

УДК 531.01+531.552

М.В. Шамолин¹СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ
ДВИЖЕНИЮ МАЯТНИКА В ТРЕХМЕРНОМ
ПРОСТРАНСТВЕ²

В работе систематизируются результаты по исследованию уравнений пространственного движения динамически симметричного закрепленного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о пространственном движении свободного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи. Полученные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. Указаны нетривиальные механические и топологические аналогии.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, динамическая система, трехмерный фазовый портрет, случай интегрируемости

1. Модельные предположения

Рассмотрим однородный плоский круговой диск \mathcal{D} с центром в точке D , плоскость которого перпендикулярна державке OD (ср. с [1]). Диск жестко закреплен к державке, находящейся на сферическом шарнире O , и обтекается однородным потоком среды (рис. 1). В этом случае тело представляет собой физический (сферический) маятник. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$, а державка сопротивления не создает.

Предположим, что суммарная сила \mathbf{S} воздействия потока среды на диск направлена параллельно державке, а точка N приложения этой силы определяется, по крайней мере, углом атаки α , измеряемым между вектором скорости \mathbf{v}_D точки D относительно потока и державкой OD (рис. 1), углом β_1 , измеряемым в плоскости диска \mathcal{D} (таким образом, (v, α, β_1) — сферические координаты конца

1 © Шамолин М.В., 2016

Шамолин Максим Владимирович (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

2 Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

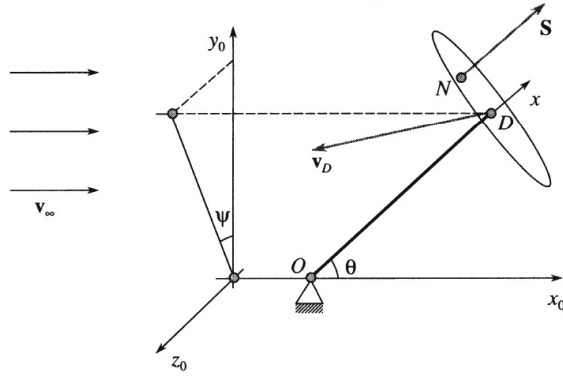


Рис. 1. Закрепленный маятник на сферическом шарнире в потоке набегающей среды

вектора \mathbf{v}_D), а также приведенной угловой скоростью $\omega \cong l\Omega/v_D$, $v_D = |\mathbf{v}_D|$ (l — длина державки, Ω — угловая скорость маятника). Подобные условия возникают при использовании модели струйного обтекания пространственных тел [2, 3]. Таким образом, примем, что сила \mathbf{S} направлена по нормали к диску в сторону, противоположную направлению скорости \mathbf{v}_D , и проходит через некоторую точку N диска так, что вектор скорости \mathbf{v}_D и сила воздействия \mathbf{S} лежат в плоскости ODN . Вектор $\mathbf{e} = \mathbf{OD}/l$ определяет ориентацию державки. Тогда $\mathbf{S} = s(\alpha)v_D^2\mathbf{e}$, $s(\alpha) = s_1(\alpha)\text{sign} \cos \alpha$, где коэффициент сопротивления $s_1 \geq 0$ зависит лишь от угла атаки α . В силу свойств осевой симметрии тела-маятника относительно точки D функция $s(\alpha)$ является четной.

Пусть $Dx_1x_2x_3 = Dxyz$ — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось $Dx = Dx_1$ имеет направляющий вектор \mathbf{e} , а оси $Dx_2 = Dy$ и $Dx_3 = Dz$ лежат в плоскости диска D (рис. 1). На этом же рисунке показаны и $\theta = \xi$, $\psi = \eta_1$ — углы, определяющие положение маятника на сфере. При этом угол θ измеряется между державкой и направлением набегающего потока (ось x_0), а угол ψ — между проекцией державки на неподвижную плоскость y_0z_0 , перпендикулярную набегающему потоку, и осью y_0 (рис. 1). Очевидно, что углы $(\theta, \psi) = (\xi, \eta_1)$ являются сферическими координатами точки D .

Пространством положений такого сферического (физического) маятника является двумерная сфера

$$\mathbf{S}^2\{(\xi, \eta_1) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq \xi \leq \pi, \eta_1 \bmod 2\pi\}, \quad (1.1)$$

а фазовым пространством — касательное расслоение двумерной сферы

$$T_*\mathbf{S}^2\{(\dot{\xi}, \dot{\eta}_1; \xi, \eta_1) \in \mathbf{R}^4 : 0 \leq \xi \leq \pi, \eta_1 \bmod 2\pi\}. \quad (1.2)$$

Сопоставим угловой скорости $\Omega = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2 + \Omega_3\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — единичные вектора системы координат $Dx_1x_2x_3$) кососимметрическую матрицу

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} \in \text{so}(3).$$

Расстояние от центра D диска до центра давления (точки N , рис. 1) будет иметь вид

$$|\mathbf{r}_N| = r_N = DN \left(\alpha, \beta_1, \frac{l\Omega}{v_D} \right), \quad (1.3)$$

где $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, x_{3N}\} = \{0, y_N, z_N\}$ в системе $Dx_1x_2x_3 = Dxyz$ (волну над Ω опустим).

2. Группа динамических уравнений на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$

Если $\text{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$ — тензор инерции тела-маятника в системе координат $Dx_1x_2x_3$, то общая система уравнений его движения примет следующий вид:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1 &= 0, \\ I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_3 &= -z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right) s(\alpha)v_D^2, \\ I_2\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 &= y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right) s(\alpha)v_D^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\{-s(\alpha)v_D^2, 0, 0\}$ — разложение силы \mathbf{S} воздействия среды в системе координат $Dx_1x_2x_3$.

Поскольку размерность алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ равна 3, система уравнений (2.1) и составляет группу динамических уравнений на $\mathfrak{so}(3)$, а, попросту говоря, уравнения движения.

Видно, что в правую часть системы уравнений (2.1) входят, прежде всего, углы α, β_1 , поэтому данная система уравнений не является замкнутой. Для того, чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическим уравнениям на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$ присоединить несколько групп кинематических уравнений.

Сразу же заметим, что система (2.1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3, \quad (2.1)$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \text{const}. \quad (2.2)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \quad (2.3)$$

При условиях (2.1)–(2.3) система (2.1) примет вид незамкнутой системы двух уравнений:

$$I_2\dot{\Omega}_2 = -z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right) s(\alpha)v_D^2, \quad I_2\dot{\Omega}_3 = y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right) s(\alpha)v_D^2. \quad (2.4)$$

3. Первая группа кинематических уравнений

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки D (центра диска \mathcal{D}) и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v_D \cdot \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1) = \tilde{\Omega} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty)\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta_1 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Равенство (3.1) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3$.

Действительно, в левой части равенства (3.1) стоит скорость точки D маятника относительно потока в проекциях на связанную с маятником систему координат $Dx_1x_2x_3$. При этом вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1)$ — единичный вектор вдоль оси вектора \mathbf{v}_D . Вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1)$ имеет сферические координаты $(1, \alpha, \beta_1)$, определяющие разложение (3.2). В правой части равенства (3.1) стоит сумма скоростей точки D при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора $\mathbf{OD} = \{l, 0, 0\}$ в системе координат $Dx_1x_2x_3$.

На втором слагаемом правой части равенства (3.1) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора $(-\mathbf{v}_\infty) = \{-v_\infty, 0, 0\}$ в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат $Dx_1x_2x_3$ необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол $(-\xi)$, что алгебраически эквивалентно умножению величины $(-v_\infty)$ на вектор $\mathbf{i}_v(-\xi, \eta_1)$.

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (3.1) в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_D \cos \alpha &= -v_\infty \cos \xi, \\ v_D \sin \alpha \cos \beta_1 &= l\Omega_3 + v_\infty \sin \xi \cos \eta_1, \\ v_D \sin \alpha \sin \beta_1 &= -l\Omega_2 + v_\infty \sin \xi \sin \eta_1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

4. Вторая группа кинематических уравнений

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости $\tilde{\Omega}$ и координаты ξ, η_1, ξ, η_1 фазового пространства (1.2) исследуемого маятника — касательного расслоения $T_*\mathbf{S}^2\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1; \xi, \eta_1\}$.

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n, n = 3$, сначала выражается набор, состоящий из фазовых переменных Ω_2, Ω_3 , через новые переменные z_1, z_2 (из набора z). Для этого производится следующий поворот на угол η_1 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} &= T_{1,2}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \\ T_{1,2}(\eta_1) &= \begin{pmatrix} \cos \eta_1 & -\sin \eta_1 \\ \sin \eta_1 & \cos \eta_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-\eta_1) \begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$z_1 = \Omega_2 \cos \eta_1 + \Omega_3 \sin \eta_1, \quad z_2 = -\Omega_2 \sin \eta_1 + \Omega_3 \cos \eta_1. \quad (4.2)$$

Затем вместо группы переменных z подставляется следующая зависимость:

$$z_2 = \dot{\xi}, \quad z_1 = -\dot{\eta}_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi}. \quad (4.3)$$

Таким образом, две группы уравнений (4.1) и (4.3) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$\Omega_2 = -\dot{\xi} \sin \eta_1 - \eta_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \cos \eta_1, \quad \Omega_3 = \dot{\xi} \cos \eta_1 - \eta_1 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta_1. \quad (4.4)$$

Видно, что три группы соотношений (2.4), (3.3), (4.4) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят следующие функции:

$$y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right), \quad z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v_D} \right), \quad s(\alpha). \quad (4.5)$$

При этом функция s считается зависимой лишь от α , а функции y_N, z_N могут зависеть, наряду с углами α, β_1 , вообще говоря, и от приведенной угловой скорости $\omega \cong l\Omega/v_D$.

5. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы

Параллельно рассматриваемой задаче о движении закрепленного тела, рассмотрим пространственное движение свободного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (круговым диском \mathcal{D}) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [3, 4] с той же моделью воздействия среды (рис. 2).

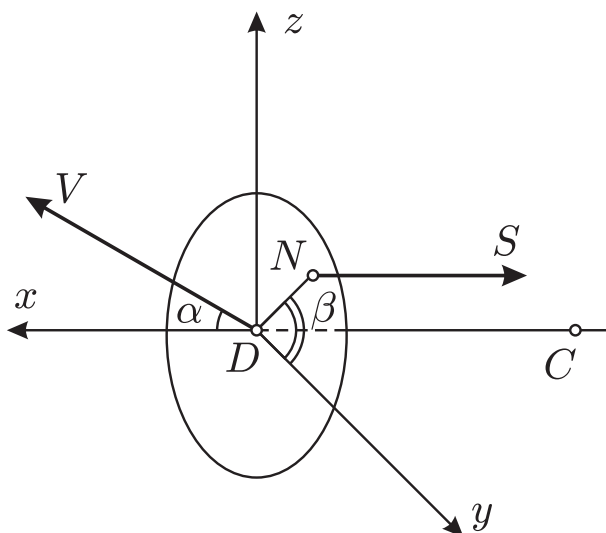


Рис. 2. Пространственное движение свободного динамически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде

Если (v, α, β_1) — сферические координаты вектора скорости центра D диска \mathcal{D} , лежащего на оси симметрии тела, $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — проекции его угловой скорости на оси системы координат $Dx_1x_2x_3$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью $Dx_1 = Dx$ (C — центр масс, рис. 2), а оси $Dx_2 = Dy, Dx_3 = Dz$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, m$ — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела,

при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \Omega_3 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) &= \frac{F_x}{m}, \\
\dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_3 v \cos \alpha - \\
-\Omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \sigma \Omega_1 \Omega_2 - \sigma \dot{\Omega}_3 &= 0, \\
\dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \Omega_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\
-\Omega_2 v \cos \alpha - \sigma \Omega_1 \Omega_3 + \sigma \dot{\Omega}_2 &= 0, \\
I_1 \dot{\Omega}_1 &= 0, \\
I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_3 &= -z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \\
I_2 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 &= y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$F_x = -S$, $S = s(\alpha)v^2$, $\sigma = CD$, при этом

$$\left(0, y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right), z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \right)$$

— координаты точки N приложения силы \mathbf{S} в системе координат $Dx_1x_2x_3 = Dxyz$, связанной с телом (рис. 2, на котором $\beta = \beta_1$).

Первые три уравнения системы (5.1) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве \mathbf{E}^3 в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3$. Вторые же три уравнения системы (5.1) получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом, фазовым пространством системы динамических уравнений (5.1) шестого порядка является прямое произведение $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^2 \times \text{so}(3)$ трехмерного многообразия на алгебру Ли $\text{so}(3)$. При этом, поскольку сила воздействия среды не зависит от положения тела в пространстве, система динамических уравнений (5.1) *отделяется от системы кинематических уравнений* и может быть рассмотрена самостоятельно (см. также [4, 5]).

5.1. Циклический первый интеграл

Сразу же заметим, что система (5.1), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = I_3, \tag{5.2}$$

обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \text{const}. \tag{5.3}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \tag{5.4}$$

5.2. Неинтегрируемая связь

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [6, 7])

$$v \equiv \text{const}, \tag{5.5}$$

то в системе (5.1) вместо F_x будет стоять величина $T - s(\alpha)v^2$.

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (5.5) [7, 8]. Действительно, формально выражая величину T в силу системы (5.1), получим при $\cos \alpha \neq 0$:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = m\sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma \sin \alpha}{I_2 \cos \alpha} \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right] \right]. \quad (5.6)$$

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (5.5). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (5.1) в результате действий порождает независимую систему четвертого порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_3 v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega}_3 &= 0, \\ \dot{\alpha}v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \Omega_2 v \cos \alpha + \sigma \dot{\Omega}_2 &= 0, \\ I_2 \dot{\Omega}_2 &= -z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\ I_2 \dot{\Omega}_3 &= y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v .

Система (5.7) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}v \cos \alpha + v \cos \alpha [\Omega_3 \cos \beta_1 - \Omega_2 \sin \beta_1] + \sigma [-\dot{\Omega}_3 \cos \beta_1 + \dot{\Omega}_2 \sin \beta_1] &= 0, \\ \dot{\beta}_1 v \sin \alpha - v \cos \alpha [\Omega_2 \cos \beta_1 + \Omega_3 \sin \beta_1] + \sigma [\dot{\Omega}_2 \cos \beta_1 + \dot{\Omega}_3 \sin \beta_1] &= 0, \\ \dot{\Omega}_2 &= -\frac{v^2}{I_2} z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\ \dot{\Omega}_3 &= \frac{v^2}{I_2} y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Введем новые квазискорости в системе:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} &= T_{1,2}(\beta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \\ T_{1,2}(\beta_1) &= \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Другими словами, справедливы соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-\beta_1) \begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$z_1 = \Omega_2 \cos \beta_1 + \Omega_3 \sin \beta_1, \quad z_2 = -\Omega_2 \sin \beta_1 + \Omega_3 \cos \beta_1. \quad (5.10)$$

Как видно из (5.8), на многообразии

$$O = \left\{ (\alpha, \beta_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbf{R}^4 : \alpha = \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbf{Z} \right\} \quad (5.11)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}_1$. Формально, таким образом, на многообразии (5.11) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при k четном неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат (v, α, β_1) , а при k нечетном происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (5.8) вырождается.

Из этого следует, что система (5.7) вне и только вне многообразия (5.11) эквивалентна системе

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -z_2 + \frac{\sigma v}{I_2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right], \\ \dot{z}_2 &= \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right] - \\ &- z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma v}{I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_1 \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right], \\ \dot{z}_1 &= z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \left[-\frac{v^2}{I_2} s(\alpha) + \frac{\sigma v}{I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} z_2 \right] \times \\ &\times \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right], \\ \dot{\beta}_1 &= z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma v}{I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right].\end{aligned}\quad (5.12)$$

Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, z_1/v, z_2/v)$ в силу (5.10).

Нарушение теоремы единственности для системы (5.8) на многообразии (5.11) при нечетном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (5.11) при нечетном k проходит неособая фазовая траектория системы (5.12), пересекая многообразие (5.11) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (5.5) необходимо выбрать значение T при $\cos \alpha \neq 0$ в виде (5.6).

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{\left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right] s(\alpha)}{\cos \alpha} = L \left(\beta_1, \frac{\Omega}{v} \right).$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 + y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 \right] s(\alpha) \right) \right| < +\infty.$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \Omega \right) = m\sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - \frac{m\sigma Lv^2}{I_2}. \quad (5.13)$$

где значения Ω_2, Ω_3 — произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W евклидова пространства \mathbf{E}^3 , необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \Omega \right) = \frac{mv^2}{R_0}, \quad (5.14)$$

где R_0 — расстояние CW .

Равенства (5.13) и (5.14) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (5.11), что и доказывает сделанное замечание.

5.3. Постоянная скорость центра масс

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [9, 10])

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const} \quad (5.15)$$

(\mathbf{V}_C — скорость центра масс), то в системе (5.1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (5.16)$$

Случай (5.16) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы четвертого порядка после некоторого преобразования системы (5.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = \sum_{i,j=0, i \leq j}^3 \tau_{i,j} \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega_i \Omega_j = T_1 \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \Omega_0 = v. \quad (5.17)$$

Введем для начала новые квазискорости (5.9)–(5.10).

Систему (5.1) в случаях (5.2)–(5.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \dot{v} + \sigma(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \\ & - \sigma \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \sin \alpha \left[y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = \\ & = \frac{T_1 \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha)v^2}{m} \cos \alpha, \\ & \dot{\alpha} v + z_2 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2) \sin \alpha - \\ & - \sigma \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \cos \alpha \left[y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = \\ & = \frac{s(\alpha)v^2 - T_1 \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \\ & \dot{\Omega}_3 = \frac{v^2}{I_2} y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad \dot{\Omega}_2 = -\frac{v^2}{I_2} z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\ & \dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_1 \cos \alpha - \\ & - \frac{\sigma v}{I_2} s(\alpha) \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам $z_k = n_1 v Z_k$, $k = 1, 2$, $\langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle$, $n_1 > 0$, $n_1 = \text{const}$, система (5.18) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \\ & + \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] - \\ & - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= \frac{s(\alpha)}{I_2 n_1^2} [1 - \sigma n_1 Z_2 \sin \alpha] [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] - \\ & - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \end{aligned}$$

$$-\frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] -$$

$$-Z_2 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \quad (5.21)$$

$$Z_1' = \frac{1}{I_2 n_1^2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [\sigma n_1 Z_2 \sin \alpha - 1] [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] +$$

$$+ Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha -$$

$$-\frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 s(\alpha) \sin \alpha [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1 + y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1] -$$

$$-Z_1 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \quad (5.22)$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} +$$

$$+\frac{\sigma}{I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1], \quad (5.23)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha +$$

$$+\frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] +$$

$$+\frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha.$$

Видно, что в системе пятого порядка (5.19)–(5.23) может быть выделена независимая подсистема четвертого порядка (5.20)–(5.23), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем четырехмерном фазовом пространстве.

В частности, при выполнении условия (5.16) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы четвертого порядка также возможен.

6. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Выберем функцию \mathbf{r}_N в следующем виде (диск \mathcal{D} задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ x_{3N} \end{pmatrix} = R(\alpha) \mathbf{i}_N, \quad \mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1 \right) \quad (6.1)$$

(см. (3.2)).

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выполнены равенства

$$x_{2N} = R(\alpha) \cos \beta_1, \quad x_{3N} = R(\alpha) \sin \beta_1,$$

убеждающие нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, β_1).

Итак, для построения силового поля используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [11, 12], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B > 0. \quad (6.2)$$

6.1. Приведенные системы

Теорема 6.1 Совместные уравнения (2.1), (3.3), (4.4) при выполнении условий (2.1)–(2.3), (6.1), (6.2) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (1.2) двумерной сферы (1.1).

Действительно, если ввести безразмерные параметр и дифференцирование:

$$b_* = ln_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v_\infty \langle ' \rangle, \quad (6.3)$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi'' + b_* \xi' \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - \eta_1^2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} &= 0, \\ \eta_1'' + b_* \eta_1' \cos \xi + \xi' \eta_1' \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} &= 0, \quad b_* > 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Фазовый портрет системы (6.4) ($\xi \leftrightarrow \theta$, $\eta_1 \leftrightarrow \psi$) изображен на рис. 3.

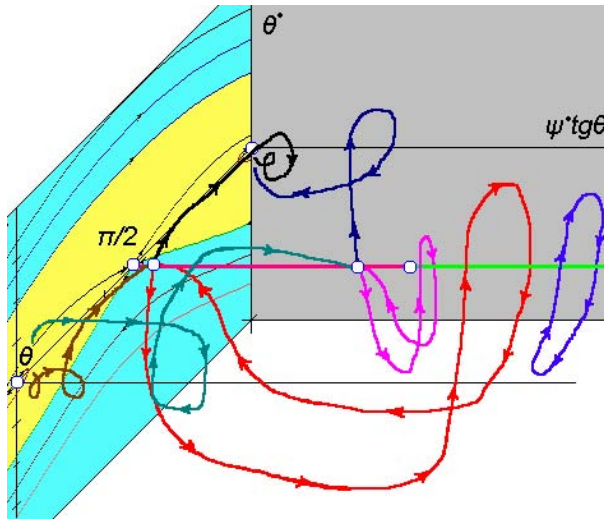


Рис. 3. Фазовый портрет закрепленного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды

После же перехода от переменных z (о переменных z см. (4.3)) к переменным w

$$w_2 = -\frac{1}{n_0 v_\infty} z_2 - b_* \sin \xi, \quad w_1 = -\frac{1}{n_0 v_\infty} z_1, \quad (6.5)$$

система (6.4) будет эквивалентна системе

$$\xi' = -w_2 - b_* \sin \xi, \quad w_2' = \sin \xi \cos \xi - w_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad w_1' = w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (6.6)$$

$$\eta_1' = w_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (6.7)$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^2\{(w_2, w_1; \xi, \eta_1) \in \mathbf{R}^4 : 0 \leq \xi \leq \pi, \eta_1 \bmod 2\pi\}$$

двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{(\xi, \eta_1) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq \xi \leq \pi, \eta_1 \bmod 2\pi\}$.

Видно, что в системе четвертого порядка (6.6), (6.7) по причине цикличности переменной η_1 выделяется независимая подсистема третьего порядка (6.6), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии.

6.2. Общие замечания об интегрируемости системы

Для полного интегрирования системы (6.6), (6.7) четвертого порядка необходимо знать, вообще говоря, три независимых первых интеграла.

6.2.1. Система при отсутствии силового поля

Рассмотрим систему (6.6), (6.7) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{w_2, w_1; \xi, \eta_1\}$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\xi, \eta_1\}$. При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.3) тождественно равна нулю (в частности, $b_* = 0$, а также коэффициент $\sin \xi \cos \xi$ во втором уравнении системы (6.6) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = -w_2, \quad (6.8)$$

$$w_2' = -w_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (6.9)$$

$$w_1' = w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (6.10)$$

$$\eta_1' = w_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}. \quad (6.11)$$

Система (6.8)–(6.11) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 6..2 Система (6.8)–(6.11) обладает тремя независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = C_1 = \text{const}, \quad (6.12)$$

$$\Phi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = w_1 \sin \xi = C_2 = \text{const}, \quad (6.13)$$

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_3 = \text{const}. \quad (6.14)$$

Два первых интеграла (6.12), (6.13) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются две (вообще говоря, ненулевые) компоненты угловой скорости трехмерного твердого тела, а именно:

$$\Omega_2 \equiv \Omega_2^0 = \text{const}, \quad \Omega_3 \equiv \Omega_3^0 = \text{const}.$$

В частности, наличие первого интеграла (6.12) объясняется равенством

$$w_1^2 + w_2^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2} [\Omega_2^2 + \Omega_3^2] \equiv C_1^2 = \text{const}.$$

Третий первый интеграл (6.14) имеет кинематический смысл, “привязывает” уравнение на η_1 и может быть найден из следующей квадратуры: $dw_1/d\eta_1 = w_2$, при этом если воспользоваться уровнем первого интеграла (6.12)

$$\int d\eta_1 = \pm \int \frac{dw_1}{\sqrt{C_1^2 - w_1^2}},$$

то искомое равенство примет вид

$$\eta_1 + C_3 = \pm \arcsin \frac{w_1}{C_1} = \pm \arcsin \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}},$$

откуда

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \eta_1 \mp \arcsin \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} = C_3. \quad (6.15)$$

Теперь перефразируем теорему 6..2.

Теорема 6..3 Система (6.8)–(6.11) обладает тремя независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Psi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{w_1^2 + w_2^2}{w_1 \sin \xi} = C'_1 = \text{const}, \quad (6.16)$$

$$\Psi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C'_2 = \text{const}, \quad (6.17)$$

$$\Psi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C'_3 = \text{const}. \quad (6.18)$$

Первый интеграл (6.18) также имеет кинематический смысл и “привязывает” уравнение на η_1 , а функции Ψ_2, Ψ_3 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_3 .

В формулировке теоремы 6..3 (в отличие от теоремы 6..2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (6.16)–(6.18) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6..3 преобразованный набор первых интегралов (6.16)–(6.18) системы (6.8)–(6.11) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

6.2.2. Система при наличии консервативного силового поля

Теперь рассмотрим систему (6.6), (6.7) при условии $b_* = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin \xi \cos \xi$ во втором уравнении системы (6.6) (в отличие от системы (6.8)–(6.11)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -w_2, \quad (6.19)$$

$$w_2' = \sin \xi \cos \xi - w_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (6.20)$$

$$w_1' = w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad (6.21)$$

$$\eta_1' = w_1 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}. \quad (6.22)$$

Итак, система (6.19)–(6.22) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 6..4 Система (6.19)–(6.22) обладает тремя независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:

$$\Phi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = w_1^2 + w_2^2 + \sin^2 \xi = C_1 = \text{const}, \quad (6.23)$$

$$\Phi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = w_1 \sin \xi = C_2 = \text{const}, \quad (6.24)$$

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_3 = \text{const}. \quad (6.25)$$

Первый интеграл (6.23) является интегралом полной энергии. Первый интеграл (6.25) имеет кинематический смысл, “привязывает” уравнение на η_1 и может быть найден аналогичным образом.

Действительно, искомый интеграл может быть найден из следующей квадратуры: $dw_1/d\eta_1 = w_2$, при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (6.23), (6.24)

$$\int d\eta_1 = \pm \int \frac{dw_1}{\sqrt{C_1^2 - w_1^2 - C_2^2/w_1^2}},$$

то искомое равенство примет вид

$$\eta_1 + C_3 = \pm \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{4w_1^2 - 2C_1^2}{C_1^4 - 4C_2^2}}, \quad C_1^2 > 2|C_2|,$$

откуда

$$\Phi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \eta_1 \mp \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{4w_1^2 - 2C_1^2}{C_1^4 - 4C_2^2}} = C_3, \quad C_1^2 > 2|C_2|, \quad (6.26)$$

где вместо C_1, C_2 необходимо подставить левые части равенств (6.23), (6.24).

Теперь перефразируем теорему 6.4.

Теорема 6..5 Система (6.19)–(6.22) обладает тремя независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\Psi_1(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{w_1^2 + w_2^2 + \sin^2 \xi}{w_1 \sin \xi} = C_1' = const, \quad (6.27)$$

$$\Psi_2(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_2' = const, \quad (6.28)$$

$$\Psi_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = C_3' = const. \quad (6.29)$$

Функции Ψ_2, Ψ_3 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_3 .

В формулировке теоремы 6.5 (в отличие от теоремы 6.4) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (6.27)–(6.29) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 6.5 преобразованный набор первых интегралов (6.27)–(6.29) системы (6.19)–(6.22) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

6.3. Полный список первых интегралов

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы четвертого порядка (6.6), (6.7) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (6.6) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_2}{d\xi} = \frac{\sin \xi \cos \xi - w_1^2 \cos \xi / \sin \xi}{-w_2 - b_* \sin \xi}, \quad \frac{dw_1}{d\xi} = \frac{w_1 w_2 \cos \xi / \sin \xi}{-w_2 - b_* \sin \xi}. \quad (6.30)$$

Используя замену $\tau = \sin \xi$, перепишем систему (6.30) в алгебраическом виде

$$\frac{dw_2}{d\tau} = \frac{\tau - w_1^2/\tau}{-w_2 - b_*\tau}, \quad \frac{dw_1}{d\tau} = \frac{w_1 w_2/\tau}{-w_2 - b_*\tau}. \quad (6.31)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам $w_k = u_k \tau$, $k = 1, 2$, приводим систему (6.31) к следующему виду:

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 - b_*}, \quad \tau \frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 - b_*}. \quad (6.32)$$

Сопоставим системе второго порядка (6.32) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 + b_*u_2}{2u_1u_2 + b_*u_1}, \quad (6.33)$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d \left(\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_*u_2 + 1}{u_1} \right) = 0.$$

Итак, уравнение (6.33) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_*u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (6.34)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_2, w_1; \xi) = \frac{w_2^2 + w_1^2 + b_*w_2 \sin \xi + \sin^2 \xi}{w_1 \sin \xi} = C_1 = \text{const}. \quad (6.35)$$

Замечание 6.1 Рассмотрим систему (6.6) с переменной диссипацией с нулевым средним [13, 14], становящейся консервативной при $b_* = 0$:

$$\xi' = -w_2, \quad w_2' = \sin \xi \cos \xi - w_1^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \quad w_1' = w_1 w_2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}. \quad (6.36)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_2^2 + w_1^2 + \sin^2 \xi = C_1^* = \text{const}, \quad (6.37)$$

$$w_1 \sin \xi = C_2^* = \text{const}. \quad (6.38)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (6.37), (6.38) также является первым интегралом системы (6.36). Но при $b_* \neq 0$ каждая из функций

$$w_2^2 + w_1^2 + b_*w_2 \sin \xi + \sin^2 \xi \quad (6.39)$$

и (6.38) по отдельности не является первым интегралом системы (6.6). Однако отношение функций (6.39), (6.38) является первым интегралом системы (6.6) при любом b_* .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.6). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (6.34) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_*}{2} \right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{b_*^2 + C_1^2}{4} - 1. \quad (6.40)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_*^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (6.41)$$

и фазовое пространство системы (6.6) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (6.40).

Таким образом, в силу соотношения (6.34) первое уравнение системы (6.32) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + b_* u_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 - b_*},$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + b_* u_2 + 1)}\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (6.41).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (6.6) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(-b_* - u_2) du_2}{2(1 + b_* u_2 + u_2^2) - C_1 \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + b_* u_2 + 1)}\}/2}. \quad (6.42)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln |\sin \xi|$. Если

$$u_2 + \frac{b_*}{2} = r_1, \quad b_1^2 = b_*^2 + C_1^2 - 4,$$

то правая часть равенства (6.42) примет вид

$$-\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b_* \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b_*}{2} I_1,$$

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \quad (6.43)$$

При вычислении интеграла (6.43) возможны три случая.

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \text{const.} \quad (6.44)$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b_*^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (6.45)$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const.} \quad (6.46)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_2}{\sin \xi} + \frac{b_*}{2}, \quad (6.47)$$

имеем окончательный вид для величины I_1 :

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b_*^2 - 4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2 \pm C_1}} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \text{const.} \quad (6.48)$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b_*^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (6.49)$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const.} \quad (6.50)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (6.6) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 6.2 В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (6.34).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\Theta_2(w_2, w_1; \xi) = G \left(\sin \xi, \frac{w_2}{\sin \xi}, \frac{w_1}{\sin \xi} \right) = C_2 = \text{const.} \quad (6.51)$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (6.6), (6.7) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, “привязывающий” уравнение (6.7).

Поскольку

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{u_1(2u_2 + b_*)}{(-b_* - u_2)\tau}, \quad \frac{d\eta_1}{d\tau} = \frac{u_1}{(-b_* - u_2)\tau},$$

то $du_1/d\eta_1 = 2u_2 + b_*$. Очевидно, что при $u_1 \neq 0$ выполнено равенство

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(-b_* \pm \sqrt{b_1^2 - 4 \left(u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2} \right), \quad b_1^2 = b_*^2 + C_1^2 - 4,$$

тогда интегрирование следующей квадратуры:

$$\eta_1 + \text{const} = \pm \int \frac{du_1}{\sqrt{b_1^2 - 4 \left(u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2}}$$

приведет к инвариантному соотношению

$$2(\eta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b_*^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \text{const.}$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\eta_1 + C_3)] = \pm \frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b_*^2 + C_1^2 - 4}}$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\eta_1 + C_3)] = \pm \frac{2w_1 - C_1 \sin \xi}{\sqrt{b_*^2 + C_1^2 - 4} \sin \xi}.$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, “привязывающего” уравнение (6.7), на последнем равенстве можно остановиться,

добавив к этому то, что в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (6.34).

Но мы проведем некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (6.34)):

$$\operatorname{tg}^2[2(\eta_1 + C_3)] = \frac{(u_1^2 - u_2^2 - b_* u_2 - 1)^2}{u_1^2(4u_2^2 + 4b_* u_2 + b_*^2)}.$$

Возвращаясь к старым координатам, получим дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\operatorname{tg}^2[2(\eta_1 + C_3)] = \frac{(w_1^2 - w_2^2 - b_* w_2 \sin \xi - \sin^2 \xi)^2}{w_1^2(4w_2^2 + 4b_* w_2 \sin \xi + b_*^2 \sin^2 \xi)},$$

или окончательно

$$\Theta_3(w_2, w_1; \xi, \eta_1) = -\eta_1 \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{w_1^2 - w_2^2 - b_* w_2 \sin \xi - \sin^2 \xi}{w_1(2w_2 + b_* \sin \xi)} = C_3 = \operatorname{const}. \quad (6.52)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (6.6), (6.7) имеет три первых интеграла, выражающихся соотношениями (6.35), (6.51), (6.52) (при этом используются выражения (6.47)–(6.50)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 6..6 Три группы соотношений (2.1), (3.3), (4.4) при условиях (2.1)–(2.3), (6.1), (6.2) обладают тремя первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.

6.4. Топологические аналогии

Предъявим далее две группы аналогий, связанных с системой (5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (5.5). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.12).

При выполнении условий (6.1), (6.2) система (5.12) примет вид

$$\alpha' = -w_2 + b \sin \alpha, \quad w_2' = \sin \alpha \cos \alpha - w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad w_1' = w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.53)$$

$$\beta_1' = w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.54)$$

если ввести безразмерные параметр, переменные и дифференцирование по аналогии с (6.3):

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad z_k = n_0 v w_k, \quad k = 1, 2, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle. \quad (6.55)$$

Теорема 6..7 Система (6.53), (6.54) (для свободного тела) эквивалентна системе (6.6), (6.7) (для закрепленного маятника).

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \quad \eta_1 = \beta_1, \quad b_* = -b. \quad (6.56)$$

Следствие 6..1 1. Угол атаки α и угол скольжения β_1 для свободного тела (рис. 2) эквивалентны соответственно углам отклонения $\xi = \theta$ и $\eta_1 = \psi$ закрепленного маятника (рис. 1).

2. Расстояние $\sigma = CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l = OD$ закрепленного маятника.

3. Первые интегралы системы (6.53), (6.54) могут быть автоматически получены через равенства (6.35), (6.51), (6.52) после подстановок (6.56) (см. также [12, 15]):

$$\Theta'_1(w_2, w_1; \alpha) = \frac{w_2^2 + w_1^2 - bw_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (6.57)$$

$$\Theta'_2(w_2, w_1; \alpha) = G\left(\sin \alpha, \frac{w_2}{\sin \alpha}, \frac{w_1}{\sin \alpha}\right) = C_2 = \text{const.} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} & \Theta'_3(w_2, w_1; \alpha, \beta_1) = \\ & = -\beta_1 \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{w_1^2 - w_2^2 + bw_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{w_1(2w_2 - b \sin \alpha)} = C_3 = \text{const.} \end{aligned} \quad (6.59)$$

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство (5.15). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.19)–(5.23).

Тогда, в силу условий (5.15), (6.1), (6.2), (6.55) ($w_k \leftrightarrow Z_k$) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5.20)–(5.23)) примет вид аналитической системы

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ Z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ Z_1' &= Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ \beta_1' &= Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.61)$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом: $n_1 = n_0$.

Если вопрос о первых интегралах системы (6.53), (6.54) решается с помощью следствия 6.1, то аналогичный вопрос для системы (6.60), (6.61) решает следующая теорема 6.8.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (6.60), (6.61) имеет следующий вид:

$$\Theta''_1(Z_2, Z_1; \alpha) = \frac{Z_2^2 + Z_1^2 - bZ_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{Z_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const.} \quad (6.62)$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (6.60), используя при этом первый интеграл (6.62). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные:

$$\tau = \sin \alpha, \quad Z_k = u_k \tau, \quad k = 1, 2, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (6.63)$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad (6.64)$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)} \right\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия $b^2 + C_1^2 - 4 \geq 0$.

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (6.64) зависит от произвольной постоянной C_2 . Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (6.64), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1] \exp \left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}} \right], \quad C = \text{const.}$$

Тогда искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\Theta_2''(Z_2, Z_1; \alpha) = G \left(\sin \alpha, \frac{Z_2}{\sin \alpha}, \frac{Z_1}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}, \quad (6.65)$$

используя при этом обозначения и замены (6.63).

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (6.60), (6.61) найдены два независимых первых интеграла. Для полной же ее интегрируемости достаточно предъявить один (дополнительный) первый интеграл, “привязывающий” уравнение (6.61). Искомый первый интеграл может быть получен из

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2Z_1 - C_1 \sin \alpha}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4 \sin \alpha}}.$$

В принципе, с целью получения дополнительного инвариантного соотношения, “привязывающего” уравнение (6.61), на последнем равенстве можно остановиться, добавив к этому то, что в нем необходимо формально вместо C_1 подставить левую часть (6.62). Но, проводя некоторые преобразования, получим окончательный вид дополнительного первого интеграла:

$$\Theta_3''(Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1) = -\beta_1 \pm \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{Z_1^2 - Z_2^2 + bZ_2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{Z_1(2Z_2 - b \sin \alpha)} = C_3 = \text{const}. \quad (6.66)$$

Теорема 6..8 Три первых интеграла (6.62), (6.65), (6.66) системы (6.60), (6.61) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 6..9 Три первых интеграла (6.62), (6.65), (6.66) системы (6.60), (6.61) эквивалентны трем первым интегралам (6.57), (6.58), (6.59) системы (6.53), (6.54).

Действительно, пары первых интегралов (6.62), (6.57) и (6.66), (6.59) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные Z_k , $k = 1, 2$, для системы (6.60), (6.61) с фазовыми переменными w_k , $k = 1, 2$, для системы (6.53), (6.54). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (6.65), (6.58), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Заключение

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше. (1) Движение закрепленного на сфе-

рическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил). (2) Пространственное движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи). (3) Пространственное сложное движение твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [9, 10].

Литература

- [1] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на плоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10(132). С. 91–113.
- [2] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // Journal of Mathematical Sciences. 2003. Vol. 114. № 1. P. 919–975.
- [3] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер.: "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". Т. 125. "Динамические системы". 2013. С. 5–254.
- [4] Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1(110). С. 35–41.
- [5] Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН, 1996. Т. 349. № 2. С. 193–197.
- [6] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.
- [7] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
- [8] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
- [9] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
- [10] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд-во "Экзамен", 2007. 352 с.
- [11] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // Journal of Mathematical Sciences. 2004. Vol. 122. № 1. P. 2841–2915.
- [12] Шамолин М.В. Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии его со средой // Прикл. механика. 2007. Т. 43. № 10. С. 49–67.
- [13] Шамолин М.В. Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Прикл. мат. и мех. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 273–287.
- [14] Шамолин М.В. Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 3. С. 43–49.

- [15] Шамолин М.В. Об устойчивости прямолинейного поступательного движения // Прикл. механика. 2009. Т. 45. № 6. С. 125–140.

References

- [1] Shamolin M.V. Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the plane, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Esiyestvennonauchnaya* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2015, no. 10(132), pp. 91–113. (in Russ.)
- [2] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium, *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, **114**, no. 1, pp. 919–975.
- [3] Shamolin M.V. Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field, *Itoyi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennaya matematika i ee prolodzeniya. Tematicheskie obzory* [Contemporary Mathematics and its Applications], **125**, Dynamical Systems, 2013, pp. 5–254. (in Russ.)
- [4] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. New case of integrability in dynamics of multi-dimensional body, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Esiyestvennonauchnaya* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2012, no. 9/1(110), pp. 35–41. (in Russ.)
- [5] Shamolin M.V., Variety of types of phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium, *Doklady RAN* [Physics Doklady], 1996, **349**, no. 2, pp. 193–197. (in Russ.)
- [6] Shamolin M.V., Dynamical Systems With Variable Dissipation: Approaches, Methods, and Applications, *Fund. Prikl. Mat.* [Journal of Mathematical Sciences], 2008, **14**, no. 3, pp. 3–237. (in Russ.)
- [7] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. Mathematical aspect in classical and celestial mechanics, M.: VINITI, 1985. 304 p. (in Russ.)
- [8] Trofimov V.V. Symplectic structures on symmetric spaces automorphisms groups, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mathematics Bulletin], 1984, no. 6, pp. 31–33. (in Russ.)
- [9] Trofimov V.V., Shamolin M.V. Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems, *Fund. Prikl. Mat.* [Journal of Mathematical Sciences], 2010, **16**, no. 4, pp.3–229. (in Russ.)
- [10] Shamolin M.V. Methods of analysis of various dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body, M.: Ekzamen, 2007. 352 pp. (in Russ.)
- [11] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body, *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, **122**, no. 1, pp. 2841–2915.
- [12] Shamolin M.V. Some model problems of dynamics for a rigid body interacting with a medium, *Prikl. Mekh.* [International Applied Mechanics], 2007, **43**, no. 10, pp. 49–67.
- [13] Shamolin M.V. New integrable cases in dynamics of a medium-interacting body with allowance for dependence of resistance force moment on angular velocity, *Prikl. Mat. Mekh.* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2008, **72**, no. 2, pp. 273–287.
- [14] Shamolin M.V. Integrability of some classes of dynamic systems in terms of elementary functions, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mechanics Bulletin], no. 3, pp. 43–49 (2008).
- [15] Shamolin M.V. Stability of a rigid body translating in a resisting medium, *Prikl. Mekh.* [International Applied Mechanics], 2009, **45**, no. 6, pp. 125–140.

*M. V. Shamolin*³**CASES OF INTEGRABILITY CORRESPONDING TO THE
PENDULUM MOTION IN THREE-DIMENSIONAL SPACE**

In this activity, we systemize some results on the study of the equations of spatial motion of dynamically symmetric fixed rigid bodies–pendulums located in a nonconservative force fields. The form of these equations is taken from the dynamics of real fixed rigid bodies placed in a homogeneous flow of a medium. In parallel, we study the problem of a spatial motion of a free rigid body also located in a similar force fields. Herewith, this free rigid body is influenced by a nonconservative tracing force; under action of this force, either the magnitude of the velocity of some characteristic point of the body remains constant, which means that the system possesses a nonintegrable servo constraint. The obtained results are systematized and served in the invariant form. We also show the nontrivial topological and mechanical analogies.

Key words: rigid body, resisting medium, dynamical system, three-dimensional phase pattern, case of integrability

Статья поступила в редакцию 18/V/2016.

The article received 18/V/2016.

³*Shamolin Maxim Vladimirovich* (ivanov@mail.ru), (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru),
Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation.