.7.26).

Теорема 2.7.4. *Первый интеграл системы (2.7.24) является трансцендентной функцией своих фазовых переменных и выражается через конечную комбинацию элементарных функций.*

Ввиду громоздкости вида полученного первого интеграла приведем его лишь в случае **III**:

$$\exp \left\{ \frac{-2(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\omega - (b + H_1) \sin \alpha} \right\} \frac{1 - 4\omega \sin \alpha + 4\omega^2}{(\omega - 2 \sin \alpha / (b + H_1))^2} = C_1 = \text{const}. \quad (2.7.32)$$

Теорема 2.7.5. *Первый интеграл системы (2.7.20) постоянен на фазовых траекториях системы (2.7.24).*

Доказательство проведем для случая $|b - H_1| = 2$. Действительно, перепишем первый интеграл (2.7.32) в следующем виде:

$$\exp \left\{ \frac{-2n_0 v (b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\Omega - n_0 v (b + H_1) \sin \alpha} \right\} \frac{n_0^2 v^2 - 4n_0 v \Omega \sin \alpha + 4\Omega^2}{(\Omega - 2n_0 v \sin \alpha / (b + H_1))^2} = \text{const}. \quad (2.7.33)$$

Видно, что числитель второго множителя пропорционален квадрату скорости центра масс тела \mathbf{V}_C с постоянным коэффициентом. Но, в силу (2.5.15), данная величина постоянна на траекториях системы (2.7.24). Значит на них постоянна и функция

$$\exp \left\{ \frac{-2n_0 v (b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\Omega - n_0 v (b + H_1) \sin \alpha} \right\} \frac{V_C^2}{(\Omega - 2n_0 v \sin \alpha / (b + H_1))^2} = \text{const}. \quad (2.7.34)$$

Возьмем далее степень $(-1/2)$ от левой части равенства (2.7.34) и заключаем, что следующая функция также постоянна на фазовых траекториях системы (2.7.24):

$$\exp \left\{ \frac{n_0 v (b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\Omega - n_0 v (b + H_1) \sin \alpha} \right\} (\Omega - 2n_0 v \sin \alpha / (b + H_1)) = \text{const}. \quad (2.7.35)$$

Теперь ясно, что функция (2.7.35) эквивалентна функции (2.7.23), поскольку в случае **III** выполнено следующее равенство:

$$(b + H_1)^2 = 4(1 + bH_1). \quad (2.7.36)$$

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1. Движение закрепленного на цилиндрическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости).

2. Плоскопараллельное движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи и при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости).

3. Плоскопараллельное сложное движение твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости.

О более общих топологических аналогиях см. также [130, 142].

ГЛАВА 3

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ МАЯТНИКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данной главе систематизируются результаты по исследованию уравнений пространственного движения динамически симметричного закрепленного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о пространственном движении свободного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи, см. также [46, 55, 71, 135]), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил, см. также [147, 153, 154]).

Ранее в [102] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения закрепленного тела-маятника в однородном потоке набегающей среды в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [148, 151, 158, 166] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы уравнений движения существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом (сферическим маятником) сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной главе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

3.1. МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим однородный плоский круговой диск \mathcal{D} с центром в точке D , плоскость которого перпендикулярна державке OD . Диск жестко закреплен к державке, находящейся на сферическом шарнире O , и обтекается однородным потоком среды (рис. 5). В этом случае тело представляет собой физический (сферический) маятник. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$, а державка сопротивления не создает.

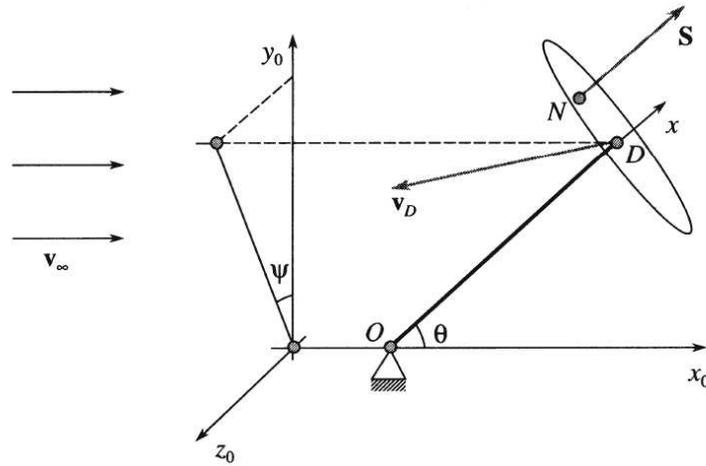


Рис. 5. Закрепленный маятник на сферическом шарнире в потоке набегающей среды

Предположим, что суммарная сила \mathbf{S} воздействия потока среды на диск направлена параллельно державке, а точка N приложения этой силы определяется, по крайней мере, углом атаки α , измеряемым между вектором скорости \mathbf{v}_D точки D относительно потока и державкой OD (рис. 5), углом β_1 , измеряемым в плоскости диска \mathcal{D} (таким образом, (v, α, β_1) — сферические координаты конца вектора \mathbf{v}_D), а также приведенной угловой скоростью

$$\omega \cong \frac{l\Omega}{v_D}, \quad v_D = |\mathbf{v}_D|$$

(l — длина державки, Ω — угловая скорость маятника). Подобные условия возникают при использовании модели струйного обтекания пространственных тел [41, 42, 146, 157].

Таким образом, примем, что сила \mathbf{S} направлена по нормали к диску в сторону, противоположную направлению скорости \mathbf{v}_D , и проходит через некоторую точку N диска так, что вектор скорости \mathbf{v}_D и сила воздействия \mathbf{S} лежат в плоскости ODN (см. также [172, 173]).

Вектор

$$\mathbf{e} = \frac{OD}{l} \quad (3.1.1)$$

определяет ориентацию державки. Тогда

$$\mathbf{S} = s(\alpha)v_D^2\mathbf{e}, \quad (3.1.2)$$

где

$$s(\alpha) = s_1(\alpha)\text{sign} \cos \alpha, \quad (3.1.3)$$

где коэффициент сопротивления $s_1 \geq 0$ зависит лишь от угла атаки α . В силу свойств осевой симметрии тела-маятника относительно точки D функция $s(\alpha)$ является четной.

Пусть $Dx_1x_2x_3 = Dxyz$ — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось $Dx = Dx_1$ имеет направляющий вектор \mathbf{e} (см. (3.1.1)), а оси $Dx_2 = Dy$ и $Dx_3 = Dz$ лежат в плоскости диска \mathcal{D} (рис. 5). На этом же рисунке показаны и $\theta = \xi$, $\psi = \eta_1$ — углы, определяющие положение маятника на сфере. При этом угол θ измеряется между державкой и направлением

набегающего потока (ось x_0), а угол ψ — между проекцией державки на неподвижную плоскость y_0z_0 , перпендикулярную набегающему потоку, и осью y_0 (рис. 5). Очевидно, что углы

$$(\theta, \psi) = (\xi, \eta_1)$$

являются сферическими координатами точки D .

Пространством положений такого сферического (физического) маятника является двумерная сфера

$$\mathbb{S}^2\{(\xi, \eta_1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq \pi, \eta_1 \bmod 2\pi\}, \quad (3.1.4)$$

а фазовым пространством — касательное расслоение двумерной сферы

$$T_*\mathbb{S}^2\{(\dot{\xi}, \dot{\eta}_1; \xi, \eta_1) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq \xi \leq \pi, \eta_1 \bmod 2\pi\}. \quad (3.1.5)$$

Сопоставим угловой скорости $\Omega = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2 + \Omega_3\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — единичные вектора системы координат $Dx_1x_2x_3$) кососимметрическую матрицу

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} \in \mathfrak{so}(3). \quad (3.1.6)$$

Расстояние от центра D диска до центра давления (точки N , рис. 5) будет иметь вид

$$|\mathbf{r}_N| = r_N = DN \left(\alpha, \beta_1, \frac{l\Omega}{v_D} \right), \quad (3.1.7)$$

где

$$\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, x_{3N}\} = \{0, y_N, z_N\}$$

в системе $Dx_1x_2x_3 = Dxyz$ (волну над Ω опустим).

Сразу же заметим, что, также как и в плоском случае, используемая модель воздействия потока среды на закрепленный маятник аналогична построенной модели для свободного тела и в дальнейшем учитывает влияние вращательной производной момента силы воздействия среды по угловой скорости маятника (см. также [177, 186, 190, 191]). Анализ задачи о сферическом (физическом) маятнике в потоке позволит обнаружить качественные аналогии в динамике частично закрепленных и свободных тел.

3.2. ГРУППА ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА АЛГЕБРЕ ЛИ $\mathfrak{so}(3)$

Если $\text{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$ — тензор инерции тела-маятника в системе координат $Dx_1x_2x_3$, то общая система уравнений его движения примет следующий вид:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1 &= 0, \\ I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_3 &= -z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right) s(\alpha)v_D^2, \\ I_2\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 &= y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right) s(\alpha)v_D^2, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

поскольку момент силы воздействия среды определяется через следующую вспомогательную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} \\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.2)$$

где

$$\{-s(\alpha)v_D^2, 0, 0\}$$

— разложение силы \mathbf{S} воздействия среды в системе координат $Dx_1x_2x_3$.

Поскольку размерность алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ равна 3, система уравнений (5.1.8) и составляет группу динамических уравнений на $\mathfrak{so}(3)$, а, попросту говоря, уравнения движения.

Видно, что в правую часть системы уравнений (5.1.8) входят, прежде всего, углы α, β_1 , поэтому данная система уравнений не является замкнутой. Для того, чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическим уравнениям на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$ присоединить несколько групп кинематических уравнений.

3.2.1. Циклический первый интеграл. Сразу же заметим, что система (5.1.8), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3, \quad (3.2.3)$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \text{const.} \quad (3.2.4)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \quad (3.2.5)$$

При условиях (3.2.3)–(3.2.5) система (5.1.8) примет вид незамкнутой системы двух уравнений:

$$\begin{aligned} I_2 \dot{\Omega}_2 &= -z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right) s(\alpha) v_D^2, \\ I_2 \dot{\Omega}_3 &= y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right) s(\alpha) v_D^2. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

3.3. ПЕРВАЯ ГРУППА КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки D (центра диска \mathcal{D}) и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v_D \cdot \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1) = \tilde{\Omega} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty) \mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1), \quad (3.3.1)$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta_1 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Равенство (5.1.11) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3$.

Действительно, в левой части равенства (5.1.11) стоит скорость точки D маятника относительно потока в проекциях на связанную с маятником систему координат $Dx_1x_2x_3$. При этом вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1)$ — единичный вектор вдоль оси вектора \mathbf{v}_D . Вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1)$ имеет сферические координаты $(1, \alpha, \beta_1)$, определяющие разложение (5.2.30).

В правой части равенства (5.1.11) стоит сумма скоростей точки D при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора $\mathbf{OD} = \{l, 0, 0\}$ в системе координат $Dx_1x_2x_3$.

На втором слагаемом правой части равенства (5.1.11) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора $(-v_\infty) = \{-v_\infty, 0, 0\}$ в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3$ необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол $(-\xi)$, что алгебраически эквивалентно умножению величины $(-v_\infty)$ на вектор $\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1)$.

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (5.1.11) в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_D \cos \alpha &= -v_\infty \cos \xi, \\ v_D \sin \alpha \cos \beta_1 &= l\Omega_3 + v_\infty \sin \xi \cos \eta_1, \\ v_D \sin \alpha \sin \beta_1 &= -l\Omega_2 + v_\infty \sin \xi \sin \eta_1. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

3.4. ВТОРАЯ ГРУППА КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости $\tilde{\Omega}$ и координаты $\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \xi, \eta_1$ фазового пространства (3.1.5) исследуемого маятника — касательного расслоения $T_*\mathbb{S}^2\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1; \xi, \eta_1\}$.

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n, n = 3$, сначала выражается набор, состоящий из фазовых переменных Ω_2, Ω_3 , через новые переменные z_1, z_2 (из набора z). Для этого производится следующий поворот на угол η_1 :

$$\begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (3.4.1)$$

где

$$T_{1,2}(\eta_1) = \begin{pmatrix} \cos \eta_1 & -\sin \eta_1 \\ \sin \eta_1 & \cos \eta_1 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-\eta_1) \begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}, \quad (3.4.2)$$

т.е.

$$\begin{aligned} z_1 &= \Omega_2 \cos \eta_1 + \Omega_3 \sin \eta_1, \\ z_2 &= -\Omega_2 \sin \eta_1 + \Omega_3 \cos \eta_1. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Затем вместо группы переменных z подставляется следующая зависимость:

$$\begin{aligned} z_2 &= \dot{\xi}, \\ z_1 &= -\dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi}. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Таким образом, две группы уравнений (3.4.1) и (5.1.14) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= -\dot{\xi} \sin \eta_1 - \dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \cos \eta_1, \\ \Omega_3 &= \dot{\xi} \cos \eta_1 - \dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Видно, что три группы соотношений (3.2.6), (5.1.13), (5.1.17) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят следующие функции:

$$y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right), \quad z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right), \quad s(\alpha). \quad (3.4.6)$$

При этом функция s считается зависимой лишь от α , а функции y_N, z_N могут зависеть, наряду с углами α, β_1 , вообще говоря, и от приведенной угловой скорости $\omega \cong l\Omega/v_D$.

3.5. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ СВОБОДНОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Параллельно рассматриваемой задаче о движении закрепленного тела, рассмотрим пространственное движение свободного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (круговым диском \mathcal{D}) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [59, 67, 104, 122] с той же моделью воздействия среды (рис. 6).

Если (v, α, β_1) — сферические координаты вектора скорости центра D диска \mathcal{D} , лежащего на оси симметрии тела, $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — проекции его угловой скорости на оси системы координат $Dx_1x_2x_3$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью $Dx_1 = Dx$ (C — центр масс, рис. 6), а оси $Dx_2 = Dy, Dx_3 = Dz$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, m$ —

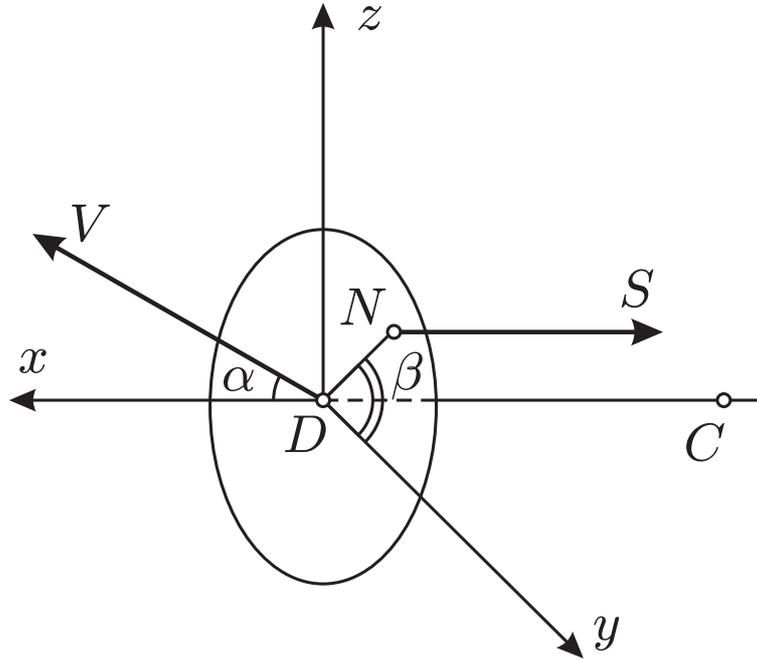


Рис. 6. Пространственное движение свободного динамически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде

инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \Omega_3 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) &= \frac{F_x}{m}, \\
 \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_3 v \cos \alpha - \\
 - \Omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \sigma \Omega_1 \Omega_2 - \sigma \dot{\Omega}_3 &= 0, \\
 \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \Omega_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\
 - \Omega_2 v \cos \alpha - \sigma \Omega_1 \Omega_3 + \sigma \dot{\Omega}_2 &= 0, \\
 I_1 \dot{\Omega}_1 &= 0, \\
 I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_3 &= -z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \\
 I_2 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 &= y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2,
 \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

где

$$F_x = -S, \quad S = s(\alpha) v^2, \quad \sigma = CD, \tag{3.5.2}$$

при этом

$$\left(0, y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right), z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right) \tag{3.5.3}$$

— координаты точки N приложения силы \mathbf{S} в системе координат $Dx_1x_2x_3 = Dxyz$, связанной с телом (рис. 6, на котором $\beta = \beta_1$).

Первые три уравнения системы (3.5.1) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{E}^3 в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3$. Вторые же три уравнения системы (3.5.1) получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом, фазовым пространством системы динамических уравнений (3.5.1) шестого порядка является прямое произведение

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^2 \times \text{so}(3) \tag{3.5.4}$$

трехмерного многообразия на алгебру Ли $\mathfrak{so}(3)$. При этом, поскольку сила воздействия среды не зависит от положения тела в пространстве, система динамических уравнений (3.5.1) *отделяется от системы кинематических уравнений* и может быть рассмотрена самостоятельно (см. также [149]).

3.5.1. Циклический первый интеграл. Сразу же заметим, что система (3.5.1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3, \quad (3.5.5)$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \text{const}. \quad (3.5.6)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \quad (3.5.7)$$

3.5.2. Неинтегрируемая связь. Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [183])

$$v \equiv \text{const}, \quad (3.5.8)$$

то в системе (3.5.1) вместо F_x будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2. \quad (3.5.9)$$

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (5.2.26) [185, 193]. Действительно, формально выражая величину T в силу системы (3.5.1), получим при $\cos \alpha \neq 0$:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = m\sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma \sin \alpha}{I_2 \cos \alpha} \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right] \right]. \quad (3.5.10)$$

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (5.2.26). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (3.5.1) в результате действий порождает независимую систему четвертого порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_3 v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega}_3 &= 0, \\ \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \Omega_2 v \cos \alpha + \sigma \dot{\Omega}_2 &= 0, \\ I_2 \dot{\Omega}_2 &= -z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\ I_2 \dot{\Omega}_3 &= y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v .

Система (3.5.11) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} v \cos \alpha + v \cos \alpha [\Omega_3 \cos \beta_1 - \Omega_2 \sin \beta_1] + \sigma [-\dot{\Omega}_3 \cos \beta_1 + \dot{\Omega}_2 \sin \beta_1] &= 0, \\ \dot{\beta}_1 v \sin \alpha - v \cos \alpha [\Omega_2 \cos \beta_1 + \Omega_3 \sin \beta_1] + \sigma [\dot{\Omega}_2 \cos \beta_1 + \dot{\Omega}_3 \sin \beta_1] &= 0, \\ \dot{\Omega}_2 &= -\frac{v^2}{I_2} z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\ \dot{\Omega}_3 &= \frac{v^2}{I_2} y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Введем новые квазискорости в системе:

$$\begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = T_{1,2}(\beta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (3.5.13)$$

где

$$T_{1,2}(\beta_1) = \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-\beta_1) \begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}, \quad (3.5.14)$$

т.е.

$$\begin{aligned} z_1 &= \Omega_2 \cos \beta_1 + \Omega_3 \sin \beta_1, \\ z_2 &= -\Omega_2 \sin \beta_1 + \Omega_3 \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Как видно из (5.2.31), на многообразии

$$O = \left\{ (\alpha, \beta_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (3.5.16)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}_1$. Формально, таким образом, на многообразии (5.2.50) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат (v, α, β_1) , а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (5.2.31) вырождается.

Из этого следует, что система (3.5.11) вне и только вне многообразия (5.2.50) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_2 + \frac{\sigma v s(\alpha)}{I_2 \cos \alpha} \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right], \\ \dot{z}_2 &= \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right] - \\ &- z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v s(\alpha)}{I_2 \sin \alpha} z_1 \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right], \\ \dot{z}_1 &= z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \left[-\frac{v^2}{I_2} s(\alpha) + \frac{\sigma v s(\alpha)}{I_2 \sin \alpha} z_2 \right] \times \\ &\times \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right], \\ \dot{\beta}_1 &= z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma v s(\alpha)}{I_2 \sin \alpha} \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right]. \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, z_1/v, z_2/v)$ в силу (5.2.32).

Нарушение теоремы единственности для системы (5.2.31) на многообразии (5.2.50) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (5.2.50) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (3.5.17), пересекая многообразие (5.2.50) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (5.2.26) необходимо выбрать значение T при $\cos \alpha \neq 0$ в виде (5.2.28).

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{\left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right] s(\alpha)}{\cos \alpha} = L \left(\beta_1, \frac{\Omega}{v} \right). \quad (3.5.18)$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right] s(\alpha) \right) \right| < +\infty. \quad (3.5.19)$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \Omega \right) = m\sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - \frac{m\sigma Lv^2}{I_2}. \quad (3.5.20)$$

где значения Ω_2, Ω_3 — произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W евклидова пространства \mathbb{E}^3 , необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \Omega \right) = \frac{mv^2}{R_0}, \quad (3.5.21)$$

где R_0 — расстояние CW .

Равенства (5.2.61) и (5.2.62) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (5.2.50), что и доказывает сделанное замечание.

3.5.3. Постоянная скорость центра масс. Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [197])

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const} \quad (3.5.22)$$

(\mathbf{V}_C — скорость центра масс), то в системе (3.5.1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \quad (3.5.23)$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (3.5.24)$$

Случай (3.5.24) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы четвертого порядка после некоторого преобразования системы (3.5.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = \sum_{i,j=0, i \leq j}^3 \tau_{i,j} \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega_i \Omega_j = T_1 \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \Omega_0 = v. \quad (3.5.25)$$

Введем для начала новые квазискорости (3.5.13)–(5.2.32).

Систему (3.5.1) в случаях (3.5.5)–(3.5.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \dot{v} + \sigma(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \\ & - \sigma \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \sin \alpha \left[y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = \\ & = \frac{T_1 \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha)v^2}{m} \cos \alpha, \\ & \dot{\alpha} v + z_2 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2) \sin \alpha - \\ & - \sigma \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \cos \alpha \left[y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = \\ & = \frac{s(\alpha)v^2 - T_1 \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \\ & \dot{\Omega}_3 = \frac{v^2}{I_2} y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_2 &= -\frac{v^2}{I_2} z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\ &\quad \dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_1 \cos \alpha - \\ &\quad - \frac{\sigma v}{I_2} s(\alpha) \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = 0. \end{aligned}$$

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, 2, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const}, \quad (3.5.27)$$

система (3.5.26) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \quad (3.5.28)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \\ &\quad + \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] - \\ &\quad - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= \frac{s(\alpha)}{I_2 n_1^2} [1 - \sigma n_1 Z_2 \sin \alpha] [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] - \\ &\quad - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ &\quad - \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] - \\ &\quad - Z_2 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= \frac{1}{I_2 n_1^2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [\sigma n_1 Z_2 \sin \alpha - 1] [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] + \\ &\quad + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\ &\quad - \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 s(\alpha) \sin \alpha [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1 + y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1] - \\ &\quad - Z_1 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

$$\begin{aligned} \beta_1' &= Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &\quad + \frac{\sigma}{I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1], \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) &= -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \\ &\quad + \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] + \\ &\quad + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Видно, что в системе пятого порядка (3.5.28)–(3.5.32) может быть выделена независимая подсистема четвертого порядка (3.5.29)–(3.5.32), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем четырехмерном фазовом пространстве.

В частности, при выполнении условия (3.5.24) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы четвертого порядка также возможен.

3.6. СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Выберем функцию \mathbf{r}_N в следующем виде (диск \mathcal{D} задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ x_{3N} \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \quad (3.6.1)$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1 \right) \quad (3.6.2)$$

(см. (5.2.30)).

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.3)$$

Таким образом, выполнены равенства

$$x_{2N} = R(\alpha) \cos \beta_1, \quad x_{3N} = R(\alpha) \sin \beta_1, \quad (3.6.4)$$

убеждающие нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, β_1).

Итак, для построения силового поля используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [121, 122, 199], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B > 0. \quad (3.6.5)$$

3.6.1. Приведенные системы.

Теорема 3.6.1. Совместные уравнения (5.1.8), (5.1.13), (5.1.17) при выполнении условий (3.2.3)–(3.2.5), (3.6.1), (3.6.5) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (3.1.5) двумерной сферы (3.1.4).

Действительно, если ввести безразмерные параметр и дифференцирование:

$$b_* = ln_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v_\infty \langle ' \rangle, \quad (3.6.6)$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi'' + b_* \xi' \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - \eta_1^2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} &= 0, \\ \eta_1'' + b_* \eta_1' \cos \xi + \xi' \eta_1' \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} &= 0, \quad b_* > 0. \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

Фазовый портрет системы (3.6.7) ($\xi \leftrightarrow \theta, \eta_1 \leftrightarrow \psi$) изображен на рис. 7.

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (5.1.14)) к переменным w

$$\begin{aligned} w_2 &= -\frac{1}{n_0 v_\infty} z_2 - b_* \sin \xi, \\ w_1 &= -\frac{1}{n_0 v_\infty} z_1, \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

система (3.6.7) будет эквивалентна системе

$$\begin{cases} \xi' = -w_2 - b_* \sin \xi, \\ w_2' = \sin \xi \cos \xi - w_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ w_1' = w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \end{cases} \quad (3.6.9)$$

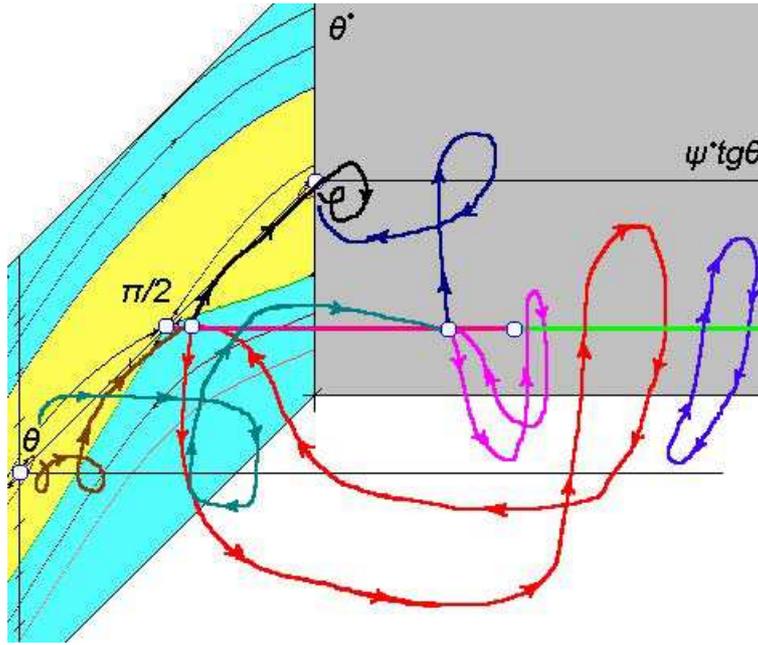


Рис. 7. Фазовый портрет закрепленного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды

$$\eta_1' = w_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (3.6.10)$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^2\{(w_2, w_1; \xi, \eta_1) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq \xi \leq \pi, \eta_1 \bmod 2\pi\} \quad (3.6.11)$$

двумерной сферы $\mathbb{S}^2\{(\xi, \eta_1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq \pi, \eta_1 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе четвертого порядка (3.6.9), (3.6.10) по причине цикличности переменной η_1 выделяется независимая подсистема третьего порядка (3.6.9), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии.

3.6.2. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы (3.6.9), (3.6.10) четвертого порядка необходимо знать, вообще говоря, три независимых первых интеграла.

3.6.2.1. Система при отсутствии силового поля. Рассмотрим систему (3.6.9), (3.6.10) на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^2\{w_2, w_1; \xi, \eta_1\}$ двумерной сферы $\mathbb{S}^2\{\xi, \eta_1\}$. При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (3.1.7) тождественно равна нулю (в частности, $b_* = 0$, а также коэффициент $\sin \xi \cos \xi$ во втором уравнении системы (3.6.9) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = -w_2, \quad (3.6.12)$$

$$w_2' = -w_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (3.6.13)$$

$$w_1' = w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (3.6.14)$$

$$\eta_1' = w_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}. \quad (3.6.15)$$

Система (3.6.12)–(3.6.15) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 3.6.2. Система (3.6.12)–(3.6.15) обладает тремя независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = C_1 = \text{const}, \quad (3.6.16)$$

$$\Phi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = w_1 \sin \xi = C_2 = \text{const}, \quad (3.6.17)$$

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_3 = \text{const}. \quad (3.6.18)$$

Два первых интеграла (5.3.31), (3.6.17) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются две (вообще говоря, ненулевые) компоненты угловой скорости трехмерного твердого тела, а именно:

$$\Omega_2 \equiv \Omega_2^0 = \text{const}, \quad \Omega_3 \equiv \Omega_3^0 = \text{const}. \quad (3.6.19)$$

В частности, наличие первого интеграла (5.3.31) объясняется равенством

$$w_1^2 + w_2^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2} [\Omega_2^2 + \Omega_3^2] \equiv C_1^2 = \text{const}. \quad (3.6.20)$$

Третий первый интеграл (3.6.18) имеет кинематический смысл, “привязывает” уравнение на η_1 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{dw_1}{d\eta_1} = w_2, \quad (3.6.21)$$

при этом если воспользоваться уровнем первого интеграла (5.3.31)

$$\int d\eta_1 = \pm \int \frac{dw_1}{\sqrt{C_1^2 - w_1^2}}, \quad (3.6.22)$$

то искомое равенство примет вид

$$\eta_1 + C_3 = \pm \arcsin \frac{w_1}{C_1} = \pm \arcsin \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}, \quad (3.6.23)$$

откуда

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \eta_1 \mp \arcsin \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} = C_3. \quad (3.6.24)$$

Теперь перефразируем теорему 3.6.2.

Теорема 3.6.3. Система (3.6.12)–(3.6.15) обладает тремя независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Psi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{w_1^2 + w_2^2}{w_1 \sin \xi} = C'_1 = \text{const}, \quad (3.6.25)$$

$$\Psi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C'_2 = \text{const}, \quad (3.6.26)$$

$$\Psi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C'_3 = \text{const}. \quad (3.6.27)$$

Первый интеграл (3.6.27) также имеет кинематический смысл и “привязывает” уравнение на η_1 , а функции Ψ_2, Ψ_3 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_3 .

В формулировке теоремы 3.6.3 (в отличие от теоремы 3.6.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (3.6.25)–(3.6.27) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 3.6.3 преобразованный набор первых интегралов (3.6.25)–(3.6.27) системы (3.6.12)–(3.6.15) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

3.6.2.2. Система при наличии консервативного силового поля. Теперь рассмотрим систему (3.6.9), (3.6.10) при условии $b_* = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin \xi \cos \xi$ во втором уравнении системы (3.6.9) (в отличие от системы (3.6.12)–(3.6.15)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -w_2, \quad (3.6.28)$$

$$w_2' = \sin \xi \cos \xi - w_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (3.6.29)$$

$$w_1' = w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (3.6.30)$$

$$\eta_1' = w_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}. \quad (3.6.31)$$

Итак, система (3.6.28)–(3.6.31) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 3.6.4. Система (3.6.28)–(3.6.31) обладает тремя независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = w_1^2 + w_2^2 + \sin^2 \xi = C_1 = const, \quad (3.6.32)$$

$$\Phi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = w_1 \sin \xi = C_2 = const, \quad (3.6.33)$$

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_3 = const. \quad (3.6.34)$$

Первый интеграл (3.6.32) является интегралом полной энергии. Первый интеграл (3.6.34) имеет кинематический смысл, “привязывает” уравнение на η_1 и может быть найден аналогичным образом.

Действительно, искомый интеграл может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{dw_1}{d\eta_1} = w_2, \quad (3.6.35)$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (3.6.32), (3.6.33)

$$\int d\eta_1 = \pm \int \frac{dw_1}{\sqrt{C_1^2 - w_1^2 - C_2^2/w_1^2}}, \quad (3.6.36)$$

то искомое равенство примет вид

$$\eta_1 + C_3 = \pm \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{4w_1^2 - 2C_1^2}{C_1^4 - 4C_2^2}}, \quad C_1^2 > 2|C_2|, \quad (3.6.37)$$

откуда

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \eta_1 \mp \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{4w_1^2 - 2C_1^2}{C_1^4 - 4C_2^2}} = C_3, \quad C_1^2 > 2|C_2|, \quad (3.6.38)$$

где вместо C_1, C_2 необходимо подставить левые части равенств (3.6.32), (3.6.33).

Теперь перефразируем теорему 3.6.4.

Теорема 3.6.5. Система (3.6.28)–(3.6.31) обладает тремя независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Psi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{w_1^2 + w_2^2 + \sin^2 \xi}{w_1 \sin \xi} = C_1' = const, \quad (3.6.39)$$

$$\Psi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_2' = const, \quad (3.6.40)$$

$$\Psi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_3' = const. \quad (3.6.41)$$

Функции Ψ_2, Ψ_3 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_3 .

В формулировке теоремы 3.6.5 (в отличие от теоремы 3.6.4) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (3.6.39)–(3.6.41) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 3.6.5 преобразованный набор первых интегралов (3.6.39)–(3.6.41) системы (3.6.28)–(3.6.31) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

3.6.3. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы четвертого порядка (3.6.9), (3.6.10) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (3.6.9) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dw_2}{d\xi} &= \frac{\sin \xi \cos \xi - w_1^2 \cos \xi / \sin \xi}{-w_2 - b_* \sin \xi}, \\ \frac{dw_1}{d\xi} &= \frac{w_1 w_2 \cos \xi / \sin \xi}{-w_2 - b_* \sin \xi}.\end{aligned}\tag{3.6.42}$$

Используя замену $\tau = \sin \xi$, перепишем систему (5.3.50) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dw_2}{d\tau} &= \frac{\tau - w_1^2 / \tau}{-w_2 - b_* \tau}, \\ \frac{dw_1}{d\tau} &= \frac{w_1 w_2 / \tau}{-w_2 - b_* \tau}.\end{aligned}\tag{3.6.43}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_k = u_k \tau, \quad k = 1, 2,\tag{3.6.44}$$

приводим систему (5.3.51) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - u_1^2}{-u_2 - b_*}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1 u_2}{-u_2 - b_*},\end{aligned}\tag{3.6.45}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - b_* u_2}{-u_2 - b_*}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1 u_2 - b_* u_1}{-u_2 - b_*}.\end{aligned}\tag{3.6.46}$$

Сопоставим системе второго порядка (5.3.54) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 + b_* u_2}{2u_1 u_2 + b_* u_1},\tag{3.6.47}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d \left(\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_* u_2 + 1}{u_1} \right) = 0.\tag{3.6.48}$$

Итак, уравнение (5.3.55) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_* u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const},\tag{3.6.49}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_2, w_1; \xi) = \frac{w_2^2 + w_1^2 + b_* w_2 \sin \xi + \sin^2 \xi}{w_1 \sin \xi} = C_1 = \text{const}.\tag{3.6.50}$$

Замечание 3.6.1. Рассмотрим систему (3.6.9) с переменной диссипацией с нулевым средним [151, 160, 166], становящейся консервативной при $b_* = 0$:

$$\begin{aligned}\xi' &= -w_2, \\ w_2' &= \sin \xi \cos \xi - w_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ w_1' &= w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}.\end{aligned}\tag{3.6.51}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_2^2 + w_1^2 + \sin^2 \xi = C_1^* = \text{const},\tag{3.6.52}$$

$$w_1 \sin \xi = C_2^* = \text{const}.\tag{3.6.53}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (5.3.60), (5.3.61) также является первым интегралом системы (5.3.59). Но при $b_* \neq 0$ каждая из функций

$$w_2^2 + w_1^2 + b_* w_2 \sin \xi + \sin^2 \xi\tag{3.6.54}$$

и (5.3.61) по отдельности не является первым интегралом системы (3.6.9). Однако отношение функций (5.3.62), (5.3.61) является первым интегралом системы (3.6.9) при любом b_* .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.6.9). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (5.3.57) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_*}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b_*^2 + C_1^2}{4} - 1.\tag{3.6.55}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_*^2 + C_1^2 - 4 \geq 0,\tag{3.6.56}$$

и фазовое пространство системы (3.6.9) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (5.3.63).

Таким образом, в силу соотношения (5.3.57) первое уравнение системы (5.3.54) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + b_* u_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 - b_*},\tag{3.6.57}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + b_* u_2 + 1)}\},\tag{3.6.58}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (5.3.64).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.6.9) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(-b_* - u_2) du_2}{2(1 + b_* u_2 + u_2^2) - C_1 \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + b_* u_2 + 1)}\}/2}.\tag{3.6.59}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \xi|.\tag{3.6.60}$$

Если

$$u_2 + \frac{b_*}{2} = r_1, \quad b_1^2 = b_*^2 + C_1^2 - 4,\tag{3.6.61}$$

то правая часть равенства (5.3.67) примет вид

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b_* \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = \\ = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b_*}{2} I_1,\end{aligned}\tag{3.6.62}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \quad (3.6.63)$$

При вычислении интеграла (5.3.71) возможны три случая.

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \text{const.} \quad (3.6.64)$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b_*^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.6.65)$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.6.66)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_2}{\sin \xi} + \frac{b_*}{2}, \quad (3.6.67)$$

имеем окончательный вид для величины I_1 :

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \text{const.} \quad (3.6.68)$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b_*^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.6.69)$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (3.6.70)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.6.9) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 3.6.2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (5.3.57).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\Theta_2(w_2, w_1; \xi) = G \left(\sin \xi, \frac{w_2}{\sin \xi}, \frac{w_1}{\sin \xi} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (3.6.71)$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (3.6.9), (3.6.10) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, “привязывающий” уравнение (3.6.10).

Поскольку

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{u_1(2u_2 + b_*)}{(-b_* - u_2)\tau}, \quad \frac{d\eta_1}{d\tau} = \frac{u_1}{(-b_* - u_2)\tau}, \quad (3.6.72)$$

то

$$\frac{du_1}{d\eta_1} = 2u_2 + b_*. \quad (3.6.73)$$

Очевидно, что при $u_1 \neq 0$ выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(-b_* \pm \sqrt{b_1^2 - 4 \left(u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2} \right), \quad b_1^2 = b_*^2 + C_1^2 - 4, \quad (3.6.74)$$

тогда интегрирование следующей квадратуры:

$$\eta_1 + \text{const} = \pm \int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - 4 \left(u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2}} \quad (3.6.75)$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\eta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b_*^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \text{const}. \quad (3.6.76)$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\eta_1 + C_3)] = \pm \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b_*^2 + C_1^2 - 4}} \quad (3.6.77)$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\eta_1 + C_3)] = \pm \frac{2w_1 - C_1 \sin \xi}{\sqrt{b_*^2 + C_1^2 - 4 \sin^2 \xi}}. \quad (3.6.78)$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, “привязывающего” уравнение (3.6.10), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому то, что в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (5.3.57).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (5.3.57)):

$$\text{tg}^2[2(\eta_1 + C_3)] = \frac{(u_1^2 - u_2^2 - b_* u_2 - 1)^2}{u_1^2(4u_2^2 + 4b_* u_2 + b_*^2)}. \quad (3.6.79)$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\text{tg}^2[2(\eta_1 + C_3)] = \frac{(w_1^2 - w_2^2 - b_* w_2 \sin \xi - \sin^2 \xi)^2}{w_1^2(4w_2^2 + 4b_* w_2 \sin \xi + b_*^2 \sin^2 \xi)}, \quad (3.6.80)$$

или окончательно

$$\Theta_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = -\eta_1 \pm \frac{1}{2} \arctg \frac{w_1^2 - w_2^2 - b_* w_2 \sin \xi - \sin^2 \xi}{w_1(2w_2 + b_* \sin \xi)} = C_3 = \text{const}. \quad (3.6.81)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.6.9), (3.6.10) имеет три первых интеграла, выражающихся соотношениями (5.3.58), (5.3.79), (3.6.81) (при этом используются выражения (5.3.75)–(5.3.78)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 3.6.6. *Три группы соотношений (5.1.8), (5.1.13), (5.1.17) при условиях (3.2.3)–(3.2.5), (3.6.1), (3.6.5) обладают тремя первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

3.6.4. Топологические аналогии. Предъявим далее две группы аналогий, связанных с системой (3.5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (5.2.26). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (3.5.17).

При выполнении условий (3.6.1), (3.6.5) система (3.5.17) примет вид

$$\begin{aligned}\alpha' &= -w_2 + b \sin \alpha, \\ w_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\end{aligned}\tag{3.6.82}$$

$$\begin{aligned}w_1' &= w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \beta_1' &= w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\end{aligned}\tag{3.6.83}$$

если ввести безразмерные параметр, переменные и дифференцирование по аналогии с (3.6.6):

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad z_k = n_0 v w_k, \quad k = 1, 2, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle ' \rangle.\tag{3.6.84}$$

Теорема 3.6.7. Система (3.6.82), (3.6.83) (для свободного тела) эквивалентна системе (3.6.9), (3.6.10) (для закрепленного маятника).

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \quad \eta_1 = \beta_1, \quad b_* = -b.\tag{3.6.85}$$

Следствие 3.6.1. 1) Угол атаки α и угол скольжения β_1 для свободного тела (рис. 6) эквивалентны соответственно углам отклонения $\xi = \theta$ и $\eta_1 = \psi$ закрепленного маятника (рис. 5).

2) Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.

3) Первые интегралы системы (3.6.82), (3.6.83) могут быть автоматически получены через равенства (5.3.58), (5.3.79), (3.6.81) после подстановок (3.6.85) (см. также [206, 220]):

$$\Theta_1'(w_2, w_1; \alpha) = \frac{w_2^2 + w_1^2 - b w_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_1 \sin \alpha} = C_1 = const.\tag{3.6.86}$$

$$\Theta_2'(w_2, w_1; \alpha) = G\left(\sin \alpha, \frac{w_2}{\sin \alpha}, \frac{w_1}{\sin \alpha}\right) = C_2 = const.\tag{3.6.87}$$

$$\Theta_3'(w_2, w_1; \alpha, \beta_1) = -\beta_1 \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{w_1^2 - w_2^2 + b w_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{w_1(2w_2 - b \sin \alpha)} = C_3 = const.\tag{3.6.88}$$

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (3.5.22). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (3.5.28)–(3.5.32).

Тогда, в силу условий (3.5.22), (3.6.1), (3.6.5), (3.6.84) ($w_k \leftrightarrow Z_k$) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (3.5.29)–(3.5.32)) примет вид аналитической системы

$$\begin{aligned}\alpha' &= -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ Z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b Z_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - b Z_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha,\end{aligned}\tag{3.6.89}$$

$$\begin{aligned}Z_1' &= Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b Z_1(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - b Z_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ \beta_1' &= Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\end{aligned}\tag{3.6.90}$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом:

$$n_1 = n_0.\tag{3.6.91}$$

Если вопрос о первых интегралах системы (3.6.82), (3.6.83) решается с помощью следствия 3.6.1, то аналогичный вопрос для системы (3.6.89), (3.6.90) решает следующая теорема 3.6.8.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (3.6.89), (3.6.90) имеет следующий вид [197, 222, 226]:

$$\Theta_1''(Z_2, Z_1; \alpha) = \frac{Z_2^2 + Z_1^2 - bZ_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{Z_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (3.6.92)$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.6.89), используя при этом первый интеграл (5.3.12). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные (ср. с [226, 229]):

$$\tau = \sin \alpha, \quad Z_k = u_k \tau, \quad k = 1, 2, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (3.6.93)$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad (3.6.94)$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)} \right\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geq 0. \quad (3.6.95)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (3.6.94) зависит от произвольной постоянной C_2 . Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (3.6.94), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C \left[\sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1 \right] \exp \left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}} \right], \quad C = \text{const.} \quad (3.6.96)$$

Тогда искомым дополнительным первым интегралом имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\Theta_2''(Z_2, Z_1; \alpha) = G \left(\sin \alpha, \frac{Z_2}{\sin \alpha}, \frac{Z_1}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}, \quad (3.6.97)$$

используя при этом обозначения и замены (3.6.93).

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (3.6.89), (3.6.90) найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно предъявить один (дополнительный) первый интеграл, “привязывающий” уравнение (3.6.90).

Искомый первый интеграл может быть получен из следующего соотношения:

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2Z_1 - C_1 \sin \alpha}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4 \sin \alpha}}. \quad (3.6.98)$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, “привязывающего” уравнение (3.6.90), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому то, что в нем необходимо формально вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (5.3.12).

Но, проводя некоторые преобразования, получим окончательный вид дополнительного первого интеграла:

$$\Theta_3''(Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1) = -\beta_1 \pm \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{Z_1^2 - Z_2^2 + bZ_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{Z_1(2Z_2 - b \sin \alpha)} = C_3 = \text{const}. \quad (3.6.99)$$

Теорема 3.6.8. *Три первых интеграла (5.3.12), (3.6.97), (3.6.99) системы (3.6.89), (3.6.90) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Теорема 3.6.9. Три первых интеграла (5.3.12), (3.6.97), (3.6.99) системы (3.6.89), (3.6.90) эквивалентны трем первым интегралам (3.6.86), (3.6.87), (3.6.88) системы (3.6.82), (3.6.83).

Действительно, пары первых интегралов (5.3.12), (3.6.86) и (3.6.99), (3.6.88) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные Z_k , $k = 1, 2$, для системы (3.6.89), (3.6.90) с фазовыми переменными w_k , $k = 1, 2$, для системы (3.6.82), (3.6.83). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (3.6.97), (3.6.87), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение закрепленного на сферическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).

2) Пространственное движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).

3) Пространственное сложное движение твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [225, 233].

3.7. СЛУЧАЙ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

3.7.1. Введение зависимости от угловой скорости. Данная глава посвящена динамике трехмерного твердого тела в трехмерном пространстве. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же, данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск \mathcal{D} , $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}) = (x_N, y_N, z_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [41, 42, 189].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (3.7.1)$$

где $R = (R_1, R_2, R_3)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v_D} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \quad (3.7.2)$$

Здесь (h_1, h_2, h_3) — некоторые положительные параметры (ср. [196]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \frac{\Omega_3}{v_D}, \quad x_{3N} = z_N = Q_3 + h_1 \frac{\Omega_2}{v_D}. \quad (3.7.3)$$

Таким образом, функция \mathbf{r}_N выбирается в следующем виде (диск \mathcal{D} задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ x_{3N} \end{pmatrix} = R(\alpha) \mathbf{i}_N - \frac{1}{v_D} \tilde{\Omega} h, \quad (3.7.4)$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1 \right), \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7.5)$$

(см. (3.1.6), (5.2.30)).

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \end{pmatrix}. \quad (3.7.6)$$

Таким образом, выполнены равенства

$$x_{2N} = R(\alpha) - h_1 \frac{\Omega_3}{v_D}, \quad x_{2N} = R(\alpha) + h_1 \frac{\Omega_2}{v_D}, \quad (3.7.7)$$

убеждающее нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Итак, для построения силового поля также используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [121, 122], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B > 0. \quad (3.7.8)$$

3.7.2. Приведенные системы.

Теорема 3.7.1. Совместные уравнения (5.1.8), (5.1.13), (5.1.17) при выполнении условий (3.2.3)–(3.2.5), (3.7.4), (3.7.8) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (3.1.5) двумерной сферы (3.1.4).

Действительно, если ввести безразмерные параметры и дифференцирование:

$$b_* = ln_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad H_{1*} = \frac{h_1 B}{I_2 n_0}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v_\infty \langle ' \rangle, \quad (3.7.9)$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi'' + (b_* - H_{1*})\xi' \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - \eta_1^2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} &= 0, \\ \eta_1'' + (b_* - H_{1*})\eta_1' \cos \xi + \xi' \eta_1' \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} &= 0, \quad b_* > 0, \quad H_{1*} > 0. \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Фазовый портрет системы (3.7.10) при $b_* > H_{1*}$ ($\xi \leftrightarrow \theta$, $\eta_1 \leftrightarrow \psi$) изображен на рис. 7. При $b_* < H_{1*}$ фазовый портрет системы (3.7.10) совпадает с фазовым портретом, изображенным на рис. 7, только направление всех фазовых траекторий меняется на противоположное.

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (5.1.14)) к переменным w

$$\begin{aligned} w_2 &= -\frac{1}{1 + b_* H_{1*}} \left(\frac{1}{n_0 v_\infty} z_2 + b_* \sin \xi \right), \\ w_1 &= -\frac{1}{1 + b_* H_{1*}} \frac{1}{n_0 v_\infty} z_1, \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

система (3.7.10) будет эквивалентна системе

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -(1 + b_* H_{1*})w_2 - b_* \sin \xi, \\ w_2' &= \sin \xi \cos \xi - (1 + b_* H_{1*})w_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*}w_2 \cos \xi, \\ w_1' &= (1 + b_* H_{1*})w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*}w_1 \cos \xi, \end{aligned} \right\} \quad (3.7.12)$$

$$\eta_1' = (1 + b_* H_{1*})w_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (3.7.13)$$

на касательном расслоении

$$T_* \mathbb{S}^2 \{(w_2, w_1; \xi, \eta_1) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq \xi \leq \pi, \eta_1 \bmod 2\pi\} \quad (3.7.14)$$

двумерной сферы $\mathbb{S}^2 \{(\xi, \eta_1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq \pi, \eta_1 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе четвертого порядка (3.7.12), (3.7.13) по причине цикличности переменной η_1 выделяется независимая подсистема третьего порядка (3.7.12), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии.

3.7.3. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы четвертого порядка (3.7.12), (3.7.13) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (3.7.12) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dw_2}{d\xi} &= \frac{\sin \xi \cos \xi - (1 + b_* H_{1*}) w_1^2 \cos \xi / \sin \xi + H_{1*} w_2 \cos \xi}{-(1 + b_* H_{1*}) w_2 - b_* \sin \xi}, \\ \frac{dw_1}{d\xi} &= \frac{(1 + b_* H_{1*}) w_1 w_2 \cos \xi / \sin \xi + H_{1*} w_1 \cos \xi}{-(1 + b_* H_{1*}) w_2 - b_* \sin \xi}.\end{aligned}\quad (3.7.15)$$

Используя замену $\tau = \sin \xi$, перепишем систему (3.7.15) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dw_2}{d\tau} &= \frac{\tau - (1 + b_* H_{1*}) w_1^2 / \tau + H_{1*} w_2}{-(1 + b_* H_{1*}) w_2 - b_* \tau}, \\ \frac{dw_1}{d\tau} &= \frac{(1 + b_* H_{1*}) w_1 w_2 / \tau + H_{1*} w_1}{-(1 + b_* H_{1*}) w_2 - b_* \tau}.\end{aligned}\quad (3.7.16)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_k = u_k \tau, \quad k = 1, 2, \quad (3.7.17)$$

приводим систему (3.7.16) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - (1 + b_* H_{1*}) u_1^2 + H_{1*} u_2}{-(1 + b_* H_{1*}) u_2 - b_*}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{(1 + b_* H_{1*}) u_1 u_2 + H_{1*} u_1}{-(1 + b_* H_{1*}) u_2 - b_*},\end{aligned}\quad (3.7.18)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 - u_1^2) + (b_* + H_{1*}) u_2 + 1}{-(1 + b_* H_{1*}) u_2 - b_*}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1 + b_* H_{1*}) u_1 u_2 + (b_* + H_{1*}) u_1}{-(1 + b_* H_{1*}) u_2 - b_*}.\end{aligned}\quad (3.7.19)$$

Сопоставим системе второго порядка (3.7.19) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1 + b_* H_{1*})(u_1^2 - u_2^2) + (b_* + H_{1*}) u_2}{2(1 + b_* H_{1*}) u_1 u_2 + (b_* + H_{1*}) u_1}, \quad (3.7.20)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d \left(\frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*}) u_2 + 1}{u_1} \right) = 0. \quad (3.7.21)$$

Итак, уравнение (3.7.20) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*}) u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (3.7.22)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_2, w_1; \xi) = \frac{(1 + b_* H_{1*})(w_2^2 + w_1^2) + (b_* + H_{1*}) w_2 \sin \xi + \sin^2 \xi}{w_1 \sin \xi} = C_1 = \text{const}. \quad (3.7.23)$$

Замечание 3.7.1. Рассмотрим систему (3.7.12) с переменной диссипацией с нулевым средним [218, 219, 221], становящейся консервативной при $b_* = H_{1*}$:

$$\begin{aligned}\xi' &= -(1 + b_*^2)w_2 - b_* \sin \xi, \\ w_2' &= \sin \xi \cos \xi - (1 + b_*^2)w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b_* w_2 \cos \xi, \\ w_1' &= (1 + b_*^2)w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + b_* w_1 \cos \xi.\end{aligned}\quad (3.7.24)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b_*^2)(w_2^2 + w_1^2) + 2b_* w_2 \sin \xi + \sin^2 \xi = C_1^* = \text{const}, \quad (3.7.25)$$

$$w_1 \sin \xi = C_2^* = \text{const}. \quad (3.7.26)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.7.25), (3.7.26) также является первым интегралом системы (3.7.24). Но при $b_* \neq H_{1*}$ каждая из функций

$$(1 + b_* H_{1*})(w_2^2 + w_1^2) + (b_* + H_{1*})w_2 \sin \xi + \sin^2 \xi \quad (3.7.27)$$

и (3.7.26) по отдельности не является первым интегралом системы (3.7.12). Однако отношение функций (3.7.27), (3.7.26) является первым интегралом системы (3.7.12) при любых b_*, H_{1*} .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.7.12). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.7.22) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + b_* H_{1*})}\right)^2 = \frac{(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + b_* H_{1*})^2}. \quad (3.7.28)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (3.7.29)$$

и фазовое пространство системы (3.7.12) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.7.28).

Таким образом, в силу соотношения (3.7.22) первое уравнение системы (3.7.19) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + b_* H_{1*})u_2^2 + 2(b_* + H_{1*})u_2 + 2 - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-b_* - (1 + b_* H_{1*})u_2}, \quad (3.7.30)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2(1 + b_* H_{1*})} \{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}, \quad (3.7.31)$$

$$U_2(C_1, u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1 + b_* H_{1*})u_2^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.7.29).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.7.12) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(-b_* - (1 + b_* H_{1*})u_2) du_2}{2(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1 + b_* H_{1*})u_2^2) - C_1 \{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\} / (2(1 + b_* H_{1*}))}. \quad (3.7.32)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \xi|. \quad (3.7.33)$$

Если

$$u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})} = r_1, \quad b_1^2 = (b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4, \quad (3.7.34)$$

то правая часть равенства (3.7.32) примет вид

$$-\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2)}{(b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}} +$$

$$\begin{aligned}
& + (b_* - H_{1*})(1 + b_* H_{1*}) \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}} = \\
& = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{-b_* + H_{1*}}{2} I_1,
\end{aligned} \tag{3.7.35}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})r_1^2}. \tag{3.7.36}$$

При вычислении интеграла (3.7.36) возможны три случая.

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$\begin{aligned}
I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \text{const.}
\end{aligned} \tag{3.7.37}$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \tag{3.7.38}$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \tag{3.7.39}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_2}{\sin \xi} + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})}, \tag{3.7.40}$$

имеем окончательный вид для величины I_1 :

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$\begin{aligned}
I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \pm 2(1 + b_* H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \mp 2(1 + b_* H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \text{const.}
\end{aligned} \tag{3.7.41}$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \tag{3.7.42}$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2(1 + b_* H_{1*})r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \tag{3.7.43}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.7.12) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 3.7.2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.7.22).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\Theta_2(w_2, w_1; \xi) = G\left(\sin \xi, \frac{w_2}{\sin \xi}, \frac{w_1}{\sin \xi}\right) = C_2 = \text{const.} \quad (3.7.44)$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (3.7.12), (3.7.13) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, “привязывающий” уравнение (3.7.13).

Поскольку

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{u_1(2(1 + b_*H_{1*})u_2 + (b_* + H_{1*}))}{(-b_* - (1 + b_*H_{1*})u_2)\tau}, \quad \frac{d\eta_1}{d\tau} = \frac{(1 + b_*H_{1*})u_1}{(-b_* - (1 + b_*H_{1*})u_2)\tau}, \quad (3.7.45)$$

то

$$\frac{du_1}{d\eta_1} = 2u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{1 + b_*H_{1*}}. \quad (3.7.46)$$

Очевидно, что при $u_1 \neq 0$ выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2(1 + b_*H_{1*})} \left(-(b_* + H_{1*}) \pm \sqrt{b_1^2 - (2(1 + b_*H_{1*})u_1 - C_1)^2} \right), \quad (3.7.47)$$

$$b_1^2 = (b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4,$$

тогда интегрирование следующей квадратуры:

$$\eta_1 + \text{const} = \pm(1 + b_*H_{1*}) \int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - (2(1 + b_*H_{1*})u_1 - C_1)^2}} \quad (3.7.48)$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\eta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2(1 + b_*H_{1*})u_1 - C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \text{const.} \quad (3.7.49)$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\eta_1 + C_3)] = \pm \frac{2(1 + b_*H_{1*})u_1 - C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4}} \quad (3.7.50)$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\eta_1 + C_3)] = \pm \frac{2(1 + b_*H_{1*})w_1 - C_1 \sin \xi}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4 \sin^2 \xi}}. \quad (3.7.51)$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, “привязывающего” уравнение (3.7.13), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому то, что в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.7.22).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (3.7.22)):

$$\begin{aligned} & \text{tg}^2[2(\eta_1 + C_3)] = \\ & = \frac{((1 + b_*H_{1*})u_1^2 - (1 + b_*H_{1*})u_2^2 - (b_* + H_{1*})u_2 - 1)^2}{u_1^2(2(1 + b_*H_{1*})u_2 + (b_* + H_{1*}))^2}. \end{aligned} \quad (3.7.52)$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\begin{aligned} & \text{tg}^2[2(\eta_1 + C_3)] = \\ & = \frac{((1 + b_*H_{1*})w_1^2 - (1 + b_*H_{1*})w_2^2 - (b_* + H_{1*})w_2 \sin \xi - \sin^2 \xi)^2}{w_1^2(2(1 + b_*H_{1*})w_2 + (b_* + H_{1*}) \sin \xi)^2}, \end{aligned} \quad (3.7.53)$$

или окончательно

$$\Theta_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = -\eta_1 \pm \frac{1}{2} \times \\ \times \operatorname{arctg} \frac{(1 + b_* H_{1*})w_1^2 - (1 + b_* H_{1*})w_2^2 - (b_* + H_{1*})w_2 \sin \xi - \sin^2 \xi}{w_1(2(1 + b_* H_{1*})w_2 + (b_* + H_{1*}) \sin \xi)} = C_3 = \text{const.} \quad (3.7.54)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.7.12), (3.7.13) имеет три первых интеграла, выражающихся соотношениями (3.7.23), (3.7.44), (3.7.54) (при этом используются выражения (3.7.40)–(3.7.43)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 3.7.2. *Три группы соотношений (5.1.8), (5.1.13), (5.1.17) при условиях (3.2.3)–(3.2.5), (3.7.4), (3.7.8) обладают тремя первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

3.7.4. Топологические аналогии. Предъявим далее еще две группы аналогий, связанных с системой (3.5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий снова касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (5.2.26). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (3.5.17).

При выполнении условий (3.7.4), (3.7.8) система (3.5.17) примет вид

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_2 + b \sin \alpha, \\ w_2' = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_2 \cos \alpha, \quad (3.7.55)$$

$$w_1' = (1 + bH_1)w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_1 \cos \alpha,$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (3.7.56)$$

если ввести безразмерные параметры, переменные и дифференцирование по аналогии с (3.7.9):

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad H_1 = \frac{h_1 B}{I_2 n_0}, \quad z_k = n_0 v w_k, \quad k = 1, 2, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle. \quad (3.7.57)$$

Теорема 3.7.3. *Система (3.7.55), (3.7.56) (для свободного тела) эквивалентна системе (3.7.12), (3.7.13) (для закрепленного маятника).*

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \quad \eta_1 = \beta_1, \quad b_* = -b, \quad H_{1*} = -H_1. \quad (3.7.58)$$

Следствие 3.7.1. 1) Угол атаки α и угол скольжения β_1 для свободного тела (рис. 6) эквивалентны соответственно углам отклонения $\xi = \theta$ и $\eta_1 = \psi$ закрепленного маятника (рис. 5).

2) Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.

3) Первые интегралы системы (3.7.55), (3.7.56) могут быть автоматически получены через равенства (3.7.23), (3.7.44), (3.7.54) после подстановок (3.7.58) (см. также [227]):

$$\Theta_1'(w_2, w_1; \alpha) = \frac{(1 + bH_1)(w_2^2 + w_1^2) - (b + H_1)w_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (3.7.59)$$

$$\Theta_2'(w_2, w_1; \alpha) = G \left(\sin \alpha, \frac{w_2}{\sin \alpha}, \frac{w_1}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (3.7.60)$$

$$\Theta'_3(w_2, w_1; \alpha, \beta_1) = -\beta_1 \pm \frac{1}{2} \times \\ \times \operatorname{arctg} \frac{(1 + bH_1)w_1^2 - (1 + bH_1)w_2^2 + (b + H_1)w_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{w_1(2(1 + bH_1)w_2 - (b + H_1) \sin \alpha)} = C_3 = \text{const.} \quad (3.7.61)$$

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (3.5.22). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (3.5.28)–(3.5.32).

Тогда, в силу условий (3.5.22), (3.7.4), (3.7.8), (3.7.57) ($w_k \leftrightarrow Z_k$) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (3.5.29)–(3.5.32)) примет вид аналитической системы

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_2 \cos^2 \alpha, \\ Z_2' = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ + bH_1 Z_2^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha, \quad (3.7.62)$$

$$Z_1' = (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ + bH_1 Z_1 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha, \\ \beta_1' = (1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (3.7.63)$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом:

$$n_1 = n_0. \quad (3.7.64)$$

Если вопрос о первых интегралах системы (3.7.55), (3.7.56) решается с помощью следствия 3.7.1, то аналогичный вопрос для системы (3.7.62), (3.7.63) решает следующая теорема 3.7.4.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (3.7.62), (3.7.63) имеет следующий вид [231, 234]:

$$\Theta''_1(Z_2, Z_1; \alpha) = \frac{(1 + bH_1)(Z_2^2 + Z_1^2) - (b + H_1)Z_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{Z_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (3.7.65)$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.7.62), используя при этом первый интеграл (3.7.65). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные (ср. с [234, 236]):

$$\tau = \sin \alpha, \quad Z_k = u_k \tau, \quad k = 1, 2, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (3.7.66)$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1 + bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1 u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \quad (3.7.67)$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0. \quad (3.7.68)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (3.7.67) зависит от произвольной постоянной C_2 . Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (3.7.67), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[1 - A_1 u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times \\ \times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4)A_1(A_1 u_2 - 1)}, \quad C = \text{const.} \quad (3.7.69)$$

Тогда искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\Theta_2''(Z_2, Z_1; \alpha) = G \left(\sin \alpha, \frac{Z_2}{\sin \alpha}, \frac{Z_1}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}, \quad (3.7.70)$$

используя при этом обозначения и замены (3.7.66).

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (3.7.62), (3.7.63) найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно предъявить один (дополнительный) первый интеграл, “привязывающий” уравнение (3.7.63).

Искомый первый интеграл может быть получен из следующего соотношения:

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2(1 + bH_1)Z_1 - C_1 \sin \alpha}{\sqrt{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \sin \alpha}}. \quad (3.7.71)$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, “привязывающего” уравнение (3.7.63), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому то, что в нем необходимо формально вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.7.65).

Но, проводя некоторые преобразования, получим окончательный вид дополнительного первого интеграла:

$$\Theta_3''(Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1) = -\beta_1 \pm \frac{1}{2} \times \\ \times \arctg \frac{(1 + bH_1)Z_1^2 - (1 + bH_1)Z_2^2 + (b + H_1)Z_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{Z_1(2(1 + bH_1)Z_2 - (b + H_1) \sin \alpha)} = C_3 = \text{const}. \quad (3.7.72)$$

Теорема 3.7.4. Три первых интеграла (3.7.65), (3.7.70), (3.7.72) системы (3.7.62), (3.7.63) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 3.7.5. Три первых интеграла (3.7.65), (3.7.70), (3.7.72) системы (3.7.62), (3.7.63) эквивалентны трем первым интегралам (3.7.59), (3.7.60), (3.7.61) системы (3.7.55), (3.7.56).

Действительно, пары первых интегралов (3.7.65), (3.7.59) и (3.7.72), (3.7.61) совпадают, если формально положить $b = -b_*$, $H_1 = -H_{1*}$. Осталось формально отождествить фазовые переменные Z_k , $k = 1, 2$, для системы (3.7.62), (3.7.63) с фазовыми переменными w_k , $k = 1, 2$, для системы (3.7.55), (3.7.56). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (3.7.70), (3.7.60), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение закрепленного на сферическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости).

2) Пространственное движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи и при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости).

3) Пространственное сложное движение твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости.

О более общих топологических аналогиях см. также [239, 241].

ГЛАВА 4

**СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ,
СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ МАЯТНИКА
В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

В данной главе систематизируются результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного закрепленного четырехмерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного четырехмерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи, см. также [166, 167, 171, 174, 180]), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил, см. также [180, 181, 187, 188]).

Ранее в [101, 166] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения закрепленного тела-маятника в однородном потоке набегающей среды в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [141, 166] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы уравнений движения существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом (сферическим маятником) сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

Далее [180, 181, 190, 192, 195, 204, 237, 238, 243] были исследованы уравнения движения закрепленных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска.

В данной главе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

4.1. МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим однородный трехмерный круговой диск \mathcal{D}^3 с центром в точке D , гиперплоскость которого в четырехмерном евклидовом пространстве \mathbb{E}^4 перпендикулярна державке OD . Диск жестко закреплен к державке, находящейся на (обобщенном) сферическом шарнире O , и обтекается однородным потоком среды. В этом случае тело представляет собой физический (обобщенный сферический) маятник. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$, а державка сопротивления не создает.

Предположим, что суммарная сила \mathbf{S} воздействия потока среды на диск перпендикулярна диску \mathcal{D}^3 , а точка N приложения этой силы определяется, по крайней мере, углом атаки α , измеряемым между вектором скорости \mathbf{v}_D точки D относительно потока и державкой OD , углами β_1, β_2 , измеряемыми в гиперплоскости диска \mathcal{D}^3 (таким образом, $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — (обобщенные)

сферические координаты конца вектора \mathbf{v}_D), а также тензором приведенной угловой скорости

$$\tilde{\omega} \cong \frac{l\tilde{\Omega}}{v_D}, \quad v_D = |\mathbf{v}_D|$$

(l — длина державки, $\tilde{\Omega}$ — тензор угловой скорости маятника). Подобные условия обобщают модель струйного обтекания пространственных тел [59, 63, 68, 105].

Вектор

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{OD}}{l} \quad (4.1.1)$$

определяет ориентацию державки. Тогда

$$\mathbf{S} = s(\alpha)v_D^2\mathbf{e}, \quad (4.1.2)$$

где

$$s(\alpha) = s_1(\alpha)\text{sign} \cos \alpha, \quad (4.1.3)$$

где коэффициент сопротивления $s_1 \geq 0$ зависит лишь от угла атаки α . В силу свойств осевой симметрии тела-маятника относительно точки D функция $s(\alpha)$ является четной.

Пусть $Dx_1x_2x_3x_4$ — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось Dx_1 имеет направляющий вектор \mathbf{e} , а оси Dx_2, Dx_3 и Dx_4 лежат в гиперплоскости диска \mathcal{D}^3 .

Углами (ξ, η_1, η_2) мы определим положение державки OD в четырехмерном пространстве \mathbb{E}^4 . При этом угол ξ будем измерять между державкой и направлением набегающего потока. Другими словами, вводимые углы являются (обобщенными) сферическими координатами точки D центра диска \mathcal{D}^3 на трехмерной сфере постоянного радиуса OD .

Пространством положений такого (обобщенного) сферического (физического) маятника является трехмерная сфера

$$\mathbb{S}^3\{(\xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi\}, \quad (4.1.4)$$

а фазовым пространством — касательное расслоение трехмерной сферы

$$T_*\mathbb{S}^3\{(\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2; \xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^6 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi\}. \quad (4.1.5)$$

Тензор (второго ранга) $\tilde{\Omega}$ угловой скорости в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ будем определять через кососимметрическую матрицу

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} \in \text{so}(4). \quad (4.1.6)$$

Расстояние от центра D диска \mathcal{D}^3 до центра давления (точки N) будет иметь вид

$$|\mathbf{r}_N| = r_N = DN \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{l\Omega}{v_D} \right), \quad (4.1.7)$$

где

$$\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}\}$$

в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ (волну над Ω опустим).

Сразу же заметим, что, также как и в двумерном и трехмерном случаях, используемая модель воздействия потока среды на закрепленный маятник аналогична построенной модели для свободного тела и в дальнейшем учитывает влияние вращательной производной момента силы воздействия среды по тензору угловой скорости маятника (см. также [47, 48, 52]). Анализ задачи о(б) (обобщенном) сферическом (физическом) маятнике в потоке позволит обнаружить качественные аналогии в динамике частично закрепленных и свободных четырехмерных тел.

4.2. ГРУППА ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА АЛГЕБРЕ ЛИ $so(4)$

Пусть четырехмерное твердое тело Θ массы m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ находится под воздействием некоторого неконсервативного поля сил (а именно, это можно интерпретировать как движение тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерную область евклидового пространства \mathbb{E}^4). Предположим, что оно является динамически симметричным, при этом имеются две логические возможности представления его тензора инерции в случае наличия *двух* независимых равенств главных моментов инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет вид

$$\text{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}, \quad (4.2.1)$$

либо вид

$$\text{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}. \quad (4.2.2)$$

В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4$ тело динамически симметрично (другими словами, ось Dx_1 — ось динамической симметрии тела), а во втором случае двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 являются плоскостями динамической симметрии тела.

Конфигурационным пространством свободного n -мерного твердого тела является прямое произведение пространства \mathbb{R}^n (определяющего координаты центра масс тела) на группу его вращений $SO(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс)

$$\mathbb{R}^n \times SO(n) \quad (4.2.3)$$

и имеет размерность

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Соответственно, размерность фазового пространства равна

$$n(n+1).$$

В частности, если Ω — тензор угловой скорости четырехмерного твердого тела (а он является терзором второго ранга [52, 54, 57, 60, 61, 73, 77, 94]), $\Omega \in so(4)$, то *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли $so(4)$* , имеет следующий вид [60, 61, 116, 117, 166]:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \quad (4.2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}, \\ \lambda_1 &= \frac{-I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + I_4}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{I_1 + I_2 - I_3 + I_4}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{I_1 + I_2 + I_3 - I_4}{2}, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$M = M_F$ — момент внешних сил \mathbf{F} , действующих на тело в \mathbb{R}^4 , спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $so(4)$, $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор в $so(4)$. Кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга) $\Omega \in so(4)$ будем представлять в виде (4.1.6), где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли $so(4)$.

При этом, очевидно, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i \quad (4.2.6)$$

для любых $i, j = 1, \dots, 4$.

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow so(4), \quad (4.2.7)$$

переводящее пару векторов

$$(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \quad (4.2.8)$$

из $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$, где

$$\mathbf{DN} = \{0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}\}, \quad \mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}, \quad (4.2.9)$$

\mathbf{F} — внешняя сила, действующая на тело. При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{pmatrix}. \quad (4.2.10)$$

Тогда правая часть системы (4.2.4) примет вид

$$\begin{aligned} M &= \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\} = \\ &= \{x_{3N}F_4 - x_{4N}F_3, x_{4N}F_2 - x_{2N}F_4, -x_{4N}F_1, x_{2N}F_3 - x_{3N}F_2, x_{3N}F_1, -x_{2N}F_1\}, \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

где $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ — компоненты тензора момента внешней силы в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -M_6 & M_5 & -M_3 \\ M_6 & 0 & -M_4 & M_2 \\ -M_5 & M_4 & 0 & -M_1 \\ M_3 & -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.12)$$

В нашем случае закрепленного маятника реализуется случай (4.2.1). Тогда динамическая часть уравнений его движения примет следующий вид:

$$\begin{aligned} (I_1 + I_2)\dot{\omega}_1 &= 0, \\ (I_1 + I_2)\dot{\omega}_2 &= 0, \\ 2I_2\dot{\omega}_3 + (I_1 - I_2)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) &= x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\ (I_1 + I_2)\dot{\omega}_4 &= 0, \\ 2I_2\dot{\omega}_5 + (I_1 - I_2)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) &= -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\ 2I_2\dot{\omega}_6 + (I_2 - I_1)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) &= x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

поскольку момент силы воздействия среды определяется через следующую вспомогательную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.14)$$

где

$$\{-s(\alpha)v_D^2, 0, 0, 0\}$$

— разложение силы \mathbf{S} воздействия среды в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$.

Поскольку размерность алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$ равна 6, система уравнений (4.2.13) и составляет группу динамических уравнений на $\mathfrak{so}(4)$.

Видно, что в правую часть системы уравнений (4.2.13) входят, прежде всего, углы α, β_1, β_2 , поэтому данная система уравнений не является замкнутой. Для того, чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическим уравнениям на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ присоединить несколько групп кинематических уравнений.

4.2.1. Циклические первые интегралы. Сразу же заметим, что система (4.2.13), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 = I_4, \quad (4.2.15)$$

обладает тремя циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \text{const}, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0 = \text{const}, \quad \omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}. \quad (4.2.16)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \quad (4.2.17)$$

При условиях (4.2.15)–(4.2.17) система (4.2.13) примет вид незамкнутой системы трех уравнений:

$$\begin{aligned} 2I_2\dot{\omega}_3 &= x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\ 2I_2\dot{\omega}_5 &= -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\ 2I_2\dot{\omega}_6 &= x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2. \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

4.3. ПЕРВАЯ ГРУППА КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки D (центра диска \mathcal{D}^3) и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v_D \cdot \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2) = \tilde{\Omega} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty)\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \eta_2), \quad (4.3.1)$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta_1 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (4.3.2)$$

Равенство (4.3.1) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$.

Действительно, в левой части равенства (4.3.1) стоит скорость точки D маятника относительно потока в проекциях на связанную с маятником систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$. При этом вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ — единичный вектор вдоль оси вектора \mathbf{v}_D . Вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ имеет (обобщенные) сферические координаты $(1, \alpha, \beta_1, \beta_2)$, определяющие разложение (4.3.2).

В правой части равенства (4.3.1) стоит сумма скоростей точки D при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора $\mathbf{OD} = \{l, 0, 0, 0\}$ в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$.

На втором слагаемом правой части равенства (4.3.1) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора $(-\mathbf{v}_\infty) = \{-v_\infty, 0, 0, 0\}$ в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$ необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол $(-\xi)$, что алгебраически эквивалентно умножению величины $(-v_\infty)$ на вектор $\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1, \eta_2)$.

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (4.3.1) в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_D \cos \alpha &= -v_\infty \cos \xi, \\ v_D \sin \alpha \cos \beta_1 &= l\omega_6 + v_\infty \sin \xi \cos \eta_1, \\ v_D \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 &= -l\omega_5 + v_\infty \sin \xi \sin \eta_1 \cos \eta_2, \\ v_D \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 &= l\omega_3 + v_\infty \sin \xi \sin \eta_1 \sin \eta_2. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

4.4. ВТОРАЯ ГРУППА КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости $\tilde{\Omega}$ и координаты $\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \xi, \eta_1, \eta_2$ фазового пространства (4.1.5) исследуемого маятника — касательного расслоения $T_*\mathbb{S}^3\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2; \xi, \eta_1, \eta_2\}$.

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n, n = 4$, сначала выражается набор, состоящий из фазовых

переменных $\omega_3, \omega_5, \omega_6$, через новые переменные z_1, z_2, z_3 (из набора z). Для этого производится следующая композиция поворотов на углы η_1, η_2 :

$$\begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_2) \circ T_{2,3}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad (4.4.1)$$

где

$$T_{2,3}(\eta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta_1 & -\sin \eta_1 \\ 0 & \sin \eta_1 & \cos \eta_1 \end{pmatrix}, \quad T_{1,2}(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos \eta_2 & -\sin \eta_2 & 0 \\ \sin \eta_2 & \cos \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4.2)$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = T_{2,3}(-\eta_1) \circ T_{1,2}(-\eta_2) \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix}, \quad (4.4.3)$$

т.е.

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3 \cos \eta_1 + \omega_5 \sin \eta_2, \\ z_2 &= -\omega_3 \cos \eta_1 \sin \eta_2 + \omega_5 \cos \eta_1 \cos \eta_2 + \omega_6 \sin \eta_1, \\ z_3 &= \omega_3 \sin \eta_1 \sin \eta_2 - \omega_5 \sin \eta_1 \cos \eta_2 + \omega_6 \cos \eta_1. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Затем вместо группы переменных z подставляется следующая зависимость:

$$\begin{aligned} z_3 &= \dot{\xi}, \\ z_2 &= -\dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi}, \\ z_1 &= \dot{\eta}_2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Таким образом, две группы уравнений (4.4.1) и (4.4.5) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \dot{\xi} \sin \eta_1 \sin \eta_2 + \dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \cos \eta_1 \sin \eta_2 + \dot{\eta}_2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1 \cos \eta_2, \\ \omega_5 &= -\dot{\xi} \sin \eta_1 \cos \eta_2 - \dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \cos \eta_1 \cos \eta_2 + \dot{\eta}_2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1 \sin \eta_2, \\ \omega_6 &= \dot{\xi} \cos \eta_1 - \dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Видно, что три группы соотношений (4.2.18), (4.3.3), (4.4.6) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят следующие функции:

$$x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v_D} \right), \quad x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v_D} \right), \quad x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v_D} \right), \quad s(\alpha). \quad (4.4.7)$$

При этом функция s считается зависимой лишь от α , а функции x_{2N}, x_{3N}, x_{4N} могут зависеть, наряду с углами α, β_1, β_2 , вообще говоря, и от приведенного тензора угловой скорости $l\tilde{\Omega}/v_D$.

4.5. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ СВОБОДНОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Параллельно рассматриваемой задаче о движении закрепленного тела, рассмотрим пространственное движение свободного динамически симметричного (случай (4.2.1)) четырехмерного твердого тела с передним торцом (круговым трехмерным диском \mathcal{D}^3) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [59, 79, 101, 105, 129] с той же моделью воздействия среды.

Если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — сферические координаты вектора скорости центра D диска \mathcal{D}^3 , лежащего на оси симметрии тела, $\tilde{\Omega}$ — тензор угловой скорости тела (см. (4.1.6)) в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3, Dx_4 лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, I_4 = I_2, m$

— инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned}
& \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \omega_6 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \\
& - \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \sigma(\omega_6^2 + \omega_5^2 + \omega_3^2) = \frac{F_1}{m}, \\
& \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \\
& + \omega_6 v \cos \alpha - \omega_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \\
& - \sigma(\omega_4 \omega_5 + \omega_2 \omega_3) - \sigma \dot{\omega}_6 = 0, \\
& \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \\
& - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 v \cos \alpha + \omega_4 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \\
& - \sigma(-\omega_1 \omega_2 + \omega_4 \omega_6) + \sigma \dot{\omega}_5 = 0, \\
& \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \\
& + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_3 v \cos \alpha - \omega_2 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \\
& + \sigma(\omega_2 \omega_6 + \omega_1 \omega_5) - \sigma \dot{\omega}_3 = 0, \\
& (I_1 + I_2) \dot{\omega}_1 = 0, \\
& (I_1 + I_2) \dot{\omega}_2 = 0, \\
& 2I_2 \dot{\omega}_3 + (I_1 - I_2)(\omega_2 \omega_6 + \omega_1 \omega_5) = x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \\
& (I_1 + I_2) \dot{\omega}_4 = 0, \\
& 2I_2 \dot{\omega}_5 + (I_1 - I_2)(\omega_4 \omega_6 - \omega_1 \omega_3) = -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \\
& 2I_2 \dot{\omega}_6 + (I_2 - I_1)(\omega_4 \omega_5 + \omega_2 \omega_3) = x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2,
\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

где

$$F_1 = -S, \quad S = s(\alpha) v^2, \quad \sigma = CD, \tag{4.5.2}$$

при этом

$$\left(0, x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \right) \tag{4.5.3}$$

— координаты точки N приложения силы \mathbf{S} в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$, связанной с телом.

Первые четыре уравнения системы (4.5.1) описывают движение центра масс в четырехмерном евклидовом пространстве \mathbb{E}^4 в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3x_4$. Вторые же шесть уравнений системы (4.5.1) получены из (4.2.4).

Таким образом, фазовым пространством системы динамических уравнений (4.5.1) десятого порядка является прямое произведение

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \text{so}(4) \tag{4.5.4}$$

четырёхмерного многообразия на алгебру Ли $\text{so}(4)$. При этом, поскольку сила воздействия среды не зависит от положения тела в пространстве, система динамических уравнений (4.5.1) *отделяется от системы кинематических уравнений* и может быть рассмотрена самостоятельно (см. также [133, 134, 139, 140]).

4.5.1. Циклические первые интегралы. Сразу же заметим, что система (4.5.1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 = I_4, \tag{4.5.5}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \text{const}, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0 = \text{const}, \quad \omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}. \tag{4.5.6}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \tag{4.5.7}$$

4.5.2. Неинтегрируемая связь. Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [145])

$$v \equiv \text{const}, \quad (4.5.8)$$

то в системе (4.5.1) вместо F_1 будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2. \quad (4.5.9)$$

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (4.5.8) [154]. Действительно, формально выражая величину T в силу системы (4.5.1), получим при $\cos \alpha \neq 0$:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) = m\sigma(\omega_3^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2) + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma \sin \alpha}{2I_2 \cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \quad (4.5.10)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \\ &+ x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \cos \beta_2 + x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (4.5.8). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (4.5.1) в результате действий порождает независимую систему шестого порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \omega_6 v \cos \alpha - \sigma \dot{\omega}_6 &= 0, \\ \dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \\ &- \omega_5 v \cos \alpha + \sigma \dot{\omega}_5 = 0, \\ \dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \\ &+ \omega_3 v \cos \alpha - \sigma \dot{\omega}_3 = 0, \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

$$\begin{aligned} 2I_2 \dot{\omega}_3 &= x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\ 2I_2 \dot{\omega}_5 &= -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\ 2I_2 \dot{\omega}_6 &= x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \end{aligned}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v .

Система (4.5.12) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}v \cos \alpha + v \cos \alpha [\omega_6 \cos \beta_1 - \omega_5 \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_3 \sin \beta_1 \sin \beta_2] + \\ + \sigma [-\dot{\omega}_6 \cos \beta_1 + \dot{\omega}_5 \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \dot{\omega}_3 \sin \beta_1 \sin \beta_2] &= 0, \\ \dot{\beta}_1 v \sin \alpha - v \cos \alpha [\omega_5 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \sin \beta_1 - \omega_3 \cos \beta_1 \sin \beta_2] + \\ + \sigma [\dot{\omega}_5 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\omega}_6 \sin \beta_1 - \dot{\omega}_3 \cos \beta_1 \sin \beta_2] &= 0, \\ \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 + v \cos \alpha [\omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2] + \\ + \sigma [-\dot{\omega}_3 \cos \beta_2 - \dot{\omega}_5 \sin \beta_2] &= 0, \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_3 &= \frac{v^2}{2I_2} x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\ \dot{\omega}_5 &= -\frac{v^2}{2I_2} x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \end{aligned}$$

$$\dot{\omega}_6 = \frac{v^2}{2I_2} x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha).$$

Введем новые квазискорости в системе:

$$\begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix} = T_{1,2}(\beta_2) \circ T_{2,3}(\beta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad (4.5.14)$$

где

$$T_{2,3}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ 0 & \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}, \quad T_{1,2}(\beta_2) = \begin{pmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & 0 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5.15)$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = T_{2,3}(-\beta_1) \circ T_{1,2}(-\beta_2) \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix}, \quad (4.5.16)$$

т.е.

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3 \cos \beta_1 + \omega_5 \sin \beta_2, \\ z_2 &= -\omega_3 \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \omega_5 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \sin \beta_1, \\ z_3 &= \omega_3 \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

Как видно из (4.5.13), на многообразии

$$O_1 = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6) \in \mathbb{R}^6 : \alpha = \frac{\pi}{2}k, \beta_1 = \pi l, k, l \in \mathbb{Z} \right\} \quad (4.5.18)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}_1$, $\dot{\beta}_2$. Формально, таким образом, на многообразии (4.5.18) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном и любом l неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$, а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (4.5.13) вырождается.

Из этого следует, что система (4.5.12) вне и только вне многообразия (4.5.18) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_3 + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \\ \dot{z}_3 &= \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) - (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ &\quad - \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_2 \Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_1 \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \\ \dot{z}_2 &= -\frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \\ &\quad + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_3 \Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) - \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} z_1 \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \\ \dot{z}_1 &= \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \\ &\quad - \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_3 \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} z_2 \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \\ \dot{\beta}_1 &= z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \\ \dot{\beta}_2 &= -z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma v}{2I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right), \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

где

$$\Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) = x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \sin \beta_2 +$$

$$+x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \cos \beta_2 - x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1, \quad (4.5.20)$$

$$\begin{aligned} \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_2 - \\ &- x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_2, \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ представляется в виде (4.5.11).

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \beta_2, z_1/v, z_2/v, z_3/v)$ в силу (4.5.17).

Нарушение теоремы единственности для системы (4.5.13) на многообразии (4.5.18) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (4.5.18) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (4.5.13), пересекая многообразие (4.5.18) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (4.5.8) необходимо выбрать значение T при $\cos \alpha \neq 0$ в виде (4.5.10).

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) = L \left(\beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right). \quad (4.5.22)$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right) \right| < +\infty. \quad (4.5.23)$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \Omega \right) = m\sigma(\omega_3^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2) - \frac{m\sigma Lv^2}{2I_2}, \quad (4.5.24)$$

где значения $\omega_3, \omega_5, \omega_6$ — произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W евклидова пространства \mathbb{E}^4 , необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \Omega \right) = \frac{mv^2}{R_0}, \quad (4.5.25)$$

где R_0 — расстояние CW .

Равенства (4.5.24) и (4.5.25) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (4.5.18), что и доказывает сделанное замечание.

4.5.3. Постоянная скорость центра масс. Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [155, 160, 208])

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const} \quad (4.5.26)$$

(\mathbf{V}_C — скорость центра масс), то в системе (4.5.1) вместо F_1 должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \quad (4.5.27)$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (4.5.28)$$

Случай (4.5.28) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы четвертого порядка после некоторого преобразования системы (4.5.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$\begin{aligned} T &= T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) = \\ &= \sum_{i,j=0, i \leq j}^6 \tau_{i,j} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \omega_i \omega_j = T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \omega_0 = v. \end{aligned} \quad (4.5.29)$$

Введем для начала новые квазискорости (4.5.14)–(4.5.16).

Систему (4.5.1) в случаях (4.5.5)–(4.5.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \cos \alpha - \sigma \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= \\ = \frac{T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \\ \dot{\alpha} v + z_3 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \sin \alpha - \sigma \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= \\ = \frac{s(\alpha) v^2 - T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \\ \dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_2 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{2I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= 0, \\ \dot{\beta}_2 \sin \alpha \sin \beta_1 + z_1 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{2I_2} s(\alpha) \cdot \Theta_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= 0, \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{v^2}{2I_2} x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\ \dot{\omega}_5 &= -\frac{v^2}{2I_2} x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\ \dot{\omega}_6 &= \frac{v^2}{2I_2} x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \end{aligned} \quad (4.5.30)$$

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const}, \quad (4.5.31)$$

система (4.5.30) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (4.5.32)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_3 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha + \\ &+ \frac{\sigma}{2I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\ &- \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4.5.33)$$

$$\begin{aligned} Z_3' &= \frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ &- \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + \\ &+ \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - Z_3 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \end{aligned} \quad (4.5.34)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= -\frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_3 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\ &- \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - Z_2 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \end{aligned} \quad (4.5.35)$$

$$Z'_1 = \frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} -$$

$$- Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) \times$$

$$\times [Z_3 \sin \beta_1 - Z_2 \cos \beta_1] - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (4.5.36)$$

$$\beta'_1 = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z), \quad (4.5.37)$$

$$\beta'_2 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z), \quad (4.5.38)$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha +$$

$$+ \frac{\sigma}{2I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) +$$

$$+ \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \quad (4.5.39)$$

а функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v})$, $\Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v})$, $\Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v})$ представляются в виде (4.5.11), (4.5.20), (4.5.21), соответственно.

Видно, что в системе седьмого порядка (4.5.32)–(4.5.38) может быть выделена независимая подсистема шестого порядка (4.5.33)–(4.5.38), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем шестимерном фазовом пространстве.

В частности, при выполнении условия (4.5.28) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы шестого порядка также возможен.

4.6. СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Выберем функцию \mathbf{r}_N в следующем виде (диск D^3 задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ x_{3N} \\ x_{4N} \end{pmatrix} = R(\alpha) \mathbf{i}_N, \quad (4.6.1)$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2 \right) \quad (4.6.2)$$

(см. (4.3.2)).

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 \sin \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (4.6.3)$$

Таким образом, выполнены равенства

$$x_{2N} = R(\alpha) \cos \beta_1, \quad x_{3N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \cos \beta_2, \quad x_{4N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad (4.6.4)$$

убеждающие нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, β_1, β_2).

Итак, для построения силового поля используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [121, 122], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B > 0. \quad (4.6.5)$$

4.6.1. Приведенные системы.

Теорема 4.6.1. Совместные уравнения (4.2.13), (4.3.3), (4.4.6) при выполнении условий (4.2.15)–(4.2.17), (4.6.1), (4.6.5) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (4.1.5) трехмерной сферы (4.1.4).

Действительно, если ввести безразмерные параметр и дифференцирование:

$$b_* = ln_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{2I_2}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v_\infty \langle' \rangle, \quad (4.6.6)$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi'' + b_* \xi' \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - [\eta_1'^2 + \eta_2'^2 \sin^2 \eta_1] \frac{\sin \xi}{\cos \xi} &= 0, \\ \eta_1'' + b_* \eta_1' \cos \xi + \xi' \eta_1' \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} - \eta_2'^2 \sin \eta_1 \cos \eta_1 &= 0, \\ \eta_2'' + b_* \eta_2' \cos \xi + \xi' \eta_2' \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\eta_1' \eta_2' \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} &= 0, \quad b_* > 0. \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (4.4.5)) к промежуточным безразмерным переменным

$$z_k = n_0 v_\infty Z_k, \quad k = 1, 2, \quad z_3 = n_0 v_\infty Z_3 - n_0 v_\infty b_* \sin \xi, \quad (4.6.8)$$

система (4.6.7) будет эквивалентна системе

$$\xi' = Z_3 - b_* \sin \xi, \quad (4.6.9)$$

$$Z_3' = -\sin \xi \cos \xi + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (4.6.10)$$

$$Z_2' = -Z_2 Z_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} - Z_1^2 \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1}, \quad (4.6.11)$$

$$Z_1' = -Z_1 Z_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + Z_1 Z_2 \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1}, \quad (4.6.12)$$

$$\eta_1' = -Z_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (4.6.13)$$

$$\eta_2' = Z_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1}, \quad (4.6.14)$$

на касательном расслоении

$$T_* \mathbb{S}^3 \{ (Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^6 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi \} \quad (4.6.15)$$

трехмерной сферы $\mathbb{S}^3 \{ (\xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi \}$.

Видно, что в системе шестого порядка (4.6.9)–(4.6.14) по причине цикличности переменной η_2 выделяется независимая подсистема пятого порядка (4.6.9)–(4.6.13), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем пятимерном многообразии.

4.6.2. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы (4.6.9)–(4.6.14) шестого порядка необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до четырех для интегрирования систем.

4.6.2.1. Система при отсутствии силового поля. Рассмотрим систему (4.6.9)–(4.6.14) на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2\}$ трехмерной сферы $\mathbb{S}^3\{\xi, \eta_1, \eta_2\}$. При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (4.5.11) тождественно равна нулю (в частности, $b_* = 0$, а также коэффициент $\sin \xi \cos \xi$ в уравнении (4.6.10) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_3, \quad (4.6.16)$$

$$Z_3' = (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (4.6.17)$$

$$Z_2' = -Z_2 Z_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} - Z_1^2 \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1}, \quad (4.6.18)$$

$$Z_1' = -Z_1 Z_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + Z_1 Z_2 \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1}, \quad (4.6.19)$$

$$\eta_1' = -Z_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (4.6.20)$$

$$\eta_2' = Z_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1}. \quad (4.6.21)$$

Система (4.6.16)–(4.6.21) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 4.6.2. Система (4.6.16)–(4.6.21) обладает четырьмя независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} = C_1 = \text{const}, \quad (4.6.22)$$

$$\Phi_2(Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \xi = C_2 = \text{const}, \quad (4.6.23)$$

$$\Phi_3(Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = Z_1 \sin \xi \sin \eta_1 = C_3 = \text{const}, \quad (4.6.24)$$

$$\Phi_4(Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = C_4 = \text{const}. \quad (4.6.25)$$

Три первых интеграла (4.6.22)–(4.6.24) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются три (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости четырехмерного твердого тела, а именно:

$$\omega_3 \equiv \omega_3^0 = \text{const}, \quad \omega_5 \equiv \omega_5^0 = \text{const}, \quad \omega_6 \equiv \omega_6^0 = \text{const}. \quad (4.6.26)$$

В частности, наличие первого интеграла (4.6.22) объясняется равенством

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2} [\omega_3^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2] \equiv C_1^2 = \text{const}. \quad (4.6.27)$$

Четвертый первый интеграл (4.6.25) имеет кинематический смысл, “привязывает” уравнение на η_2 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\eta_2}{d\eta_1} = -\frac{Z_1}{Z_2} \frac{1}{\sin \eta_1}, \quad (4.6.28)$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (4.6.23), (4.6.24) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm \sqrt{\frac{C_2^2}{C_3^2} \sin^2 \eta_1 - 1}, \quad (4.6.29)$$

то квадратура (4.6.28) примет вид

$$\eta_2 = \pm \int \frac{du}{(1-u^2) \sqrt{\left(\frac{C_2^2}{C_3^2} - 1\right) - \frac{C_2^2}{C_3^2} u^2}}, \quad u = \cos \eta_1. \quad (4.6.30)$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\eta_2 + C_4 = \pm \operatorname{arctg} \frac{\cos \eta_1}{\sqrt{\frac{C_2^2}{C_3^2} \sin^2 \eta_1 - 1}}, \quad C_4 = \operatorname{const}, \quad (4.6.31)$$

позволяющему получить первый интеграл (4.6.25). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(\eta_2 + C_4) = \frac{C_3^2}{(C_2^2 - C_3^2) \operatorname{tg}^2 \eta_1 - C_3^2}. \quad (4.6.32)$$

Теперь перефразируем теорему 4.6.2.

Теорема 4.6.3. Система (4.6.16)–(4.6.21) обладает четырьмя независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Psi_1(Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \xi} = C'_1 = \operatorname{const}, \quad (4.6.33)$$

$$\Psi_2(Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = C'_2 = \operatorname{const}, \quad (4.6.34)$$

$$\Psi_3(Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin \eta_1} = C'_3 = \operatorname{const}, \quad (4.6.35)$$

$$\Psi_4(Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = C'_4 = \operatorname{const}. \quad (4.6.36)$$

Первый интеграл (4.6.36) также имеет кинематический смысл и “привязывает” уравнение на η_2 , а функции Ψ_2, Ψ_4 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_4 .

В формулировке теоремы 4.6.3 (в отличие от теоремы 4.6.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (4.6.33)–(4.6.36) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 4.6.3 преобразованный набор первых интегралов (4.6.33)–(4.6.36) системы (4.6.16)–(4.6.21) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (4.6.16)–(4.6.21) шестого порядка необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$\begin{aligned} w_3 &= -Z_3, \\ w_2 &= \sqrt{Z_2^2 + Z_1^2}, \\ w_1 &= \frac{Z_2}{Z_1}, \end{aligned} \quad (4.6.37)$$

система (4.6.16)–(4.6.21) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -w_3, \\ w_3' &= -w_2^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ w_2' &= w_2 w_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6.38)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) \frac{1 + w_1^2 \cos \eta_1}{w_1 \sin \eta_1}, \\ \eta_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.6.39)$$

$$\eta_2' = d_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \quad (4.6.40)$$

где

$$d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = Z_2(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi} = \pm \frac{w_1 w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (4.6.41)$$

$$d_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = -Z_1(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1} = \mp \frac{w_2}{\sqrt{1+w_1^2}} \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1},$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, \quad (4.6.42)$$

— функции в силу замены (4.6.37).

Система (4.6.38)–(4.6.40) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^3\{(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^6 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi\} \quad (4.6.43)$$

трехмерной сферы $\mathbb{S}^3\{(\xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (4.6.38)–(4.6.40) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.6.38), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (4.6.39) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_2) уравнение (4.6.40) на η_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.6.38)–(4.6.40) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.6.38), один — для системы (4.6.39) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.6.40) (*т.е. всего четыре*).

Замечание 4.6.1. *Выпишем первые интегралы (4.6.33)–(4.6.36) в переменных w_1, w_2, w_3 в силу (4.6.37). Получим:*

$$\Theta_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \frac{w_2^2 + w_3^2}{w_2 \sin \xi} = C_1'' = const, \quad (4.6.44)$$

$$\Theta_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = w_2 \sin \xi = C_2'' = const, \quad (4.6.45)$$

$$\Theta_3(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin \eta_1} = C_3'' = const, \quad (4.6.46)$$

$$\Theta_4(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = C_4'' = const. \quad (4.6.47)$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (4.6.44), (4.6.45) достаточны для интегрирования системы (4.6.38), первый интеграл (4.6.46) достаточен для интегрирования независимого уравнения первого порядка

$$\frac{dw_1}{d\eta_1} = \frac{1+w_1^2}{w_1} \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1}, \quad (4.6.48)$$

после замены независимого переменного эквивалентного системе (4.6.39), и, наконец, первый интеграл (4.6.47) достаточен для “привязывания” уравнения (4.6.40). Доказана

Теорема 4.6.4. *Система (4.6.16)–(4.6.21) шестого порядка обладает достаточным количеством (четырьмя) независимых первых интегралов.*

4.6.2.2. *Система при наличии консервативного силового поля.* Теперь рассмотрим систему (4.6.9)–(4.6.14) при условии $b_* = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin \xi \cos \xi$ в уравнении (4.6.10) (в отличие от системы (4.6.16)–(4.6.21)). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_3, \quad (4.6.49)$$

$$Z_3' = -\sin \xi \cos \xi + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (4.6.50)$$

$$Z_2' = -Z_2 Z_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} - Z_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1}, \quad (4.6.51)$$

$$Z_1' = -Z_1 Z_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + Z_1 Z_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1}, \quad (4.6.52)$$

$$\eta'_1 = -Z_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (4.6.53)$$

$$\eta'_2 = Z_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1}. \quad (4.6.54)$$

Итак, система (4.6.49)–(4.6.54) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 4.6.5. Система (4.6.49)–(4.6.54) обладает четырьмя независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \sin^2 \xi = C_1 = \text{const}, \quad (4.6.55)$$

$$\Phi_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \xi = C_2 = \text{const}, \quad (4.6.56)$$

$$\Phi_3(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = Z_1 \sin \xi \sin \eta_1 = C_3 = \text{const}, \quad (4.6.57)$$

$$\Phi_4(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = C_4 = \text{const}. \quad (4.6.58)$$

Первый интеграл (4.6.55) является интегралом полной энергии. Первый интеграл (4.6.58) имеет кинематический смысл, “привязывает” уравнение на η_2 и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 4.6.5.

Теорема 4.6.6. Система (4.6.49)–(4.6.54) обладает четырьмя независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Psi_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \sin^2 \xi}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin \xi} = C'_1 = \text{const}, \quad (4.6.59)$$

$$\Psi_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = C'_2 = \text{const}, \quad (4.6.60)$$

$$\Psi_3(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin \eta_1} = C'_3 = \text{const}, \quad (4.6.61)$$

$$\Psi_4(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = C'_4 = \text{const}. \quad (4.6.62)$$

Функции Ψ_2, Ψ_4 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_4 .

В формулировке теоремы 4.6.6 (в отличие от теоремы 4.6.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (4.6.59)–(4.6.62) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 4.6.6 преобразованный набор первых интегралов (4.6.59)–(4.6.62) системы (4.6.49)–(4.6.54) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (4.6.49)–(4.6.54) шестого порядка необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (4.6.37) система (4.6.49)–(4.6.54) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -w_3, \\ w'_3 &= \sin \xi \cos \xi - w_2^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ w'_2 &= w_2 w_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6.63)$$

$$\left. \begin{aligned} w'_1 &= d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) \frac{1 + w_1^2 \cos \eta_1}{w_1 \sin \eta_1}, \\ \eta'_1 &= d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.6.64)$$

$$\eta'_2 = d_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \quad (4.6.65)$$

где выполнены условия (4.6.41).

Система (4.6.63)–(4.6.65) рассматривается на касательном расслоении (4.6.43) трехмерной сферы $\mathbb{S}^3\{(\xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (4.6.63)–(4.6.65) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.6.63), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (4.6.64) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_2) уравнение (4.6.65) на η_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.6.63)–(4.6.65) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.6.63), один — для системы (4.6.64) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.6.65) (*т.е. всего четыре*).

Замечание 4.6.2. *Выпишем первые интегралы (4.6.59)–(4.6.62) в переменных w_1, w_2, w_3 в силу (4.6.37). Получим:*

$$\Theta_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \frac{w_2^2 + w_3^2 + \sin^2 \xi}{w_2 \sin \xi} = C_1'' = \text{const}, \quad (4.6.66)$$

$$\Theta_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = w_2 \sin \xi = C_2'' = \text{const}, \quad (4.6.67)$$

$$\Theta_3(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \eta_1} = C_3'' = \text{const}, \quad (4.6.68)$$

$$\Theta_4(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) = C_4'' = \text{const}. \quad (4.6.69)$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (4.6.66), (4.6.67) достаточны для интегрирования системы (4.6.63), первый интеграл (4.6.68) достаточен для интегрирования независимого уравнения первого порядка

$$\frac{dw_1}{d\eta_1} = \frac{1 + w_1^2 \cos \eta_1}{w_1 \sin \eta_1}, \quad (4.6.70)$$

после замены независимого переменного эквивалентного системе (4.6.64), и, наконец, первый интеграл (4.6.69) достаточен для “привязывания” уравнения (4.6.65). Доказана

Теорема 4.6.7. *Система (4.6.49)–(4.6.54) шестого порядка обладает достаточным количеством (четырьмя) независимых первых интегралов.*

4.6.3. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (4.6.9)–(4.6.14) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (4.6.9)–(4.6.14) шестого порядка необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (4.6.37) система (4.6.9)–(4.6.14) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -w_3 - b_* \sin \xi, \\ w_3' &= \sin \xi \cos \xi - w_2^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ w_2' &= w_2 w_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6.71)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) \frac{1 + w_1^2 \cos \eta_1}{w_1 \sin \eta_1}, \\ \eta_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.6.72)$$

$$\eta_2' = d_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \quad (4.6.73)$$

где выполнены условия (4.6.41).

Видно, что в системе шестого порядка (4.6.71)–(4.6.73) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.6.71), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (4.6.72) (после замены независимой

переменной), а также (по причине цикличности переменной η_2) уравнение (4.6.73) на η_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.6.71)–(4.6.73) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.6.71), один — для системы (4.6.72) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.6.73) (*т.е. всего четыре*).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (4.6.71) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dw_3}{d\xi} &= \frac{\sin \xi \cos \xi - w_2^2 \cos \xi / \sin \xi}{-w_3 - b_* \sin \xi}, \\ \frac{dw_2}{d\xi} &= \frac{w_2 w_3 \cos \xi / \sin \xi}{-w_3 - b_* \sin \xi}.\end{aligned}\quad (4.6.74)$$

Используя замену $\tau = \sin \xi$, перепишем систему (4.6.74) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{\tau - w_2^2 / \tau}{-w_3 - b_* \tau}, \\ \frac{dw_2}{d\tau} &= \frac{w_2 w_3 / \tau}{-w_3 - b_* \tau}.\end{aligned}\quad (4.6.75)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_2 \tau, \quad w_2 = u_1 \tau, \quad (4.6.76)$$

приводим систему (4.6.75) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - u_1^2}{-u_2 - b_*}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1 u_2}{-u_2 - b_*},\end{aligned}\quad (4.6.77)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - b_* u_2}{-u_2 - b_*}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1 u_2 - b_* u_1}{-u_2 - b_*}.\end{aligned}\quad (4.6.78)$$

Сопоставим системе второго порядка (4.6.78) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 + b_* u_2}{2u_1 u_2 + b_* u_1}, \quad (4.6.79)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d \left(\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_* u_2 + 1}{u_1} \right) = 0. \quad (4.6.80)$$

Итак, уравнение (4.6.79) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_* u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (4.6.81)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_3, w_2; \xi) = \frac{w_3^2 + w_2^2 + b_* w_3 \sin \xi + \sin^2 \xi}{w_2 \sin \xi} = C_1 = \text{const}. \quad (4.6.82)$$

Замечание 4.6.3. Рассмотрим систему (4.6.71) с переменной диссипацией с нулевым средним [224, 228, 235], становящейся консервативной при $b_* = 0$:

$$\begin{aligned}\xi' &= -w_3, \\ w_3' &= \sin \xi \cos \xi - w_2^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ w_2' &= w_2 w_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}.\end{aligned}\tag{4.6.83}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_3^2 + w_2^2 + \sin^2 \xi = C_1^* = \text{const},\tag{4.6.84}$$

$$w_2 \sin \xi = C_2^* = \text{const}.\tag{4.6.85}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.6.84), (4.6.85) также является первым интегралом системы (4.6.83). Но при $b_* \neq 0$ каждая из функций

$$w_3^2 + w_2^2 + b_* w_3 \sin \xi + \sin^2 \xi\tag{4.6.86}$$

и (4.6.85) по отдельности не является первым интегралом системы (4.6.71). Однако отношение функций (4.6.86), (4.6.85) является первым интегралом системы (4.6.71) при любом b_* .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.6.71). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (4.6.81) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_*}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b_*^2 + C_1^2}{4} - 1.\tag{4.6.87}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_*^2 + C_1^2 - 4 \geq 0,\tag{4.6.88}$$

и фазовое пространство системы (4.6.71) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (4.6.87).

Таким образом, в силу соотношения (4.6.81) первое уравнение системы (4.6.78) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + b_* u_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 - b_*},\tag{4.6.89}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + b_* u_2 + 1)}\},\tag{4.6.90}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (4.6.88).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (4.6.71) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(-b_* - u_2) du_2}{2(1 + b_* u_2 + u_2^2) - C_1 \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + b_* u_2 + 1)}\}/2}.\tag{4.6.91}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \xi|.\tag{4.6.92}$$

Если

$$u_2 + \frac{b_*}{2} = r_1, \quad b_1^2 = b_*^2 + C_1^2 - 4,\tag{4.6.93}$$

то правая часть равенства (4.6.91) примет вид

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b_* \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = \\ = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b_*}{2} I_1,\end{aligned}\tag{4.6.94}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \quad (4.6.95)$$

При вычислении интеграла (4.6.95) возможны три случая.

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \text{const.} \quad (4.6.96)$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b_*^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (4.6.97)$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (4.6.98)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_3}{\sin \xi} + \frac{b_*}{2}, \quad (4.6.99)$$

имеем окончательный вид для величины I_1 :

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \text{const.} \quad (4.6.100)$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b_*^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (4.6.101)$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (4.6.102)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (4.6.71) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 4.6.4. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (4.6.81).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_3, w_2; \xi) = G \left(\sin \xi, \frac{w_3}{\sin \xi}, \frac{w_2}{\sin \xi} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (4.6.103)$$

Итак, найдены два первых интеграла (4.6.82), (4.6.103) независимой системы третьего порядка (4.6.71). Осталось указать один первый интеграл — для системы (4.6.72) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.6.73).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (4.6.68), (4.6.69), а именно:

$$\Theta_3(w_1; \eta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \eta_1} = C_3 = \text{const.}, \quad (4.6.104)$$

$$\Theta_4(w_1; \eta_1, \eta_2) = \eta_2 \pm \operatorname{arctg} \frac{\cos \eta_1}{\sqrt{C_3^2 \sin^2 \eta_1 - 1}} = C_4 = \operatorname{const}, \quad (4.6.105)$$

при этом в левую часть равенства (4.6.105) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (4.6.104).

Теорема 4.6.8. Система (4.6.71)–(4.6.73) шестого порядка обладает достаточным количеством (четырьмя) независимых первых интегралов (4.6.82), (4.6.103), (4.6.104), (4.6.105).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (4.6.9)–(4.6.14) имеет четыре первых интеграла, выражающихся соотношениями (4.6.82), (4.6.103), (4.6.104), (4.6.105) (при этом используются выражения (4.6.91)–(4.6.102)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 4.6.9. Три группы соотношений (4.2.13), (4.3.3), (4.4.6) при условиях (4.2.15)–(4.2.17), (4.6.1), (4.6.5) обладают четырьмя первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.

4.6.4. Топологические аналогии. Предъявим далее две группы аналогий, связанных с системой (4.5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (4.5.8). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (4.5.19).

При выполнении условий (4.6.1), (4.6.5) система (4.5.19) примет вид

$$\alpha' = -Z_3 + b \sin \alpha, \quad (4.6.106)$$

$$Z_3' = \sin \alpha \cos \alpha - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.6.107)$$

$$Z_2' = Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.6.108)$$

$$Z_1' = Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.6.109)$$

$$\beta_1' = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.6.110)$$

$$\beta_2' = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.6.111)$$

если ввести безразмерные параметр, переменные и дифференцирование по аналогии с (4.6.6):

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{2I_2}, \quad z_k = n_0 v Z_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle. \quad (4.6.112)$$

Теорема 4.6.10. Система (4.6.106)–(4.6.111) (для свободного тела) эквивалентна системе (4.6.9)–(4.6.14) (для закрепленного маятника).

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \quad \eta_1 = \beta_1, \quad \eta_2 = \beta_2, \quad b_* = -b, \quad (4.6.113)$$

а также сопоставить переменные $Z_k \leftrightarrow -Z_k$, $k = 1, 2, 3$.

Для полного интегрирования системы (4.6.106)–(4.6.111) необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$\begin{aligned} w_3 &= Z_3, \\ w_2 &= \sqrt{Z_2^2 + Z_1^2}, \\ w_1 &= \frac{Z_2}{Z_1}, \end{aligned} \quad (4.6.114)$$

система (4.6.106)–(4.6.111) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -w_3 + b \sin \alpha, \\ w_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - w_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ w_2' &= w_2 w_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6.115)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.6.116)$$

$$\beta_2' = d_2(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \quad (4.6.117)$$

где

$$d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = Z_2(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \frac{w_1 w_2 \cos \alpha}{\sqrt{1 + w_1^2} \sin \alpha}, \quad (4.6.118)$$

$$d_2(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = -Z_1(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} = \mp \frac{w_2}{\sqrt{1 + w_1^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1},$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.6.119)$$

— функции в силу замены (4.6.114).

Система (4.6.115)–(4.6.117) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^3\{(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^6 : 0 \leq \alpha, \beta_1 \leq \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\} \quad (4.6.120)$$

трехмерной сферы $\mathbb{S}^3\{(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \alpha, \beta_1 \leq \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (4.6.115)–(4.6.117) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.6.115), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (4.6.116) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_2) уравнение (4.6.117) на β_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.6.115)–(4.6.117) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.6.115), один — для системы (4.6.116) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.6.117) (*т.е. всего четыре*).

Следствие 4.6.1. 1) Угол атаки α и углы β_1, β_2 для свободного тела эквивалентны соответственно углам отклонения ξ и η_1, η_2 закрепленного маятника.

2) Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.

3) Первые интегралы системы (4.6.115)–(4.6.117) могут быть автоматически получены через равенства (4.6.82), (4.6.103), (4.6.104), (4.6.105) после подстановок (4.6.113) (см. также [197]):

$$\Theta_1'(w_3, w_2; \alpha) = \frac{w_3^2 + w_2^2 - bw_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_2 \sin \alpha} = C_1 = const. \quad (4.6.121)$$

$$\Theta_2'(w_3, w_2; \alpha) = G\left(\sin \alpha, \frac{w_3}{\sin \alpha}, \frac{w_2}{\sin \alpha}\right) = C_2 = const. \quad (4.6.122)$$

$$\Theta_3'(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = const, \quad (4.6.123)$$

$$\Theta_4'(w_1; \beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \arctg \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{C_3^2 \sin^2 \beta_1 - 1}} = C_4 = const, \quad (4.6.124)$$

при этом в левую часть равенства (4.6.124) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (4.6.123).

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (4.5.26). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (4.5.32)–(4.5.38).

Тогда, в силу условий (4.5.26), (4.6.1), (4.6.5), (4.6.112) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (4.5.33)–(4.5.38)) примет вид аналитической системы

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (4.6.125)$$

$$\begin{aligned} Z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.6.126)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.6.127)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.6.128)$$

$$\beta_1' = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.6.129)$$

$$\beta_2' = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.6.130)$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом:

$$n_1 = n_0. \quad (4.6.131)$$

Для полного интегрирования системы (4.6.125)–(4.6.130) необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (4.6.114) система (4.6.125)–(4.6.130) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -w_3 + b(w_2^2 + w_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ w_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - w_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bw_3(w_2^2 + w_3^2) \cos \alpha - bw_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ w_2' &= w_2 w_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bw_2(w_2^2 + w_3^2) \cos \alpha - bw_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (4.6.132)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.6.133)$$

$$\beta_2' = d_2(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \quad (4.6.134)$$

где выполнены условия (4.6.118).

Система (4.6.132)–(4.6.134) рассматривается на касательном расслоении (4.6.120) трехмерной сферы $\mathbb{S}^3\{(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \alpha, \beta_1 \leq \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (4.6.132)–(4.6.134) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.6.132), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (4.6.133) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_2) уравнение (4.6.134) на β_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.6.132)–(4.6.134) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.6.132), один — для системы (4.6.133) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.6.134) (т.е. всего четыре).

Если вопрос о первых интегралах системы (4.6.106)–(4.6.111) (или (4.6.115)–(4.6.117)) решается с помощью следствия 4.6.1, то аналогичный вопрос для системы (4.6.125)–(4.6.130) (или (4.6.132)–(4.6.134)) решает следующая теорема 4.6.11.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (4.6.132) имеет следующий вид [197]:

$$\Theta_1''(w_3, w_2; \alpha) = \frac{w_3^2 + w_2^2 - bw_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_2 \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (4.6.135)$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.6.132), используя при этом первый интеграл (4.6.135). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные (ср. с [197]):

$$\tau = \sin \alpha, \quad w_3 = u_2 \tau, \quad w_2 = u_1 \tau, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (4.6.136)$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad (4.6.137)$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)} \right\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geq 0. \quad (4.6.138)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (4.6.137) зависит от произвольной постоянной C_2 . Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (4.6.137), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1] \exp \left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}} \right], \quad C = \text{const.} \quad (4.6.139)$$

Тогда искомым дополнительным первым интегралом имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2''(w_3, w_2; \alpha) = G \left(\sin \alpha, \frac{w_3}{\sin \alpha}, \frac{w_2}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const.}, \quad (4.6.140)$$

используя при этом обозначения и замены (4.6.136).

Итак, найдены два первых интеграла (4.6.135), (4.6.140) независимой системы третьего порядка (4.6.132). Осталось указать один первый интеграл — для системы (4.6.133), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.6.134).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (4.6.123), (4.6.124), а именно:

$$\Theta_3(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \text{const.}, \quad (4.6.141)$$

$$\Theta_4(w_1; \beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \arctg \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{C_3^2 \sin^2 \beta_1 - 1}} = C_4 = \text{const.}, \quad (4.6.142)$$

при этом в левую часть равенства (4.6.142) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (4.6.141).

Теорема 4.6.11. *Четыре первых интеграла (4.6.135), (4.6.140), (4.6.141), (4.6.142) системы (4.6.132)–(4.6.134) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Теорема 4.6.12. *Четыре первых интеграла (4.6.135), (4.6.140), (4.6.141), (4.6.142) системы (4.6.132)–(4.6.134) эквивалентны четырем первым интегралам (4.6.121), (4.6.122), (4.6.123), (4.6.124) системы (4.6.115)–(4.6.117).*

Действительно, пары первых интегралов (4.6.135), (4.6.121), (4.6.141), (4.6.123) и (4.6.142), (4.6.124) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные w_k , $k = 1, 2, 3$, для системы (4.6.132)–(4.6.134) с фазовыми переменными w_k , $k = 1, 2, 3$, для системы (4.6.115)–(4.6.117). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (4.6.140), (4.6.122), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение закрепленного на (обобщенном) сферическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).

2) Движение четырехмерного свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).

3) Сложное движение четырехмерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [4, 8, 16, 21, 27, 30, 31].

4.7. СЛУЧАЙ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

4.7.1. Введение зависимости от угловой скорости. Данная глава посвящена динамике четырехмерного твердого тела в четырехмерном пространстве. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же, данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на трехмерный диск \mathcal{D}^3 , $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ от тензора угловой скорости Ω лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [25, 26, 53].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (4.7.1)$$

где $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)$ — вектор-функция, содержащая тензор угловой скорости Ω . При этом зависимость функции R от тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v_D} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}. \quad (4.7.2)$$

Здесь (h_1, h_2, h_3, h_4) — некоторые положительные параметры (ср. с [65, 104]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то

$$x_{2N} = Q_2 - h_1 \frac{\omega_6}{v_D}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1 \frac{\omega_5}{v_D}, \quad x_{4N} = Q_4 - h_1 \frac{\omega_3}{v}. \quad (4.7.3)$$

Таким образом, функция \mathbf{r}_N выбирается в следующем виде (диск \mathcal{D}^3 задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ x_{3N} \\ x_{4N} \end{pmatrix} = R(\alpha) \mathbf{i}_N - \frac{1}{v_D} \tilde{\Omega} h, \quad (4.7.4)$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2 \right), \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7.5)$$

(см. (4.1.6), (4.3.2)).

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 \sin \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (4.7.6)$$

Таким образом, выполнены равенства

$$x_{2N} = R(\alpha) \cos \beta_1 - h_1 \frac{\omega_6}{v_D}, \quad x_{3N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \cos \beta_2 + h_1 \frac{\omega_5}{v_D}, \quad x_{4N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \sin \beta_2 - h_1 \frac{\omega_3}{v_D}, \quad (4.7.7)$$

убеждающее нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от тензора угловой скорости).

Итак, для построения силового поля также используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [121, 122, 143], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B > 0. \quad (4.7.8)$$

4.7.2. Приведенные системы.

Теорема 4.7.1. Совместные уравнения (4.2.13), (4.3.3), (4.4.6) при выполнении условий (4.2.15)–(4.2.17), (4.7.4), (4.7.8) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (4.1.5) трехмерной сферы (4.1.4).

Действительно, если ввести безразмерные параметры и дифференцирование:

$$b_* = ln_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{2I_2}, \quad H_{1*} = \frac{h_1 B}{2I_2 n_0}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v_\infty \langle' \rangle, \quad (4.7.9)$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi'' + (b_* - H_{1*})\xi' \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - [\eta_1'^2 + \eta_2'^2 \sin^2 \eta_1] \frac{\sin \xi}{\cos \xi} &= 0, \\ \eta_1'' + (b_* - H_{1*})\eta_1' \cos \xi + \xi' \eta_1' \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} - \eta_2'^2 \sin \eta_1 \cos \eta_1 &= 0, \\ \eta_2'' + (b_* - H_{1*})\eta_2' \cos \xi + \xi' \eta_2' \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\eta_1' \eta_2' \frac{\cos \eta_1}{\cos \eta_1} &= 0, \quad b_* > 0, \quad H_{1*} > 0. \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (4.4.5)) к промежуточным безразмерным переменным

$$z_k = n_0 v_\infty (1 + b_* H_{1*}) Z_k, \quad k = 1, 2, \quad z_3 = n_0 v_\infty (1 + b_* H_{1*}) Z_3 - n_0 v_\infty b_* \sin \xi, \quad (4.7.11)$$

система (4.7.10) будет эквивалентна системе

$$\xi' = (1 + b_* H_{1*}) Z_3 - b_* \sin \xi, \quad (4.7.12)$$

$$Z_3' = -\sin \xi \cos \xi + (1 + b_* H_{1*}) (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*} Z_3 \cos \xi, \quad (4.7.13)$$

$$Z_2' = -(1 + b_* H_{1*}) Z_2 Z_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} - (1 + b_* H_{1*}) Z_1^2 \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1} + H_{1*} Z_2 \cos \xi, \quad (4.7.14)$$

$$Z_1' = -(1 + b_* H_{1*}) Z_1 Z_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + (1 + b_* H_{1*}) Z_1 Z_2 \frac{\cos \xi \cos \eta_1}{\sin \xi \sin \eta_1} + H_{1*} Z_1 \cos \xi, \quad (4.7.15)$$

$$\eta_1' = -(1 + b_* H_{1*}) Z_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (4.7.16)$$

$$\eta_2' = (1 + b_* H_{1*}) Z_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1}, \quad (4.7.17)$$

на касательном расслоении

$$T_* \mathbb{S}^3 \{ (Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^6 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi \} \quad (4.7.18)$$

трехмерной сферы $\mathbb{S}^3\{(\xi, \eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \xi, \eta_1 \leq \pi, \eta_2 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (4.7.12)–(4.7.17) по причине цикличности переменной η_2 выделяется независимая подсистема пятого порядка (4.7.12)–(4.7.16), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем пятимерном многообразии.

4.7.3. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (4.7.12)–(4.7.17) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (4.7.12)–(4.7.17) шестого порядка необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{aligned} w_3 &= -Z_3, \\ w_2 &= \sqrt{Z_2^2 + Z_1^2}, \\ w_1 &= \frac{Z_2}{Z_1}, \end{aligned} \quad (4.7.19)$$

система (4.7.12)–(4.7.17) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= -(1 + b_* H_{1*})w_3 - b_* \sin \xi, \\ w_3' &= \sin \xi \cos \xi - (1 + b_* H_{1*})w_2^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*}w_3 \cos \xi, \\ w_2' &= (1 + b_* H_{1*})w_2 w_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + H_{1*}w_2 \cos \xi, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.20)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) \frac{1 + w_1^2 \cos \eta_1}{w_1 \sin \eta_1}, \\ \eta_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.7.21)$$

$$\eta_2' = d_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2), \quad (4.7.22)$$

где

$$\begin{aligned} d_1(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) &= -(1 + b_* H_{1*})Z_2(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi} = \mp \frac{w_1 w_2}{\sqrt{1 + w_1^2}} \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \\ d_2(w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2) &= (1 + b_* H_{1*})Z_1(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1} = \pm \frac{w_2}{\sqrt{1 + w_1^2}} \frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin \eta_1}, \end{aligned} \quad (4.7.23)$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.7.24)$$

— функции в силу замены (4.7.19).

Видно, что в системе шестого порядка (4.7.20)–(4.7.22) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.7.20), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (4.7.21) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_2) уравнение (4.7.22) на η_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.7.20)–(4.7.22) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.7.20), один — для системы (4.7.21) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.7.22) (*т.е. всего четыре*).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (4.7.20) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_3}{d\xi} &= \frac{\sin \xi \cos \xi - (1 + b_* H_{1*})w_2^2 \cos \xi / \sin \xi + H_{1*}w_3 \cos \xi}{-(1 + b_* H_{1*})w_3 - b_* \sin \xi}, \\ \frac{dw_2}{d\xi} &= \frac{(1 + b_* H_{1*})w_2 w_3 \cos \xi / \sin \xi + H_{1*}w_2 \cos \xi}{-(1 + b_* H_{1*})w_3 - b_* \sin \xi}. \end{aligned} \quad (4.7.25)$$

Используя замену $\tau = \sin \xi$, перепишем систему (4.7.25) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{\tau - (1 + b_* H_{1*})w_2^2/\tau + H_{1*}w_3}{-(1 + b_* H_{1*})w_3 - b_*\tau}, \\ \frac{dw_2}{d\tau} &= \frac{(1 + b_* H_{1*})w_2w_3/\tau + H_{1*}w_2}{-(1 + b_* H_{1*})w_3 - b_*\tau}.\end{aligned}\quad (4.7.26)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_2\tau, \quad w_2 = u_1\tau, \quad (4.7.27)$$

приводим систему (4.7.26) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - (1 + b_* H_{1*})u_1^2 + H_{1*}u_2}{-(1 + b_* H_{1*})u_2 - b_*}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{(1 + b_* H_{1*})u_1u_2 + H_{1*}u_1}{-(1 + b_* H_{1*})u_2 - b_*},\end{aligned}\quad (4.7.28)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 - u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{-(1 + b_* H_{1*})u_2 - b_*}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1 + b_* H_{1*})u_1u_2 + (b_* + H_{1*})u_1}{-(1 + b_* H_{1*})u_2 - b_*}.\end{aligned}\quad (4.7.29)$$

Сопоставим системе второго порядка (4.7.29) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1 + b_* H_{1*})(u_1^2 - u_2^2) + (b_* + H_{1*})u_2}{2(1 + b_* H_{1*})u_1u_2 + (b_* + H_{1*})u_1}, \quad (4.7.30)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \quad (4.7.31)$$

Итак, уравнение (4.7.30) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1 + b_* H_{1*})(u_2^2 + u_1^2) + (b_* + H_{1*})u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (4.7.32)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_3, w_2; \xi) = \frac{(1 + b_* H_{1*})(w_3^2 + w_2^2) + (b_* + H_{1*})w_3 \sin \xi + \sin^2 \xi}{w_2 \sin \xi} = C_1 = \text{const}. \quad (4.7.33)$$

Замечание 4.7.1. Рассмотрим систему (4.7.20) с переменной диссипацией с нулевым средним [201, 205], становящейся консервативной при $b_* = H_{1*}$:

$$\begin{aligned}\xi' &= -(1 + b_*^2)w_3 - b_* \sin \xi, \\ w_3' &= \sin \xi \cos \xi - (1 + b_*^2)w_2^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + b_* w_3 \cos \xi, \\ w_2' &= (1 + b_*^2)w_2 w_3 \frac{\cos \xi}{\sin \xi} + b_* w_2 \cos \xi.\end{aligned}\quad (4.7.34)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b_*^2)(w_3^2 + w_2^2) + 2b_* w_3 \sin \xi + \sin^2 \xi = C_1^* = \text{const}, \quad (4.7.35)$$

$$w_2 \sin \xi = C_2^* = \text{const}. \quad (4.7.36)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.7.35), (4.7.36) также является первым интегралом системы (4.7.34). Но при $b_* \neq H_{1*}$ каждая из функций

$$(1 + b_* H_{1*})(w_3^2 + w_2^2) + (b_* + H_{1*})w_3 \sin \xi + \sin^2 \xi \quad (4.7.37)$$

и (4.7.36) по отдельности не является первым интегралом системы (4.7.20). Однако отношение функций (4.7.37), (4.7.36) является первым интегралом системы (4.7.20) при любых b_* , H_{1*} .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.7.20). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (4.7.32) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_*H_{1*})}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + b_*H_{1*})}\right)^2 = \frac{(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + b_*H_{1*})^2}. \quad (4.7.38)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (4.7.39)$$

и фазовое пространство системы (4.7.20) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (4.7.38).

Таким образом, в силу соотношения (4.7.32) первое уравнение системы (4.7.29) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + b_*H_{1*})u_2^2 + 2(b_* + H_{1*})u_2 + 2 - C_1U_1(C_1, u_2)}{-b_* - (1 + b_*H_{1*})u_2}, \quad (4.7.40)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2(1 + b_*H_{1*})} \{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}, \quad (4.7.41)$$

$$U_2(C_1, u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1 + b_*H_{1*})u_2^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (4.7.39).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (4.7.20) примет вид

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\tau}{\tau} = \\ & = \int \frac{(-b_* - (1 + b_*H_{1*})u_2)du_2}{2(1 + (b_* + H_{1*})u_2 + (1 + b_*H_{1*})u_2^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}/(2(1 + b_*H_{1*}))}. \end{aligned} \quad (4.7.42)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \xi|. \quad (4.7.43)$$

Если

$$u_2 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_*H_{1*})} = r_1, \quad b_1^2 = (b_* - H_{1*})^2 + C_1^2 - 4, \quad (4.7.44)$$

то правая часть равенства (4.7.42) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2)}{(b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2}} + \\ & + (b_* - H_{1*})(1 + b_*H_{1*}) \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{-b_* + H_{1*}}{2} I_1, \end{aligned} \quad (4.7.45)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_*H_{1*})r_1^2}. \quad (4.7.46)$$

При вычислении интеграла (4.7.46) возможны три случая.

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$\begin{aligned} I_1 & = -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \text{const.} \end{aligned} \quad (4.7.47)$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (4.7.48)$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (4.7.49)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_3}{\sin \xi} + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_* H_{1*})}, \quad (4.7.50)$$

имеем окончательный вид для величины I_1 :

I. $|b_* - H_{1*}| > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \pm 2(1 + b_* H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4} \mp 2(1 + b_* H_{1*})r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| + \text{const.} \quad (4.7.51)$$

II. $|b_* - H_{1*}| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (4.7.52)$$

III. $|b_* - H_{1*}| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2(1 + b_* H_{1*})r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + b_* H_{1*})^2 r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (4.7.53)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (4.7.20) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 4.7.2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (4.7.32).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_3, w_2; \xi) = G \left(\sin \xi, \frac{w_3}{\sin \xi}, \frac{w_2}{\sin \xi} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (4.7.54)$$

Итак, найдены два первых интеграла (4.7.33), (4.7.54) независимой системы третьего порядка (4.7.20). Осталось указать один первый интеграл — для системы (4.7.21) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.7.22).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (4.6.141), (4.6.142), а именно:

$$\Theta_3(w_1; \eta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \eta_1} = C_3 = \text{const}, \quad (4.7.55)$$

$$\Theta_4(w_1; \eta_1, \eta_2) = \eta_2 \pm \text{arctg} \frac{\cos \eta_1}{\sqrt{C_3^2 \sin^2 \eta_1 - 1}} = C_4 = \text{const}, \quad (4.7.56)$$

при этом в левую часть равенства (4.7.56) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (4.7.55).

Теорема 4.7.2. Система (4.7.20)–(4.7.22) шестого порядка обладает достаточным количеством (четырьмя) независимых первых интегралов (4.7.33), (4.7.54), (4.7.55), (4.7.56).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (4.7.20)–(4.7.22) имеет четыре первых интеграла, выражающихся соотношениями (4.7.33), (4.7.54), (4.7.55), (4.7.56) (при этом используются выражения (4.7.50)–(4.7.53)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 4.7.3. *Три группы соотношений (4.2.13), (4.3.3), (4.4.6) при условиях (4.2.15)–(4.2.17), (4.7.4), (4.7.8) обладают четырьмя первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

4.7.4. Топологические аналогии. Предъявим далее еще две группы аналогий, связанных с системой (4.5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий снова касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (4.5.8). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (4.5.19).

При выполнении условий (4.7.4), (4.7.8) система (4.5.19) примет вид

$$\alpha' = -(1 + bH_1)Z_3 + b \sin \alpha, \quad (4.7.57)$$

$$Z_3' = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 Z_3 \cos \alpha, \quad (4.7.58)$$

$$Z_2' = (1 + bH_1)Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - H_1 Z_2 \cos \alpha, \quad (4.7.59)$$

$$Z_1' = (1 + bH_1)Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - H_1 Z_1 \cos \alpha, \quad (4.7.60)$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.7.61)$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.7.62)$$

если ввести безразмерные параметры, переменные и дифференцирование по аналогии с (4.7.9):

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{2I_2}, \quad H_1 = \frac{h_1 B}{2I_2 n_0}, \quad z_k = n_0 v Z_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle. \quad (4.7.63)$$

Теорема 4.7.4. *Система (4.7.57)–(4.7.62) (для свободного тела) эквивалентна системе (4.7.12)–(4.7.17) (для закрепленного маятника).*

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \quad \eta_1 = \beta_1, \quad \eta_2 = \beta_2, \quad b_* = -b, \quad H_{1*} = -H_1, \quad (4.7.64)$$

а также сопоставить переменные $Z_k \leftrightarrow -Z_k$, $k = 1, 2, 3$.

Для полного интегрирования системы (4.7.57)–(4.7.62) необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$\begin{aligned} w_3 &= Z_3, \\ w_2 &= \sqrt{Z_2^2 + Z_1^2}, \\ w_1 &= \frac{Z_2}{Z_1}, \end{aligned} \quad (4.7.65)$$

система (4.7.57)–(4.7.62) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -(1 + bH_1)w_3 + b \sin \alpha, \\ w_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_3 \cos \alpha, \\ w_2' &= (1 + bH_1)w_2 w_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_2 \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.66)$$

$$\left. \begin{aligned} w'_1 &= d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta'_1 &= d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.7.67)$$

$$\beta'_2 = d_2(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \quad (4.7.68)$$

где

$$\begin{aligned} d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= (1 + bH_1)Z_2(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \frac{w_1 w_2 \cos \alpha}{\sqrt{1 + w_1^2} \sin \alpha}, \\ d_2(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= -(1 + bH_1)Z_1(w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} = \mp \frac{w_2 \cos \alpha}{\sqrt{1 + w_1^2} \sin \alpha \sin \beta_1}, \end{aligned} \quad (4.7.69)$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.7.70)$$

— функции в силу замены (4.7.65).

Система (4.7.66)–(4.7.68) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbb{S}^3\{(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^6 : 0 \leq \alpha, \beta_1 \leq \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\} \quad (4.7.71)$$

трехмерной сферы $\mathbb{S}^3\{(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \alpha, \beta_1 \leq \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (4.7.66)–(4.7.68) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.7.66), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (4.7.67) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_2) уравнение (4.7.68) на β_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.7.66)–(4.7.68) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.7.66), один — для системы (4.7.67) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.7.68) (*т.е. всего четыре*).

Следствие 4.7.1. 1) Угол атаки α и углы β_1, β_2 для свободного тела эквивалентны соответственно углам отклонения ξ и η_1, η_2 закрепленного маятника.

2) Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.

3) Первые интегралы системы (4.7.66)–(4.7.68) могут быть автоматически получены через равенства (4.7.33), (4.7.54), (4.7.55), (4.7.56) после подстановок (4.7.64) (см. также [197]):

$$\Theta'_1(w_3, w_2; \alpha) = \frac{(1 + bH_1)(w_3^2 + w_2^2) - (b + H_1)w_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_2 \sin \alpha} = C_1 = const. \quad (4.7.72)$$

$$\Theta'_2(w_3, w_2; \alpha) = G\left(\sin \alpha, \frac{w_3}{\sin \alpha}, \frac{w_2}{\sin \alpha}\right) = C_2 = const. \quad (4.7.73)$$

$$\Theta'_3(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = const, \quad (4.7.74)$$

$$\Theta'_4(w_1; \beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \arctg \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{C_3^2 \sin^2 \beta_1 - 1}} = C_4 = const, \quad (4.7.75)$$

при этом в левую часть равенства (4.7.75) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (4.7.74).

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (4.5.26). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (4.5.32)–(4.5.38).

Тогда, в силу условий (4.5.26), (4.7.4), (4.7.8), (4.7.63) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (4.5.33)–(4.5.38)) примет вид аналитической системы

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha -$$

$$-bH_1 Z_3 \cos^2 \alpha, \quad (4.7.76)$$

$$\begin{aligned} Z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_3^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.7.77)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= (1 + bH_1)Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_2 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.7.78)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= (1 + bH_1)Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_1 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.7.79)$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.7.80)$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.7.81)$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом:

$$n_1 = n_0. \quad (4.7.82)$$

Для полного интегрирования системы (4.7.76)–(4.7.81) необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (4.7.65) система (4.7.76)–(4.7.81) распадается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -w_3 + b(w_2^2 + w_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - \\ &- bH_1 w_3 \cos^2 \alpha, \\ w_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bw_3(w_2^2 + w_3^2) \cos \alpha - bw_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 w_3^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_3 \cos \alpha, \\ w_2' &= (1 + bH_1)w_2 w_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bw_2(w_2^2 + w_3^2) \cos \alpha - bw_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 w_2 w_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 w_2 \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.83)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \end{aligned} \right\} \quad (4.7.84)$$

$$\beta_2' = d_2(w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2), \quad (4.7.85)$$

где выполнены условия (4.7.69).

Система (4.7.83)–(4.7.85) рассматривается на касательном расслоении (4.7.71) трехмерной сферы $\mathbb{S}^3\{(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \alpha, \beta_1 \leq \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе шестого порядка (4.7.83)–(4.7.85) выделяется независимая подсистема третьего порядка (4.7.83), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, независимая система второго порядка (4.7.84) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_2) уравнение (4.7.85) на β_2 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (4.7.83)–(4.7.85) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (4.7.83), один — для системы (4.7.84) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.7.85) (*т.е. всего четыре*).

Если вопрос о первых интегралах системы (4.7.57)–(4.7.62) (или (4.7.66)–(4.7.68)) решается с помощью следствия 4.7.1, то аналогичный вопрос для системы (4.7.76)–(4.7.81) (или (4.7.83)–(4.7.85)) решает следующая теорема 4.7.5.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (4.7.83) имеет следующий вид [197]:

$$\Theta_1''(w_3, w_2; \alpha) = \frac{(1 + bH_1)(w_3^2 + w_2^2) - (b + H_1)w_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_2 \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (4.7.86)$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.7.83), используя при этом первый интеграл (4.7.86). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные (ср. с [197]):

$$\tau = \sin \alpha, \quad w_3 = u_2 \tau, \quad w_2 = u_1 \tau, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (4.7.87)$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1 + bH_1)u_2 - b)p + 2b(1 - H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2))}{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)U_1^2(C_1, u_2)}, \quad (4.7.88)$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0. \quad (4.7.89)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (4.7.88) зависит от произвольной постоянной C_2 . Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (4.7.88), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C [1 - A_1 u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1 u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times \\ \times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4)A_1(A_1 u_2 - 1)}, \quad C = \text{const.} \quad (4.7.90)$$

Тогда искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2''(w_3, w_2; \alpha) = G \left(\sin \alpha, \frac{w_3}{\sin \alpha}, \frac{w_2}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}, \quad (4.7.91)$$

используя при этом обозначения и замены (4.7.87).

Итак, найдены два первых интеграла (4.7.86), (4.7.91) независимой системы третьего порядка (4.7.83). Осталось указать один первый интеграл — для системы (4.7.84), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (4.7.85).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (4.7.74), (4.7.75), а именно:

$$\Theta_3(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \text{const}, \quad (4.7.92)$$

$$\Theta_4(w_1; \beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \arctg \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{C_3^2 \sin^2 \beta_1 - 1}} = C_4 = \text{const}, \quad (4.7.93)$$

при этом в левую часть равенства (4.7.93) вместо C_3 необходимо подставить интеграл (4.7.92).

Теорема 4.7.5. *Четыре первых интеграла (4.7.86), (4.7.91), (4.7.92), (4.7.93) системы (4.7.83)–(4.7.85) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Теорема 4.7.6. *Четыре первых интеграла (4.7.86), (4.7.91), (4.7.92), (4.7.93) системы (4.7.83)–(4.7.85) эквивалентны четырем первым интегралам (4.7.72), (4.7.73), (4.7.74), (4.7.75) системы (4.7.66)–(4.7.68).*

Действительно, пары первых интегралов (4.7.86), (4.7.72), (4.7.92), (4.7.74) и (4.7.93), (4.7.75) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные w_k , $k = 1, 2, 3$, для системы (4.7.83)–(4.7.85) с фазовыми переменными w_k , $k = 1, 2, 3$, для системы (4.7.66)–(4.7.68). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (4.7.91), (4.7.73), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение закрепленного на (обобщенном) сферическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости).

2) Движение четырехмерного свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи и при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости).

3) Сложное движение четырехмерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от тензора угловой скорости.

О более общих топологических аналогиях см. также [32, 39, 43, 45, 60, 69].

ГЛАВА 5

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В ДИНАМИКЕ n -МЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ ПРИ $n = 5$ И $n = 6$

В этой главе изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле «в лоб» интегрировать основное уравнение динамики (см. также [?, 41]). При этом предлагается более универсальное изложение известных, а также полученных новых случаев полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике $5D$ и $6D$ твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил.

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удастся найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций [21, 30, 42, ?].

Здесь изложены общие аспекты динамики свободного многомерного твердого тела: понятие тензора угловой скорости тела, совместные динамические уравнения движения на прямом произведении $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n)$, формулы Эйлера и Ривальса в многомерном случае.

Рассмотрен вопрос о тензоре инерции пятимерного и шестимерного твердого тела. В данной работе предлагается изучать один из логически возможных случаев на главные моменты инерции (когда имеются два соотношения на главные моменты инерции):

- когда имеется *четыре* равных главных момента инерции ($I_2 = I_3 = I_4 = I_5$ для $5D$ тела) или когда имеется *пять* равных главных моментов инерции ($I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6$ для $6D$ тела).

Результаты относятся к случаю, когда взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму четырехмерного (пятимерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизированы и представлены в инвариантном виде. При этом вводится

дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

5.1. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РАССУЖДЕНИЯ

5.1.1. Случай динамической симметрии пятимерного и шестимерного тела. Пусть пятимерное (соответственно, шестимерное) твердое тело Θ массы m с гладкой четырехмерной (соответственно, пятимерной) границей $\partial\Theta$ находится под воздействием некоторого неконсервативного поля сил (а именно, это можно интерпретировать как движение тела в сопротивляющейся среде, заполняющей пятимерную (соответственно, шестимерную) область евклидова пространства \mathbb{E}^5 (соответственно, \mathbb{E}^6)). Предположим, что оно является динамически симметричным, при этом имеются несколько логических возможностей представления его тензора инерции в случае наличия трех (соответственно, четырех) независимых равенств главных моментов инерции: либо в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$ (соответственно, $Dx_1x_2x_3x_4x_5x_6$) оператор инерции имеет вид

$$\text{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2, I_2\} \quad (5.1.1)$$

либо вид

$$\text{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3, I_3\}. \quad (5.1.2)$$

Соответственно, оператор инерции имеет вид

$$\text{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2, I_2, I_2\}, \quad (5.1.3)$$

либо вид

$$\text{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3, I_3, I_3\}, \quad (5.1.4)$$

либо вид

$$\text{diag}\{I_1, I_1, I_1, I_3, I_3, I_3\}. \quad (5.1.5)$$

В случаях (5.1.1) и (5.1.3) в гиперплоскостях $Dx_2x_3x_4x_5$ и $Dx_2x_3x_4x_5x_6$ тело динамически симметрично.

5.1.2. Динамика на $\mathfrak{so}(n)$ и \mathbb{R}^n . Конфигурационным пространством свободного n -мерного твердого тела является прямое произведение пространства \mathbb{R}^n (определяющего координаты центра масс тела) на группу его вращений $\text{SO}(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс):

$$\mathbb{R}^n \times \text{SO}(n) \quad (5.1.6)$$

и имеет размерность $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$. Соответственно, размерность фазового пространства равна $n(n+1)$.

В частности, если Ω — тензор угловой скорости пятимерного (шестимерного) твердого тела (а он является терзором второго ранга [60, 61, 116, 117, 166]), $\Omega \in \mathfrak{so}(5)$ (соответственно, $\Omega \in \mathfrak{so}(6)$), то та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли $\mathfrak{so}(5)$ (соответственно, $\mathfrak{so}(6)$), имеет следующий вид:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \quad (5.1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\} \quad (\text{соответственно, } \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}), \\ \lambda_1 &= \frac{-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_5}{2}, \quad \lambda_5 = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - I_5}{2}, \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

или, соответственно,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6}{2}, & \lambda_2 &= \frac{I_1 - I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5 + I_6}{2}, & \lambda_4 &= \frac{I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_5 + I_6}{2}, \\ \lambda_5 &= \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - I_5 + I_6}{2}, & \lambda_6 &= \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 - I_6}{2},\end{aligned}$$

$M = M_F$ — момент внешних сил \mathbf{F} , действующих на тело в \mathbb{R}^5 (соответственно, \mathbb{R}^6), спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathfrak{so}(5)$ (соответственно, $\mathfrak{so}(6)$), $[\]$ — коммутатор в $\mathfrak{so}(5)$ (соответственно, $\mathfrak{so}(6)$). Кососимметрическую матрицу (отвечающую данному тензору второго ранга) $\Omega \in \mathfrak{so}(5)$ (соответственно, $\Omega \in \mathfrak{so}(6)$) будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1.9)$$

где $\omega_1, \dots, \omega_{10}$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathfrak{so}(5)$, или, соответственно, в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{15} & \omega_{14} & -\omega_{12} & \omega_9 & -\omega_5 \\ \omega_{15} & 0 & -\omega_{13} & \omega_{11} & -\omega_8 & \omega_4 \\ -\omega_{14} & \omega_{13} & 0 & -\omega_{10} & \omega_7 & -\omega_3 \\ \omega_{12} & -\omega_{11} & \omega_{10} & 0 & -\omega_6 & \omega_2 \\ -\omega_9 & \omega_8 & -\omega_7 & \omega_6 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_5 & -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1.10)$$

где $\omega_1, \dots, \omega_{15}$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathfrak{so}(6)$.

При этом, очевидно, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i \quad (5.1.11)$$

для любых $i, j = 1, \dots, 5$ (соответственно, $i, j = 1, \dots, 6$).

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathfrak{so}(n), \quad (5.1.12)$$

переводящее пару векторов

$$\mathbf{DN}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{DN} = \{0, x_{2N}, \dots, x_{nN}\}, \quad \mathbf{F} = \{F_1, \dots, F_n\}, \quad (5.1.13)$$

из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, где \mathbf{F} — внешняя сила, действующая на тело, в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$ ($n = 5, 6$). При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \dots & x_{nN} \\ F_1 & F_2 & \dots & F_n \end{pmatrix}. \quad (5.1.14)$$

Тогда правая часть системы (5.1.7) при $n = 5$ примет вид

$$\begin{aligned} M = \{ & x_{4N}F_5 - x_{5N}F_4, \quad x_{5N}F_3 - x_{3N}F_5, \quad x_{2N}F_5 - x_{5N}F_2, \quad x_{5N}F_1, \\ & x_{3N}F_4 - x_{4N}F_3, \quad x_{4N}F_2 - x_{2N}F_4, \quad -x_{4N}F_1, \quad x_{2N}F_3 - x_{3N}F_2, \quad x_{3N}F_1, \quad -x_{2N}F_1 \}, \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

а при $n = 6$ — вид

$$M = \left\{ x_{5N}F_6 - x_{6N}F_5, x_{6N}F_4 - x_{4N}F_6, x_{3N}F_6 - x_{6N}F_3, x_{6N}F_2 - x_{2N}F_6, \right. \\ \left. - x_{6N}F_1, x_{4N}F_5 - x_{5N}F_4, x_{5N}F_3 - x_{3N}F_5, x_{2N}F_5 - x_{5N}F_2, x_{5N}F_1, x_{3N}F_4 - x_{4N}F_3, \right. \\ \left. x_{4N}F_2 - x_{2N}F_4, -x_{4N}F_1, x_{2N}F_3 - x_{3N}F_2, x_{3N}F_1, -x_{2N}F_1 \right\}. \quad (5.1.16)$$

Исследуемые в дальнейшем динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним [59, 79, 101, 105, 129]. При этом нам потребуется исследовать часть основного уравнения динамики, а именно, в данном случае уравнение Ньютона. Здесь оно предстает перед нами как уравнение движения центра масс — та часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству \mathbb{R}^n ($n = 5, 6$):

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \quad (5.1.17)$$

где \mathbf{w}_C — ускорение центра масс C тела, m — его масса; при этом по многомерной формуле Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \quad \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega}, \quad (5.1.18)$$

где \mathbf{w}_D — ускорение точки D , \mathbf{F} — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Итак, система уравнений (5.1.7), (5.1.17) пятнадцатого порядка при $n = 5$ (или двадцать первого порядка при $n = 6$) на многообразии $\mathbb{R}^n \times \text{so}(n)$ определяет замкнутую систему динамических уравнений движения свободного пятимерного (шестимерного) твердого тела под действием внешней силы \mathbf{F} . Данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (5.1.6) и может быть исследована самостоятельно.

5.2. БОЛЕЕ ОБЩАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ СО СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

Рассмотрим движение однородного динамически симметричного (случаи (5.1.1) и (5.1.3)) твердого тела с передним торцом (четырёхмерным (пятимерным) диском, взаимодействующим со средой, заполняющей пятимерное (шестимерное) пространство) в поле силы \mathbf{S} сопротивления в условиях квазистационарности (см. [59, 79, 101, 105, 129]).

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ($(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$) — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр диска, лежащий на оси симметрии тела), Ω — тензор угловой скорости тела, $Dx_1x_2x_3x_4x_5$ ($Dx_1x_2x_3x_4x_5x_6$) — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси Dx_2, Dx_3, Dx_4, Dx_5 ($Dx_2, Dx_3, Dx_4, Dx_5, Dx_6$) лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, I_4 = I_2, I_5 = I_2, m$ ($I_1, I_2, I_3 = I_2, I_4 = I_2, I_5 = I_2, I_6 = I_2, m$) — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$ в \mathbb{E}^5 :

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, 0, 0, 0\},$$

$$\mathbf{v}_D = \left\{ v \cos \alpha, v \sin \alpha \cos \beta_1, v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \right. \\ \left. v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3, v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \right\}$$

(аналогичные равенства могут быть получены в \mathbb{E}^6).

При этом в случае (5.1.1) (как и в случае (5.1.3)) также будет справедливо разложение для функции воздействия среды на пятимерное (шестимерное) тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, 0, 0, 0\}, \quad (5.2.1)$$

т.е. в данном случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда та часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение центра масс и соответствуют пространству \mathbb{R}^5 , при котором касательные силы воздействия среды на четырехмерный диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \omega_{10} v \sin \alpha \cos \beta_1 + \\ + \omega_9 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \omega_7 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ + \omega_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = -\frac{S}{m}, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \\ + \omega_{10} v \cos \alpha - \omega_8 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \\ - \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 - \sigma(\omega_9 \omega_8 + \omega_6 \omega_7 + \omega_3 \omega_4) - \sigma \dot{\omega}_{10} = 0, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \\ - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_9 v \cos \alpha + \omega_8 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ + \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 - \sigma(\omega_8 \omega_{10} - \omega_5 \omega_7 - \omega_2 \omega_4) + \sigma \dot{\omega}_9 = 0, \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 - \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \omega_7 v \cos \alpha - \omega_6 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \\ + \omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \sigma(\omega_6 \omega_{10} + \omega_5 \omega_9 - \omega_1 \omega_4) - \sigma \dot{\omega}_7 = 0, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \\ + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \omega_4 v \cos \alpha + \omega_3 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\ - \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \sigma(\omega_3 \omega_{10} + \omega_2 \omega_9 + \omega_1 \omega_7) + \sigma \dot{\omega}_4 = 0, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

где

$$S = s(\alpha)v^2, \quad \sigma = CD, \quad v > 0. \quad (5.2.7)$$

Аналогичные равенства могут быть получены в \mathbb{E}^6 .

Далее, вспомогательная матрица (5.1.14) для вычисления момента силы сопротивления примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N} \\ -S & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (5.2.8)$$

тогда та часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $so(5)$, примет вид:

$$(\lambda_4 + \lambda_5)\dot{\omega}_1 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_4\omega_7 + \omega_3\omega_6 + \omega_2\omega_5) = 0, \quad (5.2.9)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_5)\dot{\omega}_2 + (\lambda_5 - \lambda_3)(\omega_1\omega_5 - \omega_3\omega_8 - \omega_4\omega_9) = 0, \quad (5.2.10)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_5)\dot{\omega}_3 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_4\omega_{10} - \omega_2\omega_8 - \omega_1\omega_6) = 0, \quad (5.2.11)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_5)\dot{\omega}_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) = -x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (5.2.12)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_4)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_7\omega_9 + \omega_6\omega_8 + \omega_1\omega_2) = 0, \quad (5.2.13)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_6 + (\lambda_4 - \lambda_2)(\omega_5\omega_8 - \omega_7\omega_{10} - \omega_1\omega_3) = 0, \quad (5.2.14)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_4)\dot{\omega}_7 + (\lambda_1 - \lambda_4)(\omega_1\omega_4 - \omega_6\omega_{10} - \omega_5\omega_9) = x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (5.2.15)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_3)\dot{\omega}_8 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_9\omega_{10} + \omega_5\omega_6 + \omega_2\omega_3) = 0, \quad (5.2.16)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_9 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) = -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (5.2.17)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_{10} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_8\omega_9 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) = x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2. \quad (5.2.18)$$

Аналогичные равенства могут быть получены в \mathbb{E}^6 .

Таким образом фазовым пространством системы (5.2.2)–(5.2.6), (5.2.9)–(5.2.18) пятнадцатого порядка является прямое произведение пятимерного многообразия на алгебру Ли $so(5)$:

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^4 \times so(5). \quad (5.2.19)$$

Сразу же заметим, что система (5.2.2)–(5.2.6), (5.2.9)–(5.2.18), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 = I_4 = I_5, \quad (5.2.20)$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0, \quad \omega_3 \equiv \omega_3^0, \quad \omega_5 \equiv \omega_5^0, \quad \omega_6 \equiv \omega_6^0, \quad \omega_8 \equiv \omega_8^0. \quad (5.2.21)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0. \quad (5.2.22)$$

В случае шестимерного тела также можно отметить, заметим, что соответствующая система, в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6, \quad (5.2.23)$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\begin{aligned} \omega_1 \equiv \omega_1^0, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0, \quad \omega_3 \equiv \omega_3^0, \quad \omega_4 \equiv \omega_4^0, \quad \omega_6 \equiv \omega_6^0, \\ \omega_7 \equiv \omega_7^0, \quad \omega_8 \equiv \omega_8^0, \quad \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0, \quad \omega_{11} \equiv \omega_{11}^0, \quad \omega_{13} \equiv \omega_{13}^0. \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

При этом также рассматривается динамика на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_4^0 = \omega_6^0 = \omega_7^0 = \omega_8^0 = \omega_{10}^0 = \omega_{11}^0 = \omega_{13}^0. \quad (5.2.25)$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во все время движения выполненные равенства

$$v \equiv \text{const}, \quad (5.2.26)$$

то в системе (5.2.2)–(5.2.6), (5.2.9)–(5.2.18) для пятимерного тела (и в соответствующих системах для шестимерного) вместо F_1 будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2, \quad \sigma = DC. \quad (5.2.27)$$

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (5.2.26). Действительно, формально выражая величину T в силу системы (5.2.2)–(5.2.6), (5.2.9)–(5.2.18) получим при $\cos \alpha \neq 0$:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega) = m\sigma(\omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2) + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma \sin \alpha}{3I_2 \cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \quad (5.2.28)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \\ &+ x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ &+ x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \cos \beta_2 + x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

При получении равенства (5.2.28) используются условия (5.2.21)–(5.2.26).

Для шестимерного тела равенство (5.2.28) примет вид

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \Omega) = m\sigma(\omega_5^2 + \omega_9^2 + \omega_{12}^2 + \omega_{14}^2 + \omega_{15}^2) + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma \sin \alpha}{4I_2 \cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) \right]. \quad (5.2.30)$$

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (5.2.26). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (5.2.2)–(5.2.6), (5.2.9)–(5.2.18) в результате действий порождает независимую систему восьмого порядка следующего вида:

$$\dot{\alpha}v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \omega_{10}v \cos \alpha - \sigma\dot{\omega}_{10} = 0, \quad (5.2.31)$$

$$\dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_9 v \cos \alpha + \sigma\dot{\omega}_9 = 0, \quad (5.2.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 - \\ - \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \omega_7 v \cos \alpha - \sigma\dot{\omega}_7 = 0, \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 + \\ + \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \omega_4 v \cos \alpha + \sigma\dot{\omega}_4 = 0, \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

$$3I_2\dot{\omega}_4 = -x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (5.2.35)$$

$$3I_2\dot{\omega}_7 = x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (5.2.36)$$

$$3I_2\dot{\omega}_9 = -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (5.2.37)$$

$$3I_2\dot{\omega}_{10} = x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (5.2.38)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v .

Система (5.2.31)–(5.2.38) эквивалентна следующей системе:

$$\dot{\alpha}v \cos \alpha + v \cos \alpha \{ \omega_{10} \cos \beta_1 + [(\omega_7 \cos \beta_3 - \omega_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2 - \omega_9 \cos \beta_2] \sin \beta_1 \} + \\ + \sigma \{ -\dot{\omega}_{10} \cos \beta_1 + [\dot{\omega}_9 \cos \beta_2 - (\dot{\omega}_7 \cos \beta_3 - \dot{\omega}_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2] \sin \beta_1 \} = 0, \quad (5.2.39)$$

$$\dot{\beta}_1 v \sin \alpha + v \cos \alpha \{ [(\omega_7 \cos \beta_3 - \omega_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2 - \omega_9 \cos \beta_2] \cos \beta_1 - \omega_{10} \sin \beta_1 \} + \\ + \sigma \{ [\dot{\omega}_9 \cos \beta_2 - (\dot{\omega}_7 \cos \beta_3 - \dot{\omega}_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2] \cos \beta_1 + \dot{\omega}_{10} \sin \beta_1 \} = 0, \quad (5.2.40)$$

$$\dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 + v \cos \alpha \{ [\omega_7 \cos \beta_3 - \omega_4 \sin \beta_3] \cos \beta_2 + \omega_9 \sin \beta_2 \} + \\ + \sigma \{ -[\dot{\omega}_7 \cos \beta_3 - \dot{\omega}_4 \sin \beta_3] \cos \beta_2 - \dot{\omega}_9 \sin \beta_2 \} = 0, \quad (5.2.41)$$

$$\dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + v \cos \alpha \{ -\omega_4 \cos \beta_3 - \omega_7 \sin \beta_3 \} + \sigma \{ \dot{\omega}_4 \cos \beta_3 + \dot{\omega}_7 \sin \beta_3 \} = 0, \quad (5.2.42)$$

$$\dot{\omega}_4 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (5.2.43)$$

$$\dot{\omega}_7 = \frac{v^2}{3I_2} x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (5.2.44)$$

$$\dot{\omega}_9 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (5.2.45)$$

$$\dot{\omega}_{10} = \frac{v^2}{3I_2} x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \quad (5.2.46)$$

Аналогичные системы могут быть получены и для шестимерного тела.

Введем новые квазискорости в системе. Для этого преобразуем величины $\omega_4, \omega_7, \omega_9, \omega_{10}$ посредством композиции трех поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = T_{3,4}(-\beta_1) \circ T_{2,3}(-\beta_2) \circ T_{1,2}(-\beta_3) \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix}, \quad (5.2.47)$$

где

$$T_{3,4}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad T_{2,3}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ T_{1,2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_4 \cos \beta_3 + \omega_7 \sin \beta_3, \\ z_2 &= (\omega_7 \cos \beta_3 - \omega_4 \sin \beta_3) \cos \beta_2 + \omega_9 \sin \beta_2, \\ z_3 &= [(-\omega_7 \cos \beta_3 + \omega_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2 + \omega_9 \cos \beta_2] \cos \beta_1 + \omega_{10} \sin \beta_1, \\ z_4 &= [(\omega_7 \cos \beta_3 - \omega_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2 - \omega_9 \cos \beta_2] \sin \beta_1 + \omega_{10} \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (5.2.48)$$

Для случая шестимерного тела новые квазискорости в системе вводятся следующим образом. Преобразуем величины $\omega_5, \omega_9, \omega_{12}, \omega_{14}, \omega_{15}$ посредством композиции четырех поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = T_{4,5}(-\beta_1) \circ T_{3,4}(-\beta_2) \circ T_{2,3}(-\beta_3) \circ T_{1,2}(-\beta_4) \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_9 \\ \omega_{12} \\ \omega_{14} \\ \omega_{15} \end{pmatrix}. \quad (5.2.49)$$

Как видно из (5.2.39)–(5.2.46), на многообразии

$$O_1 = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \omega_4, \omega_7, \omega_9, \omega_{10}) \in \mathbb{R}^8 : \alpha = \frac{\pi}{2}k, \beta_1 = \pi l_1, \beta_2 = \pi l_2, k, l_1, l_2 \in \mathbb{Z} \right\} \quad (5.2.50)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3$. Формально, таким образом, на многообразии (5.2.50) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при четном k и любых l_1, l_2 неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, а при нечетном k происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (5.2.39) вырождается.

Из этого следует, что система (5.2.39)–(5.2.46) вне и только вне многообразия (5.2.50) эквивалентна следующей системе:

$$\dot{\alpha} = -z_4 + \frac{\sigma v}{3I_2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (5.2.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = & \frac{v^2}{3I_2} s(\alpha) \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ & + \frac{\sigma v}{3I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left\{ -z_3 \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) + \right. \\ & \left. + z_2 \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) - z_1 \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \right\}, \quad (5.2.52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & z_3 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ & + \frac{\sigma v}{3I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left\{ z_4 \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) - z_2 \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \right. \\ & \left. + z_1 \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right\} - \\ & - \frac{v^2}{3I_2} s(\alpha) \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (5.2.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & z_2 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ & + \frac{\sigma v}{3I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \left\{ -z_4 + z_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right\} + \\ & + \frac{\sigma v}{3I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \left\{ -z_1 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \right\} + \\ & + \frac{v^2}{3I_2} s(\alpha) \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (5.2.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & z_1 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ & + \frac{\sigma v}{3I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \left\{ z_4 - z_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + z_2 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \right\} - \\ & - \frac{v^2}{3I_2} s(\alpha) \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right), \end{aligned} \quad (5.2.55)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma v}{3I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (5.2.56)$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma v}{3I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (5.2.57)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} + \frac{\sigma v}{3I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (5.2.58)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = & -x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + \\ & + x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \cos \beta_2 + x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ & + x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = & -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_2 + \\ & + x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_2 \cos \beta_3 + x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_2 \sin \beta_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = & -x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_3 + \\ & + x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_3, \end{aligned}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$ представляется в виде (5.2.29).

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1/v, z_2/v, z_3/v, z_4/v)$ в силу (5.2.48).

Аналогичная система может быть получена и для шестимерного твердого тела.

Нарушение теоремы единственности для системы (5.2.39)–(5.2.46) на многообразии (5.2.50) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (5.2.50) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (5.2.39)–(5.2.46), пересекая многообразие (5.2.50) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (5.2.26) необходимо выбрать значение T при $\cos \alpha \neq 0$ в виде (5.2.28).

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = L \left(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right). \quad (5.2.59)$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right) \right| < +\infty. \quad (5.2.60)$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega \right) = m\sigma(\omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2) - \frac{m\sigma Lv^2}{2I_2}, \quad (5.2.61)$$

где значения $\omega_4, \omega_7, \omega_9, \omega_{10}$ произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W , необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega \right) = \frac{mv^2}{R_0}, \quad (5.2.62)$$

где R_0 — расстояние CW .

Равенства (5.2.61) и (5.2.62) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (5.2.50), что и доказывает сделанное замечание.

5.3. СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

5.3.1. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [121, 122]), динамические функции $s, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}$ и x_{5N} возьмём в следующем виде:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \\ x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{2N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A \sin \alpha \cos \beta_1, \\ x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{3N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \\ x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{4N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3, \\ x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{5N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

где $A, B > 0$ и $v \neq 0$, убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v), \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v), s = 1, 2, 3$, входящие в систему (5.2.51)–(5.2.58), примут следующий вид:

$$\Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = A \sin \alpha, \quad \Delta_{v,s} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \equiv 0, \quad s = 1, 2, 3. \quad (5.3.2)$$

В шестимерном случае динамические функции $x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N}$ и x_{6N} будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{2N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = A \sin \alpha \cos \beta_1, \\ x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{3N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \\ x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{4N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3, \\ x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{5N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4, \\ x_{6N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{6N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Тогда, благодаря неинтегрируемой связи (5.2.26), вне и только вне многообразия (5.2.50) динамическая часть уравнений движения (система (5.2.51)–(5.2.58)) примет вид аналитической системы

$$\alpha' = -z_4 + \frac{\sigma ABv}{3I_2} \sin \alpha, \quad (5.3.4)$$

$$z_4' = \frac{ABv^2}{3I_2} \sin \alpha \cos \alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.3.5)$$

$$z_3' = z_3 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.3.6)$$

$$z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \quad (5.3.7)$$

$$z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \quad (5.3.8)$$

$$\beta_1' = z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.3.9)$$

$$\beta_2' = -z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.3.10)$$

$$\beta_3' = z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}. \quad (5.3.11)$$

Вводя далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$z_k \mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad n_0^2 = \frac{AB}{3I_2}, \quad b = \sigma n_0, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \quad (5.3.12)$$

приведем систему (5.3.4)–(5.3.11) к виду

$$\alpha' = -z_4 + b \sin \alpha, \quad (5.3.13)$$

$$z_4' = \sin \alpha \cos \alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.3.14)$$

$$z_3' = z_3 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.3.15)$$

$$z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \quad (5.3.16)$$

$$z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \quad (5.3.17)$$

$$\beta_1' = z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.3.18)$$

$$\beta_2' = -z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.3.19)$$

$$\beta_3' = z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}. \quad (5.3.20)$$

Видно, что в системе восьмого порядка (5.3.13)–(5.3.20), которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении TS^4 к четырехмерной сфере S^4 , образовалась независимая система седьмого порядка (5.3.13)–(5.3.19) на своем семимерном многообразии.

ddd

В случае шестимерного тела соответствующая система динамических уравнений примет следующий вид:

$$\alpha' = -z_5 + b \sin \alpha, \quad (5.3.21)$$

$$z_5' = \sin \alpha \cos \alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.3.22)$$

$$z_4' = z_4 z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.3.23)$$

$$z_3' = z_3 z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_3 z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \quad (5.3.24)$$

$$z'_2 = z_2 z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_2 z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3}, \quad (5.3.25)$$

$$z'_1 = z_1 z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_1 z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3}, \quad (5.3.26)$$

$$\beta'_1 = z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.3.27)$$

$$\beta'_2 = -z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.3.28)$$

$$\beta'_3 = z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (5.3.29)$$

$$\beta'_4 = -z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}. \quad (5.3.30)$$

Для полного интегрирования системы (5.3.13)–(5.3.20) необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$\begin{pmatrix} z_4 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad (5.3.31)$$

система (5.3.13)–(5.3.20) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b \sin \alpha, \quad (5.3.32)$$

$$w'_4 = \sin \alpha \cos \alpha - w_3^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.3.33)$$

$$w'_3 = w_3 w_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.3.34)$$

$$w'_2 = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \quad (5.3.35)$$

$$\beta'_2 = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

$$w'_1 = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \quad (5.3.36)$$

$$\beta'_1 = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

$$\beta'_3 = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad (5.3.37)$$

где

$$d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = Z_3(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = -Z_2(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.3.38)$$

$$d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = Z_1(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2},$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.3.39)$$

— функции в силу замены (5.3.31).

Видно, что система восьмого порядка распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (5.3.32)–(5.3.34) — третьего, а системы (5.3.35), (5.3.36) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (5.3.32)–(5.3.37) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (5.3.32)–(5.3.34), по одному — систем (5.3.35), (5.3.36), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (5.3.37).

При этом заметим, что систему (5.3.32)–(5.3.34) можно рассматривать на касательном расслоении TS^2 двумерной сферы S^2 .

В случае шестимерного твердого тела соответствующая замена переменных имеет вид

$$\begin{pmatrix} z_5 \\ z_4 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_5 \\ w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad w_5 = z_5, \quad w_4 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}, \quad w_3 = \frac{z_2}{z_1}, \quad (5.3.40)$$

$$w_2 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad w_1 = \frac{z_4}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}},$$

при этом система (5.3.21)–(5.3.30) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_5 + b \sin \alpha, \quad (5.3.41)$$

$$w_5' = \sin \alpha \cos \alpha - w_4^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.3.42)$$

$$w_4' = w_4 w_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.3.43)$$

$$w_3' = d_3(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \frac{1 + w_3^2 \cos \beta_3}{w_3 \sin \beta_3}, \quad (5.3.44)$$

$$\beta_3' = d_3(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4),$$

$$w_2' = d_2(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \frac{1 + w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \quad (5.3.45)$$

$$\beta_2' = d_2(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4),$$

$$w_1' = d_1(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \quad (5.3.46)$$

$$\beta_1' = d_1(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4),$$

$$\beta_4' = d_4(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4), \quad (5.3.47)$$

где

$$d_1(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = Z_4(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$d_2(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = -Z_3(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1},$$

$$d_3(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = Z_2(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2},$$

$$d_4(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = -Z_1(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3},$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_5, w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (5.3.49)$$

— функции в силу замены (5.3.40).

5.3.2. Полный список инвариантных соотношений. Данный раздел написан для пятимерного твердого тела. Аналогичные выкладки справедливы и для шестимерного тела.

Система (5.3.32)–(5.3.34) имеет вид системы уравнений, возникающей в динамике трехмерного ($3D$ –) твердого тела в неконсервативном поле сил.

Для начала сопоставим системе третьего порядка (5.3.32)–(5.3.34) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha - w_3^2 \cos \alpha / \sin \alpha}{-w_4 + b \sin \alpha}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{w_3 w_4 \cos \alpha / \sin \alpha}{-w_4 + b \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (5.3.50)$$

Используя замену $\tau = \sin \alpha$, перепишем систему (5.3.50) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{\tau - w_3^2/\tau}{-w_4 + b\tau}, \\ \frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{w_3w_4/\tau}{-w_4 + b\tau}.\end{aligned}\tag{5.3.51}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1\tau, \quad w_4 = u_2\tau,\tag{5.3.52}$$

приводим систему (5.3.51) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - u_1^2}{-u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1u_2}{-u_2 + b},\end{aligned}\tag{5.3.53}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b}.\end{aligned}\tag{5.3.54}$$

Сопоставим системе второго порядка (5.3.54) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{2u_1u_2 - bu_1},\tag{5.3.55}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0.\tag{5.3.56}$$

Итак, уравнение (5.3.55) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const},\tag{5.3.57}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_3 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}.\tag{5.3.58}$$

Замечание 1. Рассмотрим систему (5.3.32)–(5.3.34) с переменной диссипацией с нулевым средним [59, 79, 101, 105, 129], становящейся консервативной при $b = 0$:

$$\begin{aligned}\alpha' &= -w_4, \\ w_4' &= \sin \alpha \cos \alpha - w_3^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ w_3' &= w_3w_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}\tag{5.3.59}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_4^2 + w_3^2 + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const},\tag{5.3.60}$$

$$w_3 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}.\tag{5.3.61}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (5.3.60), (5.3.61) также является первым интегралом системы (5.3.59). Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 - bw_4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha\tag{5.3.62}$$

и (5.3.61) по отдельности не является первым интегралом системы (5.3.32)–(5.3.34). Однако отношение функций (5.3.62), (5.3.61) является первым интегралом системы (5.3.32)–(5.3.34) при любом b .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (5.3.32)–(5.3.34). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (5.3.57) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \quad (5.3.63)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (5.3.64)$$

и фазовое пространство системы (5.3.32)–(5.3.34) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (5.3.63).

Таким образом, в силу соотношения (5.3.57) первое уравнение системы (5.3.54) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \quad (5.3.65)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\}, \quad (5.3.66)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (5.3.64).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (5.3.32)–(5.3.34) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(b - u_2) du_2}{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1 \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\} / 2}. \quad (5.3.67)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \alpha|. \quad (5.3.68)$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \quad (5.3.69)$$

то правая часть равенства (5.3.67) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = \\ = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b}{2} I_1, \end{aligned} \quad (5.3.70)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \quad (5.3.71)$$

При вычислении интеграла (5.3.71) возможны три случая.

I. $b > 2$.

$$\begin{aligned} I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2 - 4}} \right| + \text{const.} \end{aligned} \quad (5.3.72)$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (5.3.73)$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (5.3.74)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_4}{\sin \alpha} - \frac{b}{2}, \quad (5.3.75)$$

имеем окончательный вид для величины I_1 :

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \text{const.} \quad (5.3.76)$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2-4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (5.3.77)$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (5.3.78)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (5.3.32)–(5.3.34) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (5.3.57).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln |\sin \alpha| + G_2 \left(\sin \alpha, \frac{w_4}{\sin \alpha}, \frac{w_3}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (5.3.79)$$

Таким образом, для интегрирования системы восьмого порядка (5.3.32)–(5.3.37) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости, как указано выше, достаточно найти один первый интеграл, для (потенциально отделившихся) систем (5.3.35), (5.3.36), а также дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (5.3.37).

Для поиска первого интеграла (потенциально отделившихся) систем (5.3.35), (5.3.36) сопоставим им следующие неавтономные уравнения первого порядка:

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2 \cos \beta_s}{w_s \sin \beta_s}, \quad s = 1, 2. \quad (5.3.80)$$

Последние равенства после несложного интегрирования приводят к искомым инвариантным соотношениям

$$\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin \beta_s} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2. \quad (5.3.81)$$

Далее, для поиска дополнительного первого интеграла, "привязывающего" уравнение (5.3.37), сопоставим уравнениям (5.3.37) и (5.3.35) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{dw_2}{d\beta_3} = -(1+w_2^2) \cos \beta_2. \quad (5.3.82)$$

Поскольку, в силу (5.3.81),

$$C_4 \cos \beta_2 = \pm \sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}, \quad (5.3.83)$$

то

$$\frac{dw_2}{d\beta_3} = \mp \frac{1}{C_4} (1+w_2^2) \sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}. \quad (5.3.84)$$

Тогда, интегрируя последнее равенство, приходим к следующей квадратуре:

$$\mp (\beta_3 + C_5) = \int \frac{C_4 dw_2}{(1+w_2^2) \sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}}, \quad C_5 = \text{const.} \quad (5.3.85)$$

Дальнейшее интегрирование приводит к равенству

$$\mp \text{tg}(\beta_3 + C_5) = \frac{C_4 w_2}{\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}}, \quad C_5 = \text{const.} \quad (5.3.86)$$

Окончательно имеем вид дополнительного первого интеграла, "привязывающего" уравнение (5.3.37):

$$\operatorname{arctg} \frac{C_4 w_2}{\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}} \pm \beta_3 = C_5, \quad C_5 = \text{const.} \quad (5.3.87)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (5.2.2)–(5.2.6), (5.2.9)–(5.2.18) при условии (5.3.1) имеет двенадцать инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (5.2.26), циклические первые интегралы вида (5.2.21), (5.2.22), первый интеграл вида (5.3.58), также имеется первый интеграл, выражающийся соотношениями (5.3.72)–(5.3.79), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (5.3.81) и (5.3.87).

Теорема 1. Система (5.2.2)–(5.2.6), (5.2.9)–(5.2.18) при условиях (5.2.26), (5.3.1), (5.2.22) обладает двенадцатью инвариантными соотношениями (полным набором), пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Аналогичные утверждения и теоремы справедливы и для шестимерного тела.

5.3.3. Топологические аналогии. Рассмотрим следующую систему уравнений седьмого порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + b_* \dot{\xi} \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - [\eta_1^2 + \eta_2^2 \sin^2 \eta_1 + \eta_3^2 \sin^2 \eta_1 \sin^2 \eta_2] \frac{\sin \xi}{\cos \xi} &= 0, \\ \ddot{\eta}_1 + b_* \dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} - (\eta_2^2 + \eta_3^2 \sin^2 \eta_2) \sin \eta_1 \cos \eta_1 &= 0, \\ \ddot{\eta}_2 + b_* \dot{\eta}_2 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_2 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} - \eta_3^2 \sin \eta_2 \cos \eta_2 &= 0, \\ \ddot{\eta}_3 + b_* \dot{\eta}_3 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_3 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_3 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} + 2\dot{\eta}_2 \dot{\eta}_3 \frac{\cos \eta_2}{\sin \eta_2} &= 0, \quad b_* > 0, \end{aligned} \quad (5.3.88)$$

описывающую закрепленный пятимерный маятник, помещенный в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 8, но фазовая переменная η_3 является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Ее фазовым пространством является касательное расслоение

$$T\mathbb{S}^3\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dot{\eta}_3, \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\} \quad (5.3.89)$$

к четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$, при этом уравнение, переводящее систему (5.3.88) в систему на касательном расслоении к трехмерной сфере

$$\dot{\eta}_3 \equiv 0, \quad (5.3.90)$$

и уравнения больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0, \quad \dot{\eta}_2 \equiv 0, \quad \dot{\eta}_3 \equiv 0 \quad (5.3.91)$$

задают семейства интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (5.3.88) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (5.3.89) к четырехмерной сфере. Более того, справедлива

Теорема 2. Система (5.2.2)–(5.2.6), (5.2.9)–(5.2.18) при условиях (5.2.26), (5.3.1), (5.2.22) эквивалентна динамической системе (5.3.88).

Действительно, достаточно положить $\alpha = \xi$, $\beta_1 = \eta_1$, $\beta_2 = \eta_2$, $\beta_3 = \eta_3$, $b = -b_*$.

Аналогичным образом может быть рассмотрена следующая система уравнений девятого порядка:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\xi} + b_* \dot{\xi} \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - \\
& - [\eta_1^2 + \eta_2^2 \sin^2 \eta_1 + \eta_3^2 \sin^2 \eta_1 \sin^2 \eta_2 + \eta_4^2 \sin^2 \eta_1 \sin^2 \eta_2 \sin^2 \eta_3] \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = 0, \\
& \ddot{\eta}_1 + b_* \dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} - \\
& - (\eta_2^2 + \eta_3^2 \sin^2 \eta_2 + \eta_4^2 \sin^2 \eta_2 \sin^2 \eta_3) \sin \eta_1 \cos \eta_1 = 0, \\
& \ddot{\eta}_2 + b_* \dot{\eta}_2 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_2 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} - \\
& - [\eta_3^2 + \eta_4^2 \sin^2 \eta_3] \sin \eta_2 \cos \eta_2 = 0, \\
& \ddot{\eta}_3 + b_* \dot{\eta}_3 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_3 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_3 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} + 2\dot{\eta}_2 \dot{\eta}_3 \frac{\cos \eta_2}{\sin \eta_2} - \eta_4^2 \sin \eta_3 \cos \eta_3 = 0, \\
& \ddot{\eta}_4 + b_* \dot{\eta}_4 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_4 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_4 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} + 2\dot{\eta}_2 \dot{\eta}_4 \frac{\cos \eta_2}{\sin \eta_2} + 2\dot{\eta}_3 \dot{\eta}_4 \frac{\cos \eta_3}{\sin \eta_3} = 0, \quad b_* > 0,
\end{aligned} \tag{5.3.92}$$

описывающую закрепленный шестимерный маятник, помещенный в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 10, но фазовая переменная η_4 является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Утверждения и теоремы, справедливые для пятимерного тела, справедливы также и для шестимерного тела, которому и соответствует система (5.3.92).

О более общих топологических аналогиях см. также [32, 39, 43, 45, 60, 69].

5.4. СЛУЧАЙ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

5.4.1. Введение зависимости от угловой скорости. Данный раздел посвящен динамике пятимерного (шестимерного) твердого тела в пятимерном (шестимерном) пространстве. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же, данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на четырехмерный диск, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно.

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{5.4.1}$$

где $R = (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}. \tag{5.4.2}$$

Здесь $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$ — некоторые положительные параметры.

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv 0$, то

$$x_{2N} = Q_2 - h_1 \frac{\omega_{10}}{v}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1 \frac{\omega_9}{v}, \quad x_{4N} = Q_4 - h_1 \frac{\omega_7}{v}, \quad x_{5N} = Q_5 + h_1 \frac{\omega_4}{v}. \quad (5.4.3)$$

Аналогичным образом с помощью формулы (5.4.1) вводится соответствующая зависимости момента силы от тензора угловой скорости шестимерного твердого тела.

5.4.2. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [121, 122]

$$\begin{aligned} Q_2 &= A \sin \alpha \cos \beta_1, \quad Q_3 = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \\ Q_4 &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3, \\ Q_5 &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3, \quad A > 0, \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

динамические функции s , x_{2N} , x_{3N} , x_{4N} и x_{5N} примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad B > 0, \\ x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\omega_{10}}{v}, \\ x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + h \frac{\omega_9}{v}, \\ x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - h \frac{\omega_7}{v}, \\ x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + h \frac{\omega_4}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости). Причем $h_2 = h_3 = h_4 = h_5$ в силу динамической симметрии тела.

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $s = 1, 2, 3$, входящие в систему (5.2.51)–(5.2.58), примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha - \frac{h}{v} z_4, \\ \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= \frac{h}{v} z_3, \\ \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= -\frac{h}{v} z_2, \quad \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = \frac{h}{v} z_1. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Аналогичные равенства могут быть получены и для шестимерного тела.

Тогда, благодаря неинтегрируемой связи (5.2.26), вне и только вне многообразия (5.2.50) динамическая часть уравнений движения (система (5.2.51)–(5.2.58)) примет вид аналитической системы

$$\dot{\alpha} = - \left(1 + \frac{\sigma B h}{3I_2} \right) z_4 + \frac{\sigma A B v}{3I_2} \sin \alpha, \quad (5.4.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 &= \frac{A B v^2}{3I_2} \sin \alpha \cos \alpha - \\ &- \left(1 + \frac{\sigma B h}{3I_2} \right) (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{B h v}{3I_2} z_4 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= \left(1 + \frac{\sigma B h}{3I_2} \right) z_3 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ \left(1 + \frac{\sigma B h}{3I_2} \right) (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \frac{B h v}{3I_2} z_3 \cos \alpha, \\ \dot{z}_2 &= \left(1 + \frac{\sigma B h}{3I_2} \right) z_2 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \left(1 + \frac{\sigma B h}{3I_2} \right) z_2 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

$$-\left(1 + \frac{\sigma Bh}{3I_2}\right) z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - \frac{Bhv}{3I_2} z_2 \cos \alpha, \quad (5.4.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & \left(1 + \frac{\sigma Bh}{3I_2}\right) z_1 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \left(1 + \frac{\sigma Bh}{3I_2}\right) z_1 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ & + \left(1 + \frac{\sigma Bh}{3I_2}\right) z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - \frac{Bhv}{3I_2} z_1 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

$$\dot{\beta}_1 = \left(1 + \frac{\sigma Bh}{3I_2}\right) z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.4.12)$$

$$\dot{\beta}_2 = -\left(1 + \frac{\sigma Bh}{3I_2}\right) z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.4.13)$$

$$\dot{\beta}_3 = \left(1 + \frac{\sigma Bh}{3I_2}\right) z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}. \quad (5.4.14)$$

Вводя далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$z_k \mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad n_0^2 = \frac{AB}{3I_2}, \quad b = \sigma n_0, \quad H_1 = \frac{Bh}{3I_2 n_0}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \quad (5.4.15)$$

приведем систему (5.4.7)–(5.4.14) к виду

$$\alpha' = -(1 + bH_1) z_4 + b \sin \alpha, \quad (5.4.16)$$

$$\begin{aligned} z_4' = & \sin \alpha \cos \alpha - \\ & - (1 + bH_1) (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 z_4 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

$$\begin{aligned} z_3' = & (1 + bH_1) z_3 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ & + (1 + bH_1) (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - H_1 z_3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

$$\begin{aligned} z_2' = & (1 + bH_1) z_2 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1) z_2 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \\ & - (1 + bH_1) z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - H_1 z_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

$$\begin{aligned} z_1' = & (1 + bH_1) z_1 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1) z_1 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ & + (1 + bH_1) z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - H_1 z_1 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1) z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.4.21)$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1) z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.4.22)$$

$$\beta_3' = (1 + bH_1) z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}. \quad (5.4.23)$$

Видно, что в системе восьмого порядка (5.4.16)–(5.4.23) которую, как будет показано далее, можно рассматривать на касательном расслоении TS^4 к четырехмерной сфере S^4 , образовалась независимая система седьмого порядка (5.4.16)–(5.4.22) на своем семимерном многообразии.

Аналогичная система динамических уравнений может быть получена и для шестимерного тела:

$$\alpha' = -(1 + bH_1) z_5 + b \sin \alpha, \quad (5.4.24)$$

$$z_5' = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 z_5 \cos \alpha, \quad (5.4.25)$$

$$z_4' = (1 + bH_1) z_4 z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1) (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - H_1 z_4 \cos \alpha, \quad (5.4.26)$$

$$z_3' = (1 + bH_1) z_3 z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1) z_3 z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} -$$

$$-(1 + bH_1)(z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - H_1 z_3 \cos \alpha, \quad (5.4.27)$$

$$\begin{aligned} z_2' &= (1 + bH_1) z_2 z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1) z_2 z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &\quad + (1 + bH_1) z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ &\quad + (1 + bH_1) z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} - H_1 z_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.4.28)$$

$$\begin{aligned} z_1' &= (1 + bH_1) z_1 z_5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1) z_1 z_4 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &\quad + (1 + bH_1) z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - \\ &\quad - (1 + bH_1) z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sin \beta_2} \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_3} - H_1 z_1 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.4.29)$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1) z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.4.30)$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1) z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (5.4.31)$$

$$\beta_3' = (1 + bH_1) z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (5.4.32)$$

$$\beta_4' = -(1 + bH_1) z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}. \quad (5.4.33)$$

Для полного интегрирования системы (5.4.16)–(5.4.23) необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$\begin{pmatrix} z_4 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad (5.4.34)$$

система (5.4.16)–(5.4.23) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_4 + b \sin \alpha, \quad (5.4.35)$$

$$w_4' = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_3^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_4 \cos \alpha, \quad (5.4.36)$$

$$w_3' = (1 + bH_1)w_3 w_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_3 \cos \alpha, \quad (5.4.37)$$

$$w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_2^2 \cos \beta_2}{w_2 \sin \beta_2}, \quad (5.4.38)$$

$$\beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

$$w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_1^2 \cos \beta_1}{w_1 \sin \beta_1}, \quad (5.4.39)$$

$$\beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad (5.4.40)$$

где

$$\begin{aligned} d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= (1 + bH_1) Z_3(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= -(1 + bH_1) Z_2(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \end{aligned} \quad (5.4.41)$$

$$d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1 + bH_1) Z_1(w_4, w_3, w_2, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2},$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.4.42)$$

— функции в силу замены (5.4.34).

Видно, что система восьмого порядка распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (5.4.35)–(5.4.37) — третьего, а системы (5.4.38), (5.4.39) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (5.4.35)–(5.4.40) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (5.4.35)–(5.4.37), по одному — систем (5.4.38), (5.4.39), и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (5.4.40).

При этом заметим, что систему (5.4.35)–(5.4.37) можно рассматривать на касательном расслоении TS^2 двумерной сферы S^2 .

Аналогичные утверждения справедливы и для шестимерного твердого тела.

5.4.3. Полный список инвариантных соотношений. Система (5.4.35)–(5.4.37) имеет вид системы уравнений, возникающей в динамике трехмерного ($3D$ –) твердого тела в неконсервативном поле сил.

Для начала сопоставим системе третьего порядка (5.4.35)–(5.4.37) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_3^2 \cos \alpha / \sin \alpha - H_1 w_4 \cos \alpha}{-(1 + bH_1)w_4 + b \sin \alpha}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{(1 + bH_1)w_3 w_4 \cos \alpha / \sin \alpha - H_1 w_3 \cos \alpha}{-(1 + bH_1)w_4 + b \sin \alpha}.\end{aligned}\quad (5.4.43)$$

Используя замену $\tau = \sin \alpha$, перепишем систему (5.4.43) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}\frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{\tau - (1 + bH_1)w_3^2/\tau - H_1 w_4}{-(1 + bH_1)w_4 + b\tau}, \\ \frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{(1 + bH_1)w_3 w_4/\tau - H_1 w_3}{-(1 + bH_1)w_4 + b\tau}.\end{aligned}\quad (5.4.44)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1 \tau, \quad w_4 = u_2 \tau, \quad (5.4.45)$$

приводим систему (5.4.44) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1 u_2}{-(1 + bH_1)u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{(1 + bH_1)u_1 u_2 - H_1 u_1}{-(1 + bH_1)u_2 + b},\end{aligned}\quad (5.4.46)$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{(1 + bH_1)(u_2^2 - u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{-(1 + bH_1)u_2 + b}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}{-(1 + bH_1)u_2 + b}.\end{aligned}\quad (5.4.47)$$

Сопоставим системе второго порядка (5.4.47) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1 + bH_1)(u_1^2 - u_2^2) - (b + H_1)u_2}{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}, \quad (5.4.48)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d \left(\frac{(1 + bH_1)(u_2^2 + u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} \right) = 0. \quad (5.4.49)$$

Итак, уравнение (5.4.48) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1 + bH_1)(u_2^2 + u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (5.4.50)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\frac{(1 + bH_1)(w_4^2 + w_3^2) - (b + H_1)w_4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_3 \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (5.4.51)$$

Замечание 3. Рассмотрим систему (5.4.35)–(5.4.37) с переменной диссипацией с нулевым средним, становящейся консервативной при $b = H_1$:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -(1 + b^2)w_4 + b \sin \alpha, \\ w_4' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + b^2)w_3^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - bw_4 \cos \alpha, \\ w_3' &= (1 + b^2)w_3w_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - bw_3 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (5.4.52)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b^2)(w_4^2 + w_3^2) - 2bw_4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (5.4.53)$$

$$w_3 \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (5.4.54)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (5.4.53), (5.4.54) также является первым интегралом системы (5.4.52). Но при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1 + bH_1)(w_4^2 + w_3^2) - (b + H_1)w_4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad (5.4.55)$$

и (5.4.54) по отдельности не является первым интегралом системы (5.4.35)–(5.4.37). Однако отношение функций (5.4.55), (5.4.54) является первым интегралом системы (5.4.35)–(5.4.37) при любых b, H_1 .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (5.4.35)–(5.4.37). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (5.4.50) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 = \frac{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + bH_1)^2}. \quad (5.4.56)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (5.4.57)$$

и фазовое пространство системы (5.4.35)–(5.4.37) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (5.4.56).

Таким образом, в силу соотношения (5.4.50) первое уравнение системы (5.4.47) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + bH_1)u_2^2 - 2(b + H_1)u_2 + 2 - C_1U_1(C_1, u_2)}{b - (1 + bH_1)u_2}, \quad (5.4.58)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2(1 + bH_1)} \{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}, \quad (5.4.59)$$

$$U_2(C_1, u_2) = \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1)(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2)},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (5.4.57).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (5.4.35)–(5.4.37) примет вид

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\tau}{\tau} = \\ & = \int \frac{(b - (1 + bH_1)u_2)du_2}{2(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1, u_2)\}/(2(1 + bH_1))}. \end{aligned} \quad (5.4.60)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln |\sin \alpha|. \quad (5.4.61)$$

Если

$$u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)} = r_1, \quad b_1^2 = (b - H_1)^2 + C_1^2 - 4, \quad (5.4.62)$$

то правая часть равенства (5.4.60) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2)}{(b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2}} - \\ & -(b - H_1)(1 + bH_1) \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b - H_1}{2} I_1, \end{aligned} \quad (5.4.63)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2}. \quad (5.4.64)$$

При вычислении интеграла (5.4.64) возможны три случая.

I. $|b - H_1| > 2$.

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \right| + \text{const.} \end{aligned} \quad (5.4.65)$$

II. $|b - H_1| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (5.4.66)$$

III. $|b - H_1| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (5.4.67)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_3}{\sin \alpha} - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}, \quad (5.4.68)$$

имеем окончательный вид для величины I_1 :

I. $|b - H_1| > 2$.

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} \pm 2(1 + bH_1)r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} \mp 2(1 + bH_1)r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \right| + \text{const.} \end{aligned} \quad (5.4.69)$$

II. $|b - H_1| < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (5.4.70)$$

III. $|b - H_1| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2(1 + bH_1)r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (5.4.71)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (5.4.35)–(5.4.37) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 4. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (5.4.50).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln |\sin \alpha| + G_2 \left(\sin \alpha, \frac{w_4}{\sin \alpha}, \frac{w_3}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (5.4.72)$$

Таким образом, для интегрирования системы восьмого порядка (5.4.35)–(5.4.40) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости, как указано выше, достаточно найти по одному первому интегралу для (потенциально отделившихся) систем (5.4.38), (5.4.39), а также дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (5.4.40).

Для поиска первого интеграла (потенциально отделившихся) систем (5.4.38), (5.4.39) сопоставим им следующие неавтономные уравнения первого порядка:

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2 \cos \beta_s}{w_s \sin \beta_s}, s = 1, 2. \quad (5.4.73)$$

Последнее равенство после несложного интегрирования приводит к искомым инвариантным соотношениям

$$\frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin \beta_s} = C_{s+2} = \text{const}, s = 1, 2. \quad (5.4.74)$$

Далее, для поиска дополнительного первого интеграла, "привязывающего" уравнение (5.4.40), сопоставим уравнениям (5.4.40) и (5.4.38) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{dw_2}{d\beta_3} = -(1 + w_2^2) \cos \beta_2. \quad (5.4.75)$$

Поскольку, в силу (5.4.74),

$$C_4 \cos \beta_2 = \pm \sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}, \quad (5.4.76)$$

то

$$\frac{dw_2}{d\beta_3} = \mp \frac{1}{C_4} (1 + w_2^2) \sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}. \quad (5.4.77)$$

Тогда, интегрируя последнее равенство, приходим к следующей квадратуре:

$$\mp (\beta_3 + C_5) = \int \frac{C_4 dw_2}{(1 + w_2^2) \sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}}, C_5 = \text{const.} \quad (5.4.78)$$

Дальнейшее интегрирование приводит к равенству

$$\mp \text{tg}(\beta_3 + C_5) = \frac{C_4 w_2}{\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}}, C_5 = \text{const.} \quad (5.4.79)$$

Окончательно имеем вид дополнительного первого интеграла, "привязывающего" уравнение (5.4.40):

$$\text{arctg} \frac{C_4 w_2}{\sqrt{C_4^2 - 1 - w_2^2}} \pm \beta_3 = C_5, C_5 = \text{const.} \quad (5.4.80)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (5.2.2)–(5.2.6), (5.2.9)–(5.2.18) при условии (5.4.5) имеет двенадцать инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (5.2.26), циклические первые интегралы вида (5.2.21), (5.2.22), первый интеграл вида (5.4.51), также имеется первый интеграл, выражающийся соотношениями (5.4.65)–(5.4.72), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (5.4.74) и (5.4.80).

Теорема 3. Система (5.2.2)–(5.2.6), (5.2.9)–(5.2.18) при условиях (5.2.26), (5.4.5), (5.2.22) обладает двенадцатью инвариантными соотношениями (полным набором), пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Аналогичные утверждения и теоремы справедливы в случае шестимерного твердого тела.

5.4.4. Топологические аналогии. Рассмотрим следующую систему уравнений седьмого порядка:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\xi} + (b_* - H_{1*})\dot{\xi} \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - [\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 \sin^2 \eta_1 + \dot{\eta}_3^2 \sin^2 \eta_1 \sin^2 \eta_2] \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = 0, \\
& \ddot{\eta}_1 + (b_* - H_{1*})\dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} - (\dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2 \sin^2 \eta_2) \sin \eta_1 \cos \eta_1 = 0, \\
& \ddot{\eta}_2 + (b_* - H_{1*})\dot{\eta}_2 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_2 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} - \dot{\eta}_3^2 \sin \eta_2 \cos \eta_2 = 0, \\
& \ddot{\eta}_3 + (b_* - H_{1*})\dot{\eta}_3 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_3 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_3 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} + 2\dot{\eta}_2 \dot{\eta}_3 \frac{\cos \eta_2}{\sin \eta_2} = 0, \\
& b_* > 0, H_{1*} > 0,
\end{aligned} \tag{5.4.81}$$

описывающую закрепленный пятимерный маятник, помещенный в поток набегающей среды при наличии зависимости момента сил от угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 8, но фазовая переменная η_3 является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Ее фазовым пространством является касательное расслоение

$$T\mathbb{S}^3\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dot{\eta}_3, \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\} \tag{5.4.82}$$

к четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$, при этом уравнение, переводящее систему (5.3.88) в систему на касательном расслоении к трехмерной сфере

$$\dot{\eta}_3 \equiv 0, \tag{5.4.83}$$

и уравнения больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0, \dot{\eta}_2 \equiv 0, \dot{\eta}_3 \equiv 0 \tag{5.4.84}$$

задают семейства интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (5.4.81) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (5.4.82) к четырехмерной сфере. Более того, справедлива

Теорема 4. Система (5.2.2)–(5.2.6), (5.2.9)–(5.2.18) при условиях (5.2.26), (5.4.5), (5.2.22) эквивалентна динамической системе (5.4.81).

Действительно, достаточно положить $\alpha = \xi$, $\beta_1 = \eta_1$, $\beta_2 = \eta_2$, $\beta_3 = \eta_3$, $b = -b_*$, $H_1 = -H_{1*}$.

Аналогичным образом может быть рассмотрена следующая система уравнений девятого порядка:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\xi} + (b_* - H_{1*})\dot{\xi} \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - \\
& - [\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 \sin^2 \eta_1 + \dot{\eta}_3^2 \sin^2 \eta_1 \sin^2 \eta_2 + \dot{\eta}_4^2 \sin^2 \eta_1 \sin^2 \eta_2 \sin^2 \eta_3] \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = 0, \\
& \ddot{\eta}_1 + (b_* - H_{1*})\dot{\eta}_1 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_1 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} - (\dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2 \sin^2 \eta_2 + \dot{\eta}_4^2 \sin^2 \eta_2 \sin^2 \eta_3) \sin \eta_1 \cos \eta_1 = 0, \\
& \ddot{\eta}_2 + (b_* - H_{1*})\dot{\eta}_2 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_2 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} - [\dot{\eta}_3^2 + \dot{\eta}_4^2 \sin^2 \eta_3] \sin \eta_2 \cos \eta_2 = 0, \\
& \ddot{\eta}_3 + (b_* - H_{1*})\dot{\eta}_3 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_3 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_3 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} + 2\dot{\eta}_2 \dot{\eta}_3 \frac{\cos \eta_2}{\sin \eta_2} - \dot{\eta}_4^2 \sin \eta_3 \cos \eta_3 = 0, \\
& \ddot{\eta}_4 + (b_* - H_{1*})\dot{\eta}_4 \cos \xi + \dot{\xi} \dot{\eta}_4 \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} + 2\dot{\eta}_1 \dot{\eta}_4 \frac{\cos \eta_1}{\sin \eta_1} + \\
& + 2\dot{\eta}_2 \dot{\eta}_4 \frac{\cos \eta_2}{\sin \eta_2} + 2\dot{\eta}_3 \dot{\eta}_4 \frac{\cos \eta_3}{\sin \eta_3} = 0, b_* > 0,
\end{aligned} \tag{5.4.85}$$

описывающая закрепленный шестимерный маятник, помещенный в поток набегающей среды при наличии зависимости момента сил от тензора угловой скорости, т.е. механическую систему в неконсервативном поле сил. Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 10, но фазовая переменная η_4 является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка.

Утверждения и теоремы, справедливые для пятимерного тела, справедливы также и для шестимерного тела, которому и соответствует приведенная выше система.

О более общих топологических аналогиях см. также [32, 39, 43, 45, 60, 69].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Некоторое уточнение алгоритма Конвея// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2005. № 3. — С. 53–55.
2. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Феноменологический подход к определению межфазных сил// Докл. РАН. — 2007. — 412, № 1. — С. 44–47.
3. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Архимедовы равномерные структуры// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 46–51.
4. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Общий спектральный подход к динамике сплошной среды// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 52–70.
5. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Многообразия непрерывных структур// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 71–86.
6. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Группы цветов// Совр. мат. прилож. — 2009. — 62. — С. 15–27.
7. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Псевдодифференциальные операторы в теории многофазных многоскоростных течений// Совр. мат. прилож. — 2009. — 65. — С. 11–30.
8. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Операторы усреднения и реальные уравнения гидромеханики// Совр. мат. прилож. — 2009. — 65. — С. 31–47.
9. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Формулы интегрирования десятого порядка точности и выше// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2010. № 4. — С. 3–7.
10. Андреев А. В., Шамолин М. В. Математическое моделирование воздействия среды на твердое тело и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. серия. — 2014. — № 10 (121). — С. 109–115.
11. Андронов А. А. Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
12. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы// Докл. АН СССР. — 1937. — 14, № 5. — С. 247–250.
13. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
14. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. Мат. ин-та им В. А. Стеклова АН СССР. — М.: Наука, 1967. — 90.
15. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 1, 2. — М.: Физматгиз, 1960.
16. Арнольд В. И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела в идеальной жидкости// Усп. мат. наук. — 1969. — 24, № 3. — С. 225–226.
17. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
18. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики// Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — М.: ВИНТИ, 1985. — 3.
19. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.
20. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
21. Беляев А. В. О движении многомерного тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести// Мат. сб. — 1981. — 114, № 3. — С. 465–470.
22. Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — 9.
23. Берже М. Геометрия. Т. I, II. — М.: Мир, 1984.
24. Бессе А. Л. Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1981.
25. Бивин Ю. К., Викторов В. В., Степанов Л. П. Исследование движения твердого тела в глинистой среде// Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. — 1978. № 2. — С. 159–165.
26. Бивин Ю. К., Глухов Ю. М., Пермяков Ю. В. Вертикальный вход твердых тел в воду// Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. — 1985. — № 6. — С. 3–9.
27. Биркгоф Дж. Динамические системы. — М.-Л.: Гостехиздат, 1941.

28. Бишоп Р. Л. Колебания. — М.: Наука, 1986.
29. Блисс Дж. А. Лекции по вариационному исчислению. — М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
30. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астророфизике и газовой динамике. — М.: Наука, 1980.
31. Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 5. — С. 1105–1108.
32. Богоявленский О. И., Ивах Г. Ф. Топологический анализ интегрируемых случаев В. А. Стеклова// Усп. мат. наук. — 1985. — 40, № 4. — С. 145–146.
33. Бойко Г. Л., Ерошин В. А. Определение перегрузок при ударе профиля о поверхность жидкости// Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. — 1975. — № 1. — С. 35–38.
34. Борисенок И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики// Фундам. прикл. мат. — 1999. — 5, № 3. — С. 775–790.
35. Борисенок И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
36. Браилов А. В. Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения// Докл. АН СССР. — 1983. — 268, № 5. — С. 1043–1046.
37. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
38. Бурбаки Н. Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
39. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
40. Буров А. А., Субханкулов Г. И. О движении твердого тела в магнитном поле// Прикл. мат. мех. — 1986. — 50, № 6. — С. 960–966.
41. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969.
42. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988.
43. Бялый М. Л. О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе// Функци. анал. прилож. — 1987. — 21, № 4. — С. 64–65.
44. Валле Пуссен Ш. Ж. Лекции по теоретической механике. Т. 1. — М.: ИЛ, 1948; Т. 2. — М.: ИЛ, 1949.
45. Вишик С. В., Должанский С. Ф. Аналоги уравнений Эйлера—Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли// Докл. АН СССР. — 238, № 5. — С. 1032–1035.
46. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1960.
47. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
48. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
49. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в \mathbb{R}^n // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
50. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — 65. — С. 3–10.
51. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2012. — 76. — С. 3–10.
52. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — 76. — С. 22–39.
53. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. С., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их приложения. — М.: Наука, 1981.
54. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973.
55. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
56. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
57. Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. — М.: Мир, 1986.

58. Гробман Д. М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в n -мерном пространстве// Мат. сб. — 1962. — 56, № 1. — С. 77–94.
59. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
60. Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа// Докл. АН СССР. — 1984. — 279, № 2. — С. 294–297.
61. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
62. Ерошин В. А. Рикошет пластинки от поверхности идеальной несжимаемой жидкости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1970. — № 6. — С. 99–104.
63. Ерошин В. А. Погружение диска в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности// Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. — 1983. — № 2. — С. 142–144.
64. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
65. Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л. Экспериментальное определение давления на диске при погружении в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности// Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. — 1988. — № 2. — С. 21–25.
66. Ерошин В. А., Романенков Н. И., Серебряков И. В., Якимов Ю. Л. Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости// Изв. АН СССР. Мех. жидк. газа. — 1980. — № 6. — С. 44–51.
67. Жуковский Н. Е. О падении легких, продолговатых тел, вращающихся вокруг своей продольной оси// Полн. собр. соч. — М.: Физматгиз, 1937. — 5. — С. 72–80, 100–115.
68. Жуковский Н. Е. О парении птиц// Полн. собр. соч. — М.: Физматгиз, 1937. — 5. — С. 49–59.
69. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. — М.-Л.: Гостехиздат, 1938.
70. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
71. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. — М.: Наука, 1976.
72. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. — М.: Изд-во МГУ, 1980.
73. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
74. Козлов В. В. О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости// Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. — 1989. — № 5. — С. 10–17.
75. Козлов В. В. К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1990. — № 1. — С. 79–87.
76. Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947.
77. Левшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1961.
78. Лич Дж. У. Классическая механика. — М.: ИЛ, 1961.
79. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986.
80. Лунев В. В. Гидродинамическая аналогия задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле сил Лоренца// Докл. АН СССР. — 1984. — 276, № 2. — С. 351–355.
81. Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости// Собр. соч. Т. 1 — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — С. 320–324.
82. Манин Ю. И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. — М.: ВИНТИ, 1978. — 11. — С. 5–112.
83. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981.
84. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
85. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
86. Одареев В. А. Декомпозиционный анализ динамики и устойчивости продольного возмущенного движения экраноплана/ Дисс. на соискание уч. степ. докт. наук. — М.: МГАИ, 1995.
87. Окунев Ю. М., Садовничий В. А. Модельные динамические системы одной задачи внешней баллистики и их аналитические решения// В сб.: Проблемы современной механики. — М.: Изд-во МГУ. — 1998. — С. 28–46.
88. Окунев Ю. М., Самсонов В. А., Локшин Б. Я., Досаев М. З., Климина Л. А., Селюцкий Ю. Д., Привалова О. Г., Шамолин М. В., Кобрин А. И. Проблемы управления движением тел в сплошной среде/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 5103. — М.: Ин-т механики МГУ, 2010.

89. *Окунев Ю. М., Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов комплексных неавтономных уравнений// Совр. мат. прилож. — 2009. — 65. — С. 122–131.
90. *Палис Ж., Ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Введение. — М.: Мир, 1986.
91. *Переломов А. М.* Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости// Функц. анал. прилож. — 1981. — 15, № 2. — С. 83–85.
92. *Поляков Н. Л., Шамолин М. В.* О замкнутых симметричных классах функций, сохраняющих любой одноместный предикат// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2013. — № 6 (107). — С. 61–73.
93. *Поляков Н. Л., Шамолин М. В.* Об одном обобщении теоремы Эрроу// Докл. РАН. — 2014. — 456, № 2. — С. 143–145.
94. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2012. — № 9 (100). — С. 136–150.
95. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2013. — № 9/1 (110). — С. 35–41.
96. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2014. — № 7 (118). — С. 60–69.
97. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
98. *Пуанкаре А.* Новые методы в небесной механике// *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1971, 1972.
99. *Пуанкаре А.* О науке. — М.: Наука, 1983.
100. *Самсонов В. А.* Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы. — М.: Наука, 1980.
101. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
102. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3969. — М.: Ин-т механики МГУ, 1990.
103. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4141. — М.: Ин-т механики МГУ, 1991.
104. *Самсонов В. А., Шамолин М. В., Ерошин В. А., Макаришин В. М.* Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4396. — М.: Ин-т механики МГУ, 1995.
105. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1983; т. 2. — М.: Наука, 1984.
106. *Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В.* Локальная разрешимость одной задачи со свободной границей// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2011. — № 8 (89). — С. 86–94.
107. *Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В.* Исследование межфазной зоны в одной сингулярно предельной задаче// Совр. мат. прилож. — 2012. — 78. — С. 109–118.
108. *Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В.* Локальная разрешимость капиллярной задачи// Совр. мат. прилож. — 2012. — 78. — С. 119–125.
109. *Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В.* Квазистационарная задача Стефана со значениями на фронте, зависящими от его геометрии// Совр. мат. прилож. — 2012. — 78. — С. 126–134.
110. *Синг Дж. Л.* Классическая динамика. — М.: Физматгиз, 1963.
111. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы// Усп. мат. наук. — 1970. — 25, № 1. — С. 113–185.
112. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. — Харьков, 1893.
113. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946.
114. *Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л.* Асимптотическая теория отрывных течений. — М.: Наука, 1987.
115. *Табачников В. Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки// Тр. ЦАГИ. — 1974. — № 1621. — С. 18–24.
116. *Трофимов В. В.* Вложения конечных групп регулярными элементами в компактные группы Ли// Докл. АН СССР. — 1976. — 226, № 4. — С. 785–786.
117. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
118. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
119. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. — М.: ОНТИ, 1937.
120. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

121. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// В кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
122. Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
123. Шамолин М. В. Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием// Дисс. на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1991.
124. Шамолин М. В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1992. — № 2. — С. 52–56.
125. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1992. — № 1. — С. 52–58.
126. Шамолин М. В. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — 57, № 4. — С. 40–49.
127. Шамолин М. В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1993. — № 2. — С. 66–70.
128. Шамолин М. В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1993. — № 1. — С. 68–71.
129. Шамолин М. В. Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде// Докл. РАН. — 1994. — 337, № 5. — С. 611–614.
130. Шамолин М. В. Относительная структурная устойчивость динамических систем задачи движения тела в среде// В сб.: Аналитические, численные и экспериментальные методы в механике. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — С. 14–19.
131. Шамолин М. В. Определение относительной грубости и двухпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела// Усп. мат. наук. — 1996. — 51, № 1. — С. 175–176.
132. Шамолин М. В. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1996. — № 2. — С. 55–63.
133. Шамолин М. В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой// Докл. РАН. — 1996. — 349, № 2. — С. 193–197.
134. Шамолин М. В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1996. — № 4. — С. 57–69.
135. Шамолин М. В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1997. — № 2. — С. 65–68.
136. Шамолин М. В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения// Усп. мат. наук. — 1997. — 52, № 3. — С. 177–178.
137. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
138. Шамолин М. В. Методы нелинейного анализа в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// В сб.: CD Proc. of the Congress “Nonlinear Analysis and Its Applications,” Moscow, Russia, September 1–5, 1998. — М., 1999. — С. 497–508.
139. Шамолин М. В. Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1998— № 6. — С. 29–37.
140. Шамолин М. В. Некоторые классы частных решений в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1999. — № 2. — С. 178–189.
141. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
142. Шамолин М. В. О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией// Усп. мат. наук. — 1999. — 54, № 5. — С. 181–182.
143. Шамолин М. В. Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2000. — 371, № 4. — С. 480–483.
144. Шамолин М. В. О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек// Усп. мат. наук. — 2000. — 55, № 3. — С. 187–188.
145. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
146. Шамолин М. В. Об устойчивости движения твердого тела в сопротивляющейся среде, закрученного вокруг своей продольной оси// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2001. — № 1. — С. 189–193.

147. *Шамолин М. В.* Случай интегрируемости уравнений пространственной динамики твердого тела// Прикл. мех. — 2001. — 37, № 6. — С. 74–82.
148. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2001. — № 5. — С. 22–28.
149. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
150. *Шамолин М. В.* Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой// Прикл. мех. — 2004. — 40, № 4. — С. 137–144.
151. *Шамолин М. В.* Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой/ Дисс. на соискание уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2004.
152. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2004.
153. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости// Докл. РАН. — 2005. — 403, № 4. — С. 482–485.
154. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
155. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbb{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
156. *Шамолин М. В.* Модельная задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4818. — М.: Ин-т механики МГУ, 2006.
157. *Шамолин М. В.* К задаче о пространственном торможении твердого тела в сопротивляющейся среде// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2006. — № 3. — С. 45–57.
158. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учете вращательных производных момента силы ее воздействия// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2007. — № 3. — С. 187–192.
159. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
160. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
161. *Шамолин М. В.* Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 2008. — 418, № 1. — С. 46–51.
162. *Шамолин М. В.* Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии его со средой// Прикл. мех. — 2007. — 43, № 10. — С. 49–67.
163. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости// Прикл. мат. мех. — 2008. — 72, № 2. — С. 273–287.
164. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2008. — № 3. — С. 43–49.
165. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем// Совр. мат. прилож. — 2009. — 62. — С. 131–171.
166. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. и прикл. матем. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
167. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
168. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электр. модел. — 2009. — 31, № 1. — С. 97–115.
169. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электр. модел. — 2009. — 31, № 3. — С. 73–90.
170. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электр. модел. — 2009. — 31, № 4. — С. 55–66.
171. *Шамолин М. В.* Классификация случаев полной интегрируемости в динамике симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Совр. мат. прилож. — 2009. — 65. — С. 132–142.

172. *Шамолин М. В.* Об устойчивости прямолинейного поступательного движения// Прикл. мех. — 2009. — 45, № 6. — С. 125–140.
173. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела// Докл. РАН. — 2010. — 431, № 3. — С. 339–343.
174. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
175. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электр. модел. — 2010. — 32, № 1. — С. 45–52.
176. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде// Научный отчет Ин-та механики МГУ № 5052. — М.: Ин-т механики МГУ, 2010.
177. *Шамолин М. В.* Пространственное движение твердого тела в среде с сопротивлением// Прикл. мех. — 2010. — 46, № 7. — С. 120–133.
178. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электр. модел. — 2010. — 32, № 5. — С. 31–44.
179. *Шамолин М. В.* Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Совр. мат. прилож. — 2012. — 76. — С. 84–99.
180. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
181. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
182. *Шамолин М. В.* Диагностика гиросtabilизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электр. модел. — 2011. — 33, № 3. — С. 121–126.
183. *Шамолин М. В.* Динамические инварианты интегрируемых динамических систем с переменной диссипацией// Вестн. Нижегородск. ун-та. — 2011. — № 4, ч. 2. — С. 356–357.
184. *Шамолин М. В.* Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2011. — № 3. — С. 24–30.
185. *Шамолин М. В.* Движение твердого тела в сопротивляющейся среде// Мат. модел. — 2011. — 23, № 12. — С. 79–104.
186. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
187. *Шамолин М. В.* Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расщеплении к трехмерной сфере// Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2011. — № 5 (86). — С. 187–189.
188. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
189. *Шамолин М. В.* Некоторые вопросы качественной теории в динамике систем с переменной диссипацией// Совр. мат. прилож. — 2012. — 78. — С. 138–147.
190. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения твердого тела в сопротивляющейся среде при учете линейного демпфирования// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2012. — № 4. — С. 44–47.
191. *Шамолин М. В.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости// Мат. модел. — 2012. — 24, № 10. — С. 109–132.
192. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
193. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Автомат. телемех. — 2013. — № 8. — С. 173–190.
194. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
195. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расщеплении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5. — С. 185–186.
196. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в задачах динамики твердого тела, взаимодействующего со средой// Прикл. мех. — 2013. — 49, № 6. — С. 44–54.

197. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНТИ, 2013. — 125. — С. 5–254.
198. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
199. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в пространственной динамике твердого тела в неконсервативном поле сил// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2014. — № 30. — С. 287–350.
200. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле// Докл. РАН. — 2015. — 460, № 2. — С. 165–169.
201. *Шамолин М. В.* Моделирование движения твердого тела в сопротивляющейся среде и аналогии с вихревыми дорожками// Мат. модел. — 2015. — 27, № 1. — С. 33–53.
202. *Шамолин М. В.* Случай интегрируемости в динамике многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле при наличии следящей силы// Фундам. прикл. мат. — 2014. — 19, № 3. — С. 187–222.
203. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
204. *Шамолин М. В.* Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расщелении к трехмерной сфере// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 2015. — № 3. — С. 11–14.
205. *Шамолин М. В., Цыпцын С. В.* Аналитическое и численное исследование траекторий движения тела в сопротивляющейся среде/ Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4289. — М.: Ин-т механики МГУ, 1993.
206. *Шамолин М. В., Шебаршов Д. В.* Некоторые вопросы геометрии в классической механике/ Деп. в ВИНТИ РАН 12.05.99. — № 1499–В99.
207. *Шамолин М. В., Шебаршов Д. В.* Методы решения основной задачи дифференциальной диагностики/ Деп. в ВИНТИ 12.05.99. — № 1500–В99.
208. *Шорыгин О. П., Шулъман Н. А.* Вход диска в воду с углом атаки// Уч. зап. ЦАГИ. — 1977. — 8, № 1. — С.12–21.
209. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.
210. *Якоби К.* Лекции по динамике. — М.-Л.: ОНТИ, 1936.
211. *Aidagulov R. R., Shamolin M. V.* Polynumbers, norms, metrics, and polyingles// J. Math. Sci. — 2015. — 204, № 6. — С. 742–759.
212. *Aidagulov R. R., Shamolin M. V.* Finsler spaces, bingles, polyingles, and their symmetry groups// J. Math. Sci. — 2015. — 204, № 6. — С. 732–741.
213. *Aidagulov R. R., Shamolin M. V.* Topology on polynumbers and fractals// J. Math. Sci. — 2015. — 204, № 6. — С. 760–771.
214. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov// J. Math. Sci. — 2008. — 154, № 4. — 462–495.
215. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov// J. Math. Sci. — 2009. — 161, № 5. — С. 603–614.
216. *Georgievskii D. V., Shamolin M. V.* Sessions of the workshop of the Mathematics and Mechanics Department of Lomonosov Moscow State University “Urgent problems of geometry and mechanics” named after V. V. Trofimov// J. Math. Sci. — 2015. — 204, № 6. — С. 715–731.
217. *Okunev Yu. M., Shamolin M. V.* On the construction of the general solution of a class of complex nonautonomous equations// J. Math. Sci. — 2015. — 204, № 6. — С. 787–799.
218. *Shamolin M. V.* Three-dimensional structural optimization of controlled rigid motion in a resisting medium// Proc. WCSMO-2, Zakopane, Poland, May 26–30, 1997. — Zakopane, Poland, 1997. — С. 387–392.
219. *Shamolin M. V.* Some classical problems in a three-dimensional dynamics of a rigid body interacting with a medium// Proc. ICTACEM’98, Kharagpur, India, December 1–5, 1998. — Kharagpur, India: Indian Inst. Technology, 1998. — С. 1–11.
220. *Shamolin M. V.* Mathematical modelling of interaction of a rigid body with a medium and new cases of integrability//CD Proc. of ECCOMAS 2000. Barcelona, Spaine, September 11–14. — Barcelona, 2000.
221. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — С. 2526–2555.

222. *Shamolin M. V.* New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium// *J. Math. Sci.* — 2003. — 114, № 1. — С. 919–975.
223. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// *J. Math. Sci.* — 2003. — 114, No. 1. — С. 976–1024.
224. *Shamolin M. V.* Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body// *J. Math. Sci.* — 2004. — 122, № 1. — С. 2841–2915.
225. *Shamolin M. V.* Structural stable vector fields in rigid body dynamics// *Proc. 8th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2005)*, Lodz, Poland, Dec. 12–15, 2005. — Lodz: Tech. Univ., 2005. — 1. — С. 429–436.
226. *Shamolin M. V.* The cases of integrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body interacting with a medium// *Proc. 9th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2007)*, Lodz, Poland, Dec. 17–20, 2007. — Lodz: Tech. Univ., 2007. — 1. — С. 415–422.
227. *Shamolin M. V.* Some methods of analysis of the dynamic systems with various dissipation in dynamics of a rigid body// *Proc. Appl. Math. Mech.* — 2008. — 8. — С. 10137–10138.
228. *Shamolin M. V.* Dynamical systems with variable dissipation: methods and applications// *Proc. 10th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2009)*, Lodz, Poland, Dec. 7–10, 2009. — Lodz: Tech. Univ., 2009. — С. 91–104.
229. *Shamolin M. V.* The various cases of complete integrability in dynamics of a rigid body interacting with a medium// *Multibody Dynamics, ECCOMAS Thematic Conf. Warsaw, Poland, 29 June–2 July 2009.* — Polish Acad. Sci., Warsaw, 2009.
230. *Shamolin M. V.* New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium// *Proc. Appl. Math. Mech.* — 2009. — 9, № 1. — С. 139–140.
231. *Shamolin M. V.* Dynamical systems with various dissipation: background, methods, applications// *CD Proc. of XXXVIII Summer School–Conf. “Advances Problems in Mechanics” (APM 2010)*, July 1–5, 2010, St. Petersburg (Repino), Russia; St. Petersburg, IPME, 2010, pp. 612–621.
232. *Shamolin M. V.* Integrability and nonintegrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body, In: *PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.)*, 10:1, 63–64 (2010).
233. *Shamolin M. V.* Cases of complete integrability in transcendental functions in dynamics and certain invariant indices, In: *CD Proc. 5th Intern. Sci. Conf. on Physics and Control PHYSCON 2011*, Leon, Spain, September 5–8, 2011; Leon, Spain, 5 p.
234. *Shamolin M. V.* Variety of the cases of integrability in dynamics of a 2D-, 3D-, and 4D-rigid body interacting with a medium, In: *Proc. of 11th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2011)*, Lodz, Poland, Dec. 5–8, 2011; Tech. Univ. Lodz, 2011, pp. 11–24.
235. *Shamolin M. V.* Cases of Complete Integrability in Transcendental Functions in Dynamics and Certain Invariant Indices, In: *PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.)*, 12:1, 43–44 (2012).
236. *Shamolin M. V.* Cases of integrability in transcendental functions in 3D Dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: *Proc. ECCOMAS Multibody Dynamics 2013*, 1–4 July, 2013, University of Zagreb, Croatia; University of Zagreb, 2013, pp. 903–912.
237. *Shamolin M. V.* Variety of the cases of integrability in Dynamics of a symmetric 2D-, 3D- and 4D-rigid body in a nonconservative field, In: *Intern. J. Structural Stability and Dynamics*, Vol. 13, No. 7 (2013) 1340011 (14 pages).
238. *Shamolin M. V.* Review of Cases of Integrability in Dynamics of Lower- and Multidimensional Rigid Body in a Nonconservative Field of Forces, In: *Recent Advances in Mathematics, Statistics and Economics, Proc. of 2014 Intern. EUROPMENT Conf. on Pure Math.–Appl. Math. (PM–AM’14)*, Venice, Italy, March 15–17, 2014; Venice, pp. 86–102.
239. *Shamolin M. V.* New cases of integrability in multidimensional dynamics in a nonconservative field, In: *XLII Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics”*, June 30 – July 5, 2014, St. Petersburg (Repino), Russia (APM 2014), CD Proceedings; St. Petersburg, 2014, pp. 435–446.
240. *Shamolin M. V.* On Stability of Certain Key Types of Rigid Body Motion in a Nonconservative Field, In: *Proc. 2014 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2014)*, Luzern, Switzerland, September 14–18, 2014; Luzern, 2014, pp. 36–39.
241. *Shamolin M. V.* Dynamical Pendulum-Like Nonconservative Systems, In: *Applied Non-Linear Dynamical Systems*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 93, 2014, pp. 503–525.
242. *Shamolin M. V.* On stability of certain key types of rigid body motion in a nonconservative field, In: *PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.)*, 14:1, 311–312 (2014).

243. *Shamolin M. V.* Classification of Integrable Cases in the Dynamics of a Four-Dimensional Rigid Body in a Nonconservative Field in the Presence of a Tracking Force, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 204, No. 6, 2015, pp. 808–870.
244. *Shamolin M. V.* Certain Integrable Cases in Dynamics of a Multi-Dimensional Rigid Body in a Nonconservative Field, In: New Developments in Pure and Applied Mathematics, Proc. of Intern. Conf. on Pure Math.–Appl. Math. (PM–AM'15), Mathematics and Computers in Science and Engineering Series, Vol. 42, Vienna, Austria, March 15–17, 2015; Vienna, pp. 328–342.
245. *Shamolin M. V.* Multidimensional pendulum in a nonconservative force field, In: XLIII Summer School–Conference “Advanced Problems in Mechanics”, June 22–27, 2015, St. Petersburg, Russia (APM 2015), Proceedings; St. Petersburg, 2015, pp. 322–332.

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru; shamolin@imec.msu.ru