ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2016, том 471, № 5, с. 547–551

МЕХАНИКА

УДК 531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ К ДВУМЕРНОЙ И ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРАМ

© 2016 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 05.02.2016 г.
Поступило 17.02.2016 г.

Показана интегрируемость в элементарных функциях некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к сферам размерности 2 и 3. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним и обобщают ранее рассмотренные.

DOI: 10.7868/S0869565216350115

Во многих задачах многомерной динамики возникают механические системы с пространствами положений — сферами конечной размерности. Фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к сферам. Так, например, изучение пространственного (трехмерного) маятника на сферическом шарнире приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере. При этом динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [1].

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики n-мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле породили системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом исследование проводится начиная от систем при отсутствии силового поля и продолжается системами при наличии неконсервативных силовых полей [2, 3].

Построение неконсервативного силового поля, действующего на закрепленное многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных закрепленных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. Становятся возможными изучение уравнений движения для многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость в элементарных функциях некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к сферам размерности 2 и 3. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией с нулевым средним [1, 4] и обобщают ранее рассмотренные.

1. Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Рассмотрим системы вида

$$\alpha^{\bullet} = -z_2 + bg(\alpha), \quad z_2^{\bullet} = F(\alpha) - z_1^2 f(\alpha), \quad z_1^{\bullet} = z_1 z_2 f(\alpha), \tag{1}$$

$$\beta^{\bullet} = z_1 f(\alpha) \tag{2}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{(\alpha,\beta)\colon 0 \le \alpha \le \pi, \beta \bmod 2\pi\}$. Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b \ge 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — силовое поле. Первое уравнение системы (1) и уравнение (2) задают координаты z_2, z_1 в касательном пространстве к сфере (являются кинематическими соотношениями). При этом система (1) является независимой подсистемой третьего порядка (ввиду цикличности переменной β).

Система (1), (2) также может быть представлена в маятниковом виде

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
E-mail: shamolin@rambler.ru

$$\alpha^{\bullet\bullet} - b\alpha^{\bullet} g'(\alpha) + F(\alpha) - \beta^{\bullet 2}\frac{1}{f(\alpha)} = 0,$$

$$\beta^{\bullet\bullet} - b\beta^{\bullet} g(\alpha) f(\alpha) + \alpha^{\bullet}\beta^{\bullet}\left[\frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] = 0.$$

При $b = 0$ система (1), (2) является консервативной и обладает полным набором первых интегралов:

$$F_1(z_1, z_2, \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi) d\xi = C_1 = \mathrm{const},$$

$$F_2(z_1, \alpha) = z_1 \exp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi) d\xi = C_2 = \mathrm{const},$$

$$F_3(z_1, z_2, \alpha, \beta) = C_3 = \mathrm{const}.$$

При $b > 0$ система (1), (2) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [1].

Выделим два существенных случая для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{3}$$

а также

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha \sin\alpha}. \tag{4}$$

Случай (3) формирует класс систем, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [1, 2]. Случай (4) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на сфере также в неконсервативном поле сил. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (1), (2) описывает геодезический поток на двумерной сфере.

Замечание 1. В случае (3), если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система (1) описывает пространственное движение твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [4]. В частности, если

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin\alpha, \tag{5}$$

то система (1), (2) описывает также пространственный (сферический) маятник, помещенный в поток набегающей среды [1, 4], и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [5]. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы (1), (2) [6].

2. Случай (3). Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \sin^m\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin^a\alpha,$$
$$m = 2a - 1, \quad a, m \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (5).

Теорема 1. *В случае* (6) *система* (1), (2) *обладает полным набором* (*тремя*), *вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Следствие 1. *Система*

$$\alpha^{\bullet\bullet} - ab\alpha^{\bullet}\sin^{a-1}\alpha\cos\alpha +$$
$$+ \sin^{2a-1}\alpha\cos\alpha - \beta^{\bullet 2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0,$$
$$\beta^{\bullet\bullet} - b\beta^{\bullet}\sin^{a-1}\alpha\cos\alpha + \alpha^{\bullet}\beta^{\bullet}\left[\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}\right] = 0$$

обладает тремя трансцендентными первыми интегралами.

Действительно, если сделать замены переменных $\tau = \sin\alpha$, $z_i = u_i\tau^a$, $i = 1, 2$, то поиск одного из первых интегралов приведет к уравнению Абеля [7]

$$[(a+1)u_2 - ab]u_1 du_2 = [1 - u_1^2 + au_2^2 - abu_2]du_1, \tag{7}$$

общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается громоздко. Тогда дополнительный первый интеграла системы (1) находится из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{(b - u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + au_2^2 - abu_2}. \tag{8}$$

В свою очередь, первый интеграл, “привязывающий” уравнение (2), находим из равенства

$$\frac{dz_1}{d\beta} = z_2. \tag{9}$$

В частности, при $a = 1$ равенство (7) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{z_1}{\sin\alpha}, \frac{z_2}{\sin\alpha}\right) =$$
$$= \frac{z_2^2 + z_1^2 - bz_2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{z_1\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const},$$

и также можно найти два других Φ_2, Φ_3 (см. также [2, 4]).

3. Случай (4). Пусть выполнены следующие условия на силовое поле:

$$F(\alpha) = \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha}, \quad g(\alpha) = \frac{\sin^k\alpha}{\cos^k\alpha}, \quad k \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

Теорема 2. *В случае* (10) *система* (1), (2) *обладает полным набором* (*тремя*), *вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Следствие 2. *Система*

$$\alpha^{\bullet\bullet} - kb\alpha^{\bullet}\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha} - \beta^{\bullet 2}\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$
$$\beta^{\bullet\bullet} - b\beta^{\bullet}\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + 2\alpha^{\bullet}\beta^{\bullet}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0$$

обладает тремя трансцендентными первыми интегралами.

Действительно, если сделать замены переменных $\tau = \sin\alpha$, $z_i = u_i\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k$, $i = 1, 2$, то поиск одного из первых интегралов приведет к уравнению Абеля [7] (7) (только с подстановкой $a \leftrightarrow k$), общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается громоздко. Тогда дополнительный первый интеграла системы (1) находим из квадратуры

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \frac{(b-u_2)du_2}{1 - U_1^2(u_2) + ku_2^2 - kbu_2}. \tag{11}$$

В свою очередь, первый интеграл, “привязывающий” уравнение (2), найдем из равенства (9).

В частности, при $k = 1$ равенство (7) $(a \leftrightarrow k)$ влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{z_1\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{z_2\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{(z_2^2 + z_1^2)\cos^2\alpha - bz_2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha}{z_1\sin\alpha\cos\alpha} = C_1 = \mathrm{const},$$

а дополнительный первый интеграла системы (1) находится из равенства

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \frac{(b-u_2)du_2}{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 - bu_2 + u_2^2)}\}/2}$$

и имеет следующий структурный вид:

$$\Phi_2\left(\frac{z_1\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{z_2\cos\alpha}{\sin\alpha}, \sin\alpha\right) = C_2 = \mathrm{const}.$$

Далее, поскольку

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{(2u_2 - b)u_1}{(b-u_2)\tau(1-\tau^2)}, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{u_1}{(b-u_2)\tau(1-\tau^2)},$$

то $\frac{du_1}{d\beta} = 2u_2 - b$, откуда

$$2(\beta + C_3) = \pm\arcsin\frac{2u_1 - C_1}{\sqrt{b^2 + C_1^2 - 4}}, \quad C_3 = \mathrm{const},$$

поэтому первый интеграл, “привязывающий” уравнение (2), примет вид

$$2\beta \pm \mathrm{arctg}\frac{(z_1^2 - z_2^2)\cos^2\alpha + bz_2\cos\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha}{z_1\cos\alpha(2z_2\cos\alpha - b\sin\alpha)} = C_3 = \mathrm{const}.$$

4. Системы на касательном расслоении к трехмерной сфере. Рассмотрим системы вида

$$\begin{gathered} \alpha^{\bullet} = -z_3 + bg(\alpha), \quad z_3^{\bullet} = F(\alpha) - (z_1^2 + z_2^2)f(\alpha), \\ z_2^{\bullet} = z_2 z_3 f(\alpha) + z_1^2 f(\alpha)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ z_1^{\bullet} = z_1 z_3 f(\alpha) - z_1 z_2 f(\alpha)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1^{\bullet} = z_2 f(\alpha), \end{gathered} \tag{12}$$

$$\beta_2^{\bullet} = -z_1 f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1} \tag{13}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ к трехмерной сфере $\mathbf{S}^3\{(\alpha, \beta_1, \beta_2)\colon 0 \le \alpha, \beta_1 \le \pi, \beta_2 \bmod 2\pi\}$. Функции $F(\alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ – периодические, достаточно гладкие, за исключением, быть может, точек $\alpha = 0 \bmod \pi/2$, $b \ge 0$. Функция $f(\alpha)$ определяет метрику на сфере, а функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ – силовое поле. Первое и последнее уравнения системы (12) и уравнение (13) задают координаты z_3, z_2, z_1 в касательном пространстве к сфере (являются кинематическими соотношениями). При этом система (12) является независимой подсистемой пятого порядка (ввиду цикличности переменной β_2) (см. также [2, 4, 8]).

Система (12), (13) также может быть представлена в маятниковом виде

$$\begin{gathered} \alpha^{\bullet\bullet} - b\alpha^{\bullet}g'(\alpha) + F(\alpha) - \beta_1^{\bullet 2}\frac{1}{f(\alpha)} - \beta_2^{\bullet 2}\frac{\sin^2\beta_1}{f(\alpha)} = 0, \\ \beta_1^{\bullet\bullet} - b\beta_1^{\bullet}g(\alpha)f(\alpha) + \alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet}\left[\frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] - \\ - \beta_2^{\bullet 2}\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \\ \beta_2^{\bullet\bullet} - b\beta_2^{\bullet}g(\alpha)f(\alpha) + \alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet}\left[\frac{f^2(\alpha) - f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right] + \\ + 2\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0. \end{gathered}$$

Для полного интегрирования системы (12), (13) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}$$

система (12), (13) распадается следующим образом:

$$\alpha^\bullet = -z_3 + bg(\alpha), \quad z_3^\bullet = F(\alpha) - z^2 f(\alpha), \quad z^\bullet = zz_3 f(\alpha); \tag{14}$$

$$z_*^\bullet = (\pm) z\sqrt{1+z_*^2} f(\alpha)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \quad \beta_1^\bullet = (\pm)\frac{zz_*}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha); \tag{15}$$

$$\beta_2^\bullet = (\pm)\frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha)\frac{1}{\sin\beta_1}. \tag{16}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (14)–(16) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (14), один системы (15) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (16) (т.е. всего четыре).

При $b = 0$ система (12), (13) является консервативной и обладает полным набором первых интегралов:

$$F_1(z_1, z_2, z_3, \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_1 = \text{const},$$

$$F_2(z_1, z_2, \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\exp\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi = C_2 = \text{const},$$

$$F_3(z_1, \alpha, \beta_1) = z_1\exp\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi)d\xi \sin\beta_1 = C_3 = \text{const},$$

$$F_4(z_1, z_2, z_3, \alpha, \beta_1, \beta_2) = C_4 = \text{const}.$$

При $b > 0$ система (12), (13) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [1, 2, 4].

Выделим также два существенных случая (3) и (4) для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на сфере. Случай (3) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного четырехмерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил [8, 9]. Случай (4) формирует класс систем, соответствующих движению материальной точки на трехмерной сфере также в неконсервативном поле сил. В частности, при $g(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ система (12), (13) описывает геодезический поток на трехмерной сфере.

З а м е ч а н и е 2. В случае (3) если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система (12), (13) описывает движение четырехмерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [2]. В частности, если выполнены условия (5), то система (12), (13) описывает также четырехмерный (обобщенный сферический) маятник в неконсервативном поле и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 5].

5. С л у ч а й (3). Пусть выполнены условия (6) на силовое поле. В частности, при $m = a = 1$ получаем случай (5).

Т е о р е м а 3. *В случае* (6) *система* (12), (13) *обладает полным набором* (*четырьмя*), *вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

С л е д с т в и е 3. *Система*

$$\alpha^{\bullet\bullet} - ab\alpha^\bullet \sin^{a-1}\alpha\cos\alpha + \sin^{2a-1}\alpha\cos\alpha - \beta_1^{\bullet 2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \beta_2^{\bullet 2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1 = 0,$$

$$\beta_1^{\bullet\bullet} - b\beta_1^\bullet \sin^{a-1}\alpha\cos\alpha + \alpha^\bullet\beta_1^\bullet\left[\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}\right] - \beta_2^{\bullet 2}\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,$$

$$\beta_2^{\bullet\bullet} - b\beta_2^\bullet \sin^{a-1}\alpha\cos\alpha + \alpha^\bullet\beta_2^\bullet\left[\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}\right] + 2\beta_1^\bullet\beta_2^\bullet\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0$$

обладает четырьмя трансцендентными первыми интегралами.

Действительно, если сделать замены переменных $\tau = \sin\alpha$, $z = u_1\tau^a$, $z_3 = u_2\tau^a$, то поиск одного из первых интегралов приведет к уравнению Абеля (7), общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается громоздко. Тогда дополнительный первый интеграла системы (14) находим из квадратуры (8). В свою очередь, первый интеграл, "привязывающий" уравнение (2), найдется из равенства (9).

В частности, при $a = 1$ равенство (7) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{z}{\sin\alpha}, \frac{z_*}{\sin\alpha}\right) = \frac{z^2 + z_*^2 - bz\sin\alpha + \sin^2\alpha}{z_*\sin\alpha} = C_1 = \text{const},$$

и так же находятся три других Φ_2, Φ_3, Φ_4 (см. также [8, 9]).

6. С л у ч а й (4). Пусть выполнены условия (10) на силовое поле.

Т е о р е м а 4. *В случае* (10) *система* (12), (13) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *трансцендентных первых интегралов.*

Следствие 4. *Система*

$$\alpha^{\bullet\bullet} - kb\alpha^{\bullet}\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + \frac{\sin^{2k-1}\alpha}{\cos^{2k+1}\alpha} - \beta_1^{\bullet 2}\sin\alpha\cos\alpha -$$
$$- \beta_2^{\bullet 2}\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1 = 0,$$
$$\beta_1^{\bullet\bullet} - b\beta_1^{\bullet}\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + 2\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \beta_2^{\bullet 2}\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,$$
$$\beta_2^{\bullet\bullet} - b\beta_2^{\bullet}\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha} + 2\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0$$

обладает четырьмя трансцендентными первыми интегралами.

Действительно, если сделать замены переменных $\tau = \sin\alpha$, $z = u_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k$, $z_3 = u_2\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)^k$, то поиск одного из первых интегралов приведет к уравнению Абеля (7) (только с подстановкой $a \leftrightarrow k$), общее решение которого $u_1 = U_1(u_2)$ выписывается громоздко. Тогда дополнительный первый интеграл системы (14) находится из квадратуры (11). В свою очередь, первый интеграл, “привязывающий” уравнение (16), находим из равенства (9).

В частности, при $k = 1$ равенство (7) ($a \leftrightarrow k$) влечет существование первого интеграла

$$\Phi_1\left(\frac{z_3\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{z\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) =$$
$$= \frac{(z_3^2 + z^2)\cos^2\alpha - bz_3\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha}{z\sin\alpha\cos\alpha} =$$
$$= C_1 = \text{const},$$

а дополнительный первый интеграла системы (14) находится из равенства

$$\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)} =$$
$$= \frac{(b - u_2)du_2}{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1 - bu_2 + u_2^2)}\}/2}$$

и имеет следующий структурный вид:

$$\Phi_2\left(\frac{z_3\cos\alpha}{\sin\alpha}, \frac{z\cos\alpha}{\sin\alpha}, \sin\alpha\right) = C_2 = \text{const}.$$

Первый интеграл системы (15)

$$\Phi_3(z_*, \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \text{const}, \quad (17)$$

а первый интеграл, “привязывающий” уравнение (16) на угол β_2, запишем в виде

$$\Phi_4(z_*, \beta_1, \beta_2) =$$
$$= \operatorname{arctg}\frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2\sin^2\beta_1 - 1}} \pm \beta_2 = C_4 = \text{const},$$

полученном из уравнения $\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = -\frac{1}{z_*\sin\beta_1}$, используя (17).

7. В работах автора [2, 8, 9] уже рассматривались задачи о движении свободного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы, сводящиеся к динамическим системам на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам. Представленная работа присоединяет к данной задаче динамики твердого тела задачу о движении точки по сферам размерности 2 и 3 в неконсервативных силовых полях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15—01—00848-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 256 с.
2. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил. В сб.: Итоги науки и техники. Сер.: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2013. Т. 125. С. 5—254.
3. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // ДАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46—49.
4. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14. В. 3. С. 3—237.
5. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209—210.
6. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
8. *Шамолин М.В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343—346.
9. *Шамолин М.В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // ДАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338—342.