ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 474, № 2, с. 177–181

МЕХАНИКА

УДК 531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ

© 2017 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 26.09.2016 г.

Поступило 27.09.2016 г.

Показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих в динамике многомерного твёрдого тела, а также в динамике точки, на касательном расслоении к многомерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним и обобщают ранее рассмотренные.

DOI: 10.7868/S0869565217140080

В динамике систем со многими степенями свободы часто возникают системы с пространствами положений – сферами конечной размерности. Таким образом, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к данным сферам. Так, например, изучение n-мерного маятника на обобщённом сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [1, 2].

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики свободного n-мерного твёрдого тела в неконсервативном силовом поле также породили системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом исследование проводилось, начиная от систем при отсутствии силового поля, и продолжалось системами при наличии неконсервативных силовых полей с дополнительными группами симметрий [2, 3].

Построение неконсервативного силового поля, действующего на многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных твёрдых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля (ср. с [4–6]).

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: shamolin@rambler.ru

Естественным образом в рассматриваемый класс задач помещается классическая задача о движении материальной точки по поверхности многомерной сферы в неконсервативном поле сил.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем, возникающих в динамике многомерного твёрдого тела, а также в динамике точки, на касательном расслоении к многомерной сфере. При этом рассматриваемые силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним [1, 3] и обобщают ранее рассмотренные.

Системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. Рассмотрим следующую систему (1), (2) порядка $2(n-1)$:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet} = -z_{n-1} + bg(\alpha),\\
z_{n-1}^{\bullet} = F(\alpha) - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2) f(\alpha),\\
z_{n-2}^{\bullet} = z_{n-2} z_{n-1} f(\alpha) + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2) f(\alpha),\\
z_{n-3}^{\bullet} = z_{n-3} z_{n-1} f(\alpha) - z_{n-3} z_{n-2} f(\alpha) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -\\
-(z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2) f(\alpha) \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \qquad (1)\\
\ldots\\
z_1^{\bullet} = z_1 f(\alpha) \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} z_{n-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \sin\beta_2 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\},
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
&\beta_1^{\bullet} = z_{n-2} f(\alpha),\\
&\beta_2^{\bullet} = -z_{n-3} f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1},\\
&\ldots\\
&\beta_{n-2}^{\bullet} = (-1)^{n+1} z_1 f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1\sin\beta_2\ldots\sin\beta_{n-3}},
\end{aligned} \tag{2}
$$

на касательном расслоении $T^*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\ \alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}$ $\{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\colon\ 0\le\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\le\pi,\ \beta_{n-2} \bmod 2\pi\}$. Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b\ge 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ – силовое поле. Первое уравнение системы (1) и система (2) задают координаты $z_{n-1},\ldots,z_1$ в касательном пространстве к сфере (являются обобщёнными кинематическими соотношениями). При этом система (1), (2) без последнего уравнения является независимой подсистемой порядка $2n-3$ (ввиду цикличности переменной β_{n-2}).

Система (1), (2) также может быть представлена в маятниковом виде

$$
\begin{aligned}
&\alpha^{\bullet\bullet} - b\alpha^{\bullet} g'(\alpha) + F(\alpha) -\\
&-\left[\beta_1^{\bullet 2} + \beta_2^{\bullet 2}\sin^2\beta_1 + \beta_3^{\bullet 2}\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 + \ldots\right.\\
&\left.\ldots + \beta_{n-2}^{\bullet 2}\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-3}\right]\frac{1}{f(\alpha)} = 0,\\
&\beta_1^{\bullet\bullet} - b\beta_1^{\bullet} g(\alpha) f(\alpha) + \alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet}\left[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] -\\
&-\left[\beta_2^{\bullet 2} + \beta_3^{\bullet 2}\sin^2\beta_2 + \beta_4^{\bullet 2}\sin^2\beta_2\sin^2\beta_3 + \ldots\right.\\
&\left.\ldots + \beta_{n-2}^{\bullet 2}\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-3}\right]\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,\\
&\beta_2^{\bullet\bullet} - b\beta_2^{\bullet} g(\alpha) f(\alpha) + \alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet}\left[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] +\\
&+2\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \left[\beta_3^{\bullet 2} + \beta_4^{\bullet 2}\sin^2\beta_3 + \beta_5^{\bullet 2}\sin^2\beta_3\sin^2\beta_4 + \ldots\right.\\
&\left.\ldots + \beta_{n-2}^{\bullet 2}\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-3}\right]\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0,\\
&\beta_3^{\bullet\bullet} - b\beta_3^{\bullet} g(\alpha) f(\alpha) + \alpha^{\bullet}\beta_3^{\bullet}\left[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] +\\
&+2\beta_1^{\bullet}\beta_3^{\bullet}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + 2\beta_2^{\bullet}\beta_3^{\bullet}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} -\\
&-\left[\beta_4^{\bullet 2} + \beta_5^{\bullet 2}\sin^2\beta_4 + \beta_6^{\bullet 2}\sin^2\beta_4\sin^2\beta_5 + \ldots\right.\\
&\left.\ldots + \beta_{n-2}^{\bullet 2}\sin^2\beta_4\ldots\sin^2\beta_{n-3}\right]\sin\beta_3\cos\beta_3 = 0,\\
&\ldots\\
&\beta_{n-4}^{\bullet\bullet} - b\beta_{n-4}^{\bullet} g(\alpha) f(\alpha) + \alpha^{\bullet}\beta_{n-4}^{\bullet}\left[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] +\\
&+2\beta_1^{\bullet}\beta_{n-4}^{\bullet}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\beta_{n-5}^{\bullet}\beta_{n-4}^{\bullet}\frac{\cos\beta_{n-5}}{\sin\beta_{n-5}} -\\
&-\left[\beta_{n-3}^{\bullet 2} + \beta_{n-2}^{\bullet 2}\sin^2\beta_{n-3}\right]\sin\beta_{n-4}\cos\beta_{n-4} = 0,\\
&\beta_{n-3}^{\bullet\bullet} - b\beta_{n-3}^{\bullet} g(\alpha) f(\alpha) + \alpha^{\bullet}\beta_{n-3}^{\bullet}\left[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] +\\
&+2\beta_1^{\bullet}\beta_{n-3}^{\bullet}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\beta_{n-4}^{\bullet}\beta_{n-3}^{\bullet}\frac{\cos\beta_{n-4}}{\sin\beta_{n-4}} -\\
&-\beta_{n-2}^{\bullet 2}\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-3} = 0,\\
&\beta_{n-2}^{\bullet\bullet} - b\beta_{n-2}^{\bullet} g(\alpha) f(\alpha) + \alpha^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet}\left[\frac{f^2(\alpha)-f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] +\\
&+2\beta_1^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\beta_{n-3}^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

П е р в ы е и н т е г р а л ы, м е т р и к и и с и л о в ы е п о л я. При $b = 0$ система (1), (2) является консервативной и обладает полным набором (n штук) первых интегралов [2]:

$$
F_1(z_1,\ldots,z_{n-1},\alpha) = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)\,d\xi = C_1 = \text{const},
$$

$$
F_2(z_1,\ldots,z_{n-2},\alpha) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\,\exp\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)\,d\xi = C_2 = \text{const},
$$

$$
F_3(z_1,\ldots,\alpha,\beta_1) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\,\exp\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)\,d\xi\cdot\sin\beta_1 = C_3 = \text{const},
$$

$$\ldots$$

$$
F_{n-1}(z_1,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}) = z_1\exp\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)\,d\xi\cdot\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \text{const}.
$$

$$
F_n(z_1,\ldots,z_{n-1},\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_n = \text{const}.
$$

При $b > 0$ система (1), (2) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [3].

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{4}$$

а также

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}. \tag{5}$$

Случай (4) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного n-мерного твёрдого тела на нулевых уровнях первых интегралов (т.е. при наличии дополнительных групп симметрий) в неконсервативном поле сил [1–3]. Случай (5) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на $(n-1)$-мерной сфере также в неконсервативном поле сил. При этом в последнем случае метрика на сфере индуцируется евклидовой метрикой всеобъемлющего n-мерного пространства. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (1), (2) описывает геодезический поток на $(n-1)$-мерной сфере.

З а м е ч а н и е. В случае (4), если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система (1), (2) описывает движение свободного n-мерного твёрдого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [1, 3]. В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin\alpha, \tag{6}$$

то система (1), (2) описывает также закреплённый n-мерный маятник на обобщённом сферическом шарнире, помещённый в поток набегающей среды, заполняющей n-мерное пространство [3], и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [7]. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы (1), (2) [8].

Для полного интегрирования системы (1), (2) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных в касательном пространстве

$$w_1 = \frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}}, \ldots, \quad w_{n-4} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}},$$

$$w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1},$$

$$w_{n-2} = w = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}, \quad w_{n-1} = z_{n-1}, \tag{7}$$

система (1), (2) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet} &= -w_{n-1} + bg(\alpha), \\ w_{n-1}^{\bullet} &= F(\alpha) - w_{n-2}^2 f(\alpha), \\ w_{n-2}^{\bullet} &= w_{n-2} w_{n-1} f(\alpha), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} w_k{}' &= d_k \frac{1 + w_k^2}{w_k} \frac{\cos\beta_k}{\sin\beta_k}, \\ \beta_k{}' &= d_k, \; k = 1, 2, \ldots, n-3, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\beta_{n-2}{}' = (-1)^{n+1} Z_1 f(\alpha) \frac{1}{\sin\beta_1 \sin\beta_2 \ldots \sin\beta_{n-3}}, \tag{10}$$

где $Z_1(w_1, \ldots, w_{n-1}) = z_1$ в силу замены (7), d_k, $k = 1, 2, \ldots, n-3$, – некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что для полной интегрируемости системы (8)–(10) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (8), по одному для систем (9) (т.е. $n-3$), и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (10) (т.е. всего n).

С л у ч а й (4). Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a\alpha, \quad m = 2a - 1,$$

$$a, m \in \mathbf{R}. \tag{11}$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (6).

Т е о р е м а 1. *В случаях* (4), (11) *система* (1), (2) *обладает полным набором (n штук), вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

С л е д с т в и е 1. *Система* (3) *при условиях* (4), (11) *обладает n трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замены переменных $\tau = \sin\alpha$, $z_i = u_i\tau^a$, $i = 1, 2$, то поиск одного из первых интегралов $\Phi_1(w_{n-2}, w_{n-1}, \alpha) = C_1$ системы (8) приведёт к уравнению Абеля [9]

$$[(a+1)u_2 - ab]u_1 du_2 = [1 - u_1^2 + au_2^2 - abu_2]du_1, \tag{12}$$

общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается, вообще говоря, громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл $\Phi_2(w_{n-2}, w_{n-1}, \alpha) = C_2$ системы (8) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b - u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + au_2^2 - abu_2}. \tag{13}$$

Первые интегралы для систем (9) имеют вид

$$\Phi_k\left(w_k,\beta_k\right)=\frac{\sqrt{1+w_k^2}}{\sin\beta_k}=C_{k+2}=\text{ const},\quad k=1,2,\ldots,n-3, \tag{14}$$

а дополнительный первый интеграл $\Phi_n\left(w_1,\ldots,w_{n-1},\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\right)=C_n$, “привязывающий” уравнение (10), находим из равенства

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}}=-\frac{1}{z_{n-3}\sin\beta_{n-3}}, \tag{15}$$

при этом, используя первый интеграл (14) при $k = n-3$, $n-4$, окончательно получим его вид:

$$\Phi_n\left(w_{n-4},w_{n-3},\beta_{n-4},\beta_{n-3},\beta_{n-2}\right)= \\ =\operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3}-C_{n-1}^2}}\pm\beta_{n-2}=C_n=\text{const}. \tag{16}$$

В частности, при $a=1$ равенство (12) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_{n-2}}{\sin\alpha},\frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}\right)= \\ =\frac{w_{n-1}^2+w_{n-2}^2-bw_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha}=C_1=\text{ const}.$$

С л у ч а й (5). Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha)=\frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha},\quad g(\alpha)=\frac{\sin^k\alpha}{\cos^k\alpha},\quad k\in\mathbf{R}. \tag{17}$$

Т е о р е м а 2. *В случаях* (5), (17) *система* (1), (2) *обладает полным набором (n штук), вообще говоря, трансцендентных независимых первых интегралов.*

С л е д с т в и е 2. *Система* (3) *при условиях* (5), (17) *обладает n трансцендентными независимыми первыми интегралами.*

Действительно, если сделать замену переменных $\tau=\sin\alpha$, $z_i=u_i\left(\dfrac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k$, $i = 1, 2$, то поиск одного из первых интегралов приведет к уравнению Абеля (12) (только с подстановкой $a\leftrightarrow k$), общее решение которого $u_1=U_1(u_2)$ выписывается громоздко. Несмотря на это, дополнительный первый интеграл $\Phi_2\left(w_{n-2},w_{n-1},\alpha\right)=C_2$ системы (8) находим из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)}=\frac{(b-u_2)du_2}{1-U_1^2(u_2)+ku_2^2-kbu_2}.$$

Первые интегралы для систем (8) имеют вид (13), а дополнительный первый интеграл $\Phi_n\left(w_1,\ldots,w_{n-1},\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\right)=C_n$, “привязывающий” уравнение (10), находим из равенства (15), при этом используя первый интеграл (14) при $k = n-3$, $n-4$, окончательно получим его в виде (16).

В частности, при $k=1$ равенство (12) ($a\leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{w_{n-2}\cos\alpha}{\sin\alpha},\frac{w_{n-1}\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)= \\ =\frac{(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)\cos^2\alpha-bw_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha\cos\alpha}= \\ =C_1=\text{const}.$$

З а к л ю ч е н и е. В работах автора [2, 10, 11] уже рассматривались задачи о движении свободного n-мерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к $(n-1)$-мерной сфере. Данная работа присоединяет к указанной задаче динамики многомерного твёрдого тела задачу о движении точки по n-мерной сфере в неконсервативных силовых полях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15–01–00848-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2013. Т. 125. С. 5–254.
2. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фундам. и прикл. математика. 2015. Т. 20. В. 4. С. 3–231.
3. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14. В. 3. С. 3–237.

4. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики *n*-мерного твердого тела // Функцион. анализ и его прил. 1976. Т. 10. № 4. С. 93–94.

5. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на so(4) // ДАН. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298–1300.

6. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105–1108.

7. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.

8. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.

10. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // ДАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.

11. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // ДАН. 2015. Т. 464. № 6. С. 688–692.