

## НЕЛОКАЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2016 г. Р. Р. АЙДАГУЛОВ, М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Рассматриваются общие вопросы моделирования в гидродинамике, приводящие к описанию явлений при помощи псевдодифференциальных уравнений. Обсуждаются уравнения механики сплошных сред, силы взаимодействия между молекулами, псевдодифференциальный вид уравнений движения, методы осреднения. Получены приложения при изучении вопросов диссипации, броуновского движения, а также в некоторых астрофизических проблемах.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Силы взаимодействия между молекулами . . . . .	145
2. Псевдодифференциальный вид уравнений механики сплошной среды . . . . .	148
3. Осреднение . . . . .	150
4. Плоскопараллельные, круговые, нестационарные движения и механизм диссипации . . . . .	154
5. Броуновское движение и вид операторов обмена . . . . .	158
6. Уравнения импульсов и энергии и характер решений . . . . .	161
7. Масштабируемость и некоторые приложения к астрофизике . . . . .	164
Список литературы . . . . .	168

## 1. СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ МОЛЕКУЛАМИ

Для получения осредненных уравнений мы прежде всего должны определиться в том, что считать элементарными (неделимыми) частицами. В реальности неделимыми могут быть большие образования молекул. Тем не менее, из-за их неделимости, нам удобнее их называть молекулами. В механике в качестве элементарных частиц принимаются молекулы, движение которых описываются уравнениями Ньютона:

$$m_k \frac{dv_k}{dt} = F_{\text{out } k} + \sum_l F_{kl}. \quad (1)$$

Здесь  $k, l$  — номера молекул,  $v_k$  — скорость и  $m_k$  — масса  $k$ -й молекулы,  $F_{\text{out } k}$  — внешняя сила, действующая на  $k$ -ю молекулу,  $F_{kl}$  — сила взаимодействия, действующая со стороны молекулы с номером  $l$  на молекулу с номером  $k$ . В силу другого закона Ньютона  $F_{kl} + F_{lk} = 0$  для всех  $k$  и  $l$ .

По поводу справедливости уравнений (1) возникают вопросы следующего характера: применимы ли уравнения Ньютона к молекулам; не требуется ли их квантомеханическое описание; не сказывается ли то, что мы пренебрегли внутренними степенями свободы движения атомов внутри молекул и, соответственно, пренебрегли зависимостью сил взаимодействия от внутренних степеней свободы? Авторы в данном случае считают, что все это на макроуровне сказывается не существенно. Сами значения макропараметров лучше не вычислять, исходя из микропараметров, а определять непосредственно из эксперимента.

Для дальнейшего требуется определить силы взаимодействия. Как известно, имеются четыре вида сил взаимодействия. Сильное и слабое взаимодействия присутствуют только в пределах атомного ядра, которое меньше размеров атома примерно на пять порядков. Из-за их экспоненциального убывания они на тысячи порядков меньше как силы гравитации, так и электромагнитных сил уже в атомных масштабах. Гравитационные силы между протонами меньше электромагнитных примерно на 36 порядков. Соответственно, в земных условиях они пренебрежимо малы для

включения в силы взаимодействия. Однако их часто надо учитывать при помощи внешних сил в коэффициентах  $F_{\text{out } k}$ . Так, примером несколько необычной среды, где они учитываются в качестве сил взаимодействия, является космическая среда в механике вселенной или галактического диска, где «молекулами» служат звезды (галактики). В обычных средах силами взаимодействия служат только электромагнитные силы взаимодействия между молекулами.

Надо заметить, что атомы и молекулы электрически нейтральны. Если считать, что атом или молекула состоит из точечного положительного заряда, окруженного сферическим симметричным облаком отрицательно заряженных электронов, то это приведет к парадоксу. Он заключается в том, что при взаимодействии заряженной сферы с внешним зарядом потенциал и сила взаимодействия совпадает с потенциалом и силой заряда, сосредоточенного в центре сферы. Учитывая нейтральность атомов, это приводит к отсутствию взаимодействия между атомами. Тем не менее, *именно электромагнитное взаимодействие между нейтральными молекулами определяет внутренние силы взаимодействия между молекулами, поверхностное натяжение и силы трения в среде.*

При расчете сил взаимодействия между атомами (молекулами) принимают среднюю величину силы взаимодействия между двумя пластинками-диполями, взятыми в различных ориентациях. Причиной принятия такого допущения является вышесказанное отсутствие взаимодействия между сферическими диполями. Однако это допущение более сомнительное, как в распределении точечного заряда атомного ядра по пластинке, так и в предположении равновероятности всех направлений ориентаций диполей. Последнее влияет очень существенно на вычисление. Именно из-за последнего получилось, что потенциал силы взаимодействия между молекулами убывает пропорционально шестой степени от расстояния. В соответствии с этим получены потенциалы взаимодействия Леннарда–Джонса и Букингема. Главной ошибкой здесь является то, что не учитывается подвижность электронов, деформация их орбит и быстрая корреляция их орбит при взаимодействии атомов. С учетом этих факторов силы взаимодействия должны убывать медленнее в зависимости от расстояния между взаимодействующими атомами. К тому же, с учетом движения электронов силы взаимодействуя не будут иметь характер потенциальных сил и будут зависеть от скорости сближения или удаления.

Попытаемся вычислить силу взаимодействия между нейтральными атомами, взяв в качестве силы взаимодействия не силу взаимодействия между двумя неподвижными диполями, а силу, получающуюся при неподвижности только точечных атомных зарядов. При этом будем считать, что отрицательные заряды вращаются по круговым орбитам радиуса  $r$  с согласованными фазами, когда расстояния между ними остаются постоянными  $R + 2\delta$ , где  $R$  — расстояние между атомными ядрами, а  $\delta$  — сдвиг центров орбит электронов относительно своих атомных ядер. Сила взаимодействия зависит также от ориентации плоскостей вращения. Мы предполагаем, что более устойчивая конфигурация та, когда плоскость вращения проходит через прямую, соединяющую центры ядер атомов. При этих предположениях ( $R + \delta > r$ ) сила притяжения между атомами будет равна

$$\frac{q^2}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{2(R + \delta - r \cos \theta)}{\left( (R + \delta)^2 + r^2 - 2r(R + \delta) \cos \theta \right)^{3/2}} - \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R + 2\delta)^2} \right) d\theta,$$

где  $q$  — заряд ядра. Данный интеграл вычисляется через эллиптические функции. Однако, понимая, что это приближенная модель, мы не будем выводить сложные формулы для него, а только рассмотрим асимптотику этого выражения при  $(|\delta| + r)/R \ll 1$ . При этих предположениях сила притяжения равна

$$\frac{3q^2(r^2 - 4\delta^2)}{2R^4} + O(R^{-5}).$$

Заметим, что при  $r = 2\delta$  сила притяжения начинается с члена, убывающего как пятая степень от расстояния. Однако вряд ли возможно такое большое смещение орбит электронов. Скорее,

при  $r/R \ll 1$  выполняется неравенство  $\delta/r \ll 1$ . В любом случае, можно константировать, что сила взаимодействия убывает пропорционально четвертой степени от расстояния; соответственно потенциал (если он есть) убывает пропорционально кубу от расстояния. Вычисленная сила имеет потенциал, однако осталось неучтенной сила взаимодействия между движущимися зарядами, которая не имеет потенциала и убывает примерно так же. По-видимому, в обычных ситуациях непотенциальная часть взаимодействия несколько меньше. Непотенциальная часть силы взаимодействия, связанная с силами Лоренца между движущимися зарядами, соответствует диссипативному излучению и мала по сравнению с потенциальной частью силы взаимодействия при обычных температурах. Она становится существенной для плазмы.

Из курса электродинамики известно, что между движущимися зарядами появляется дополнительная сила взаимодействия (сила Лоренца). Такая сила появится и в случае нейтральных диполей. Только для расчетов этой силы также надо исходить не из статической модели атома, а модели с орбитальным движением электронов. Из-за сложности выражения мы не будем приводить вычисление таких сил. Заметим только, что эти непотенциальные силы малы по отношению к силам взаимодействия и пропорциональны относительной скорости между молекулами. Из-за своей непотенциальности эти силы приводят к необратимости уравнений механики, т.е. механический процесс не может произойти в обратном порядке. Они приводят также к выводу, что при колебаниях среды, как и при распространении волн по ней, совершается определенная работа. Соответственно, волны диссипируют примерно пропорционально частоте из-за указанной пропорциональности относительной скорости непотенциальных сил.

Для ограниченных объемов среды засчет эффектов отражения на границе появляются резонансные частоты, соответствующие данному объему и его форме. Сами резонансные значения амплитуд, согласно вышесказанному, будут падать с увеличением частоты. Сам эффект резонансов обусловлен граничными условиями, а уравнения определяются характеристиками волн, распространяемых по среде. Такой факт, как затухание волн пропорционально частоте при умеренных частотах, существенно меньших частот колебаний атомов, измеряемых терагерцами или гигагерцами, также частично обусловлен эффектом Лоренцевых сил, а частично — броуновским движением. Соответственно, когда скорость волны не зависит от частоты, волна затухает в  $e$  раз на определенном количестве своей длины (практически независимо от частоты). Следствием этого явилось то, что уравнения сплошной среды, учитывающие диссипацию, не могут быть описаны удовлетворительным образом в рамках дифференциальных уравнений.

Действительно, рассмотрим распространение малых возмущений в среде (линеаризованная теория) с плоскими волнами (одномерная нестационарная задача). Тогда дифференцированию по  $x$  соответствует умножение на  $ik$  образов Фурье, а дифференцированию по времени — умножение на  $i\omega$ . Получаем систему линейных однородных уравнений относительно амплитуд, являющихся образами Фурье наших переменных. Эта система имеет нетривиальное решение только при равенстве нулю дискриминанта, что приводит к полиномиальному уравнению относительно скорости распространения волн

$$c = \frac{\omega}{k} = c(\omega).$$

Отсюда определяются допустимые скорости, как решение полиномиальных уравнений и, подставляя их в уравнения, получаются относительные амплитуды. Если в рамках дифференциальных уравнений не вводится трение, то получается, что

$$\text{Im}(c) = 0|_{\omega=0},$$

как следствие дифференцируемости функции и четности величины  $\text{Im}(c) = O(\omega^2)$ . Четность этой функции получается из того, что уравнения действительны, и для каждого решения типа волны имеется также решение типа сопряженная волна, т.е. волны получаются попарными, и характеристики волн, движущихся в положительном направлении, совпадают с характеристиками волн, движущихся обратно и соответствующим комплексно сопряженным решениям.

При введении трения (например, в качестве сухого трения) в рамках дифференциальных уравнений получается

$$\operatorname{Im}(c) = \text{const} + O(\omega), \quad \text{const} \neq 0.$$

Как было сказано выше, в экспериментах получается, что  $\operatorname{Im}(c) = \alpha\omega + O(\omega^2)$ . Так авторы столкнулись впервые с невозможностью введения трения в рамках дифференциальных уравнений, удовлетворительно описывающих экспериментальные факты в задаче о резонансах при нефтедобыче (двухфазная двухскоростная среда). И впоследствии убедились, что это имеет общий характер.

Выше мы показали, что силы взаимодействия убывают пропорционально четвертой степени от расстояния (а не седьмой). При этом конкретный их вид мы не знаем. К счастью при переходе к макромасштабу через осреднение движения всех молекул приходим к макроуравнениям, которые не зависят от конкретного вида сил в микромасштабе. Не известные нам силы взаимодействия, зависящие от многих внутренних степеней свободы взаимодействующих молекул, формируют определенные параметры макродвижения среды. При этом знание макропараметров не позволяют определить конкретный вид сил взаимодействия однозначно, так как они являются некоторыми интегральными величинами от них. Нам и не требуется определять конкретный вид сил взаимодействия. Вместо этого мы можем непосредственно определить значения макропараметров экспериментальным путем.

## 2. ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ВИД УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В классической механике значения неизвестных параметров считаются зависящими от времени (т.е. распределенными по времени), и определяющие уравнения сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений от переменного  $t$  — времени. Правда, и здесь иногда вводят возможность не мгновенного действия, а некоторой задержки по времени. Тогда уравнения строятся при помощи псевдодифференциальных операторов, учитывающих такую задержку.

В механике сплошных сред переменные  $\rho, \dots$  зависят как от времени, так и от местоположения. В случае, когда зависимость рассматривается от некоторого неизменного начального расположения  $\xi$  частей сплошной среды, которое непрерывно меняется со временем ( $x = x(\xi, t)$ ,  $x(\xi, t_0) = \xi$ ), такой подход, как известно, называется лагранжевым. Он полезен для рассмотрения фаз примесей (частиц в задачах газа с частицами), не имеющих своего давления. В этом случае траектории этой фазы являются характеристиками, и интегрирование вдоль характеристик приводит к улучшению точности расчетов, в особенности, в тех случаях, когда возможны большие увеличения концентрации такой фазы в одних местах и разрежение в других.

Для жидкостей, газа этот подход мало полезен, и переменные рассматриваются как функции от фиксированных пространственных координат  $\rho(t, x), \dots$  и времени. Такой подход, как известно, называется эйлеровым. В таком случае части сплошной среды непрерывно деформируются и проплывают мимо разных мест. Мы интересуемся не отдельными частицами, а значениями параметров тех частей, которые в данный момент времени  $t$  проплывают мимо данного места  $x$ , т.е. интересуемся функциями  $\rho(x, t), \dots$

В эйлеровом подходе задается система координат  $(x, t)$  и зависимость параметров от них  $\rho(x, t), \dots$ . Естественным является рассмотрение этих функций и в других координатах. В физике принимается принцип однородности пространства, заключающийся в том, что при трансляциях  $t' = t + t_0$ ,  $x' = x + x_0$  по времени и пространству уравнения сохраняют свой вид. Это означает, что операторы явно не зависят от времени и пространственных координат. При этом не исключается явная зависимость для внешних сил или граничных условий, которые можно отнести к управляемым параметрам (через задание или изменение которых можно воздействовать на среду), в отличие от внутренних параметров среды.

Какие могут быть дифференциальные операторы в уравнениях сплошной среды? Допустим, что такой оператор линеен. Однородность оператора означает, что он коммутирует с операторами сдвига  $f(x) \rightarrow f(x + h)$ . Здесь под  $x$  понимаются координаты в пространстве-времени

$(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_0 = t$ . Операторы сдвига выражаются через операторы дифференцирования так:

$$\exp\left(\sum_i h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(x) = f(x) + \sum_i h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{ij} \frac{h_i h_j \partial^2 f}{2! \partial x_i \partial x_j} + \dots = f(x + h).$$

Так как мнимые собственные значения и соответствующие им собственные функции образуют полную систему функций, любой оператор, коммутирующий с ними, выражается как функция от операторов сдвига или от операторов дифференцирования. Такие операторы называются псевдодифференциальными. В конечномерном пространстве  $X$  для любого линейного оператора  $A$ , выражаемого некоторой матрицей, можно вычислить оператор  $f(A)$  для любой непрерывной функции  $f$ , если оператор  $A$  имеет полную систему собственных функций в комплексифицированном пространстве. Тогда значение  $f(A)\rho$ ,  $\rho \in X$ , вычисляется разложением по собственным векторам (функциям)  $X_i$  оператора  $A$ :

$$f(A)\rho = \sum_i f(\lambda_i) \bar{\rho}_i X_i, \quad A(X_i) = \lambda_i X_i, \quad \rho = \sum_i \bar{\rho}_i X_i.$$

Аналогично определяется действие псевдодифференциального оператора, являющегося функцией от дифференциального оператора. Для этого вначале разлагаем функцию (вектор)  $\rho$  по собственным функциям  $\exp(i\xi_i x_i)$  дифференциального оператора, являющимся функциями — волнами. Разложению по собственным функциям оператора дифференцирования соответствует выражение функции через его образ Фурье:

$$\rho(x) = \int \bar{\rho}(\xi) \exp(i \sum_j \xi_j x_j) d\xi.$$

Соответственно, действие псевдодифференциального оператора на функцию  $\rho$  вычисляется по формуле

$$\phi(D)\rho(x) = \int \bar{\rho}(\xi) a(\xi) \exp(i \sum_j \xi_j x_j) d\xi.$$

Функция  $a(\xi)$  называется амплитудой псевдодифференциального оператора. Здесь некоторая особенность заключается в том, что амплитуду оператора рассматриваем как функцию от  $\xi$ , а не от  $i\xi$ , являющемся собственным значением оператора дифференцирования. Это принято для удобства, когда сопряженному оператору соответствует амплитуда оператора, полученная комплексным сопряжением. Аналогично определяются квазилинейные неоднородные псевдодифференциальные операторы, у которых амплитуда  $a(\xi) = a(\xi, x, \rho)$  зависит также от независимой переменной  $x$  и некоторой функции (возможно, многомерной  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots)$ ). При этом эти зависимости при вычислении оператора в приведенной формуле учитываются как «немые» параметры при интегрировании по  $\xi$ . В этом заключается свойство квазилинейности оператора для псевдодифференциальных операторов. Операторы, у которых амплитуда не зависит от независимых переменных  $x$ , называются однородными. Таким образом, физическому принципу однородности пространства соответствует условие однородности и квазилинейности системы псевдодифференциальных уравнений. Квазилинейность принимается из того, что имеется аддитивность решений при малых возмущениях.

Рассмотрим теперь принцип изотропности пространства и среды, означающей сохранение вида системы уравнений при переходе к другой системе координат, полученной некоторым поворотом относительно исходной. Принципу изотропности соответствует коммутируемость операторов с операторами поворота. Это выполняется только в случае, когда псевдодифференцирование по пространственным координатам выражается через оператор Лапласа, амплитуда которого  $-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$  не меняется при поворотах. При поворотах не меняется также вид оператора

$$\sum_j k_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

если  $k_j$  — вектор-функция, преобразующаяся как при поворотах, так как при поворотах сохраняются скалярные произведения.

В сплошной среде вектор-функциями являются скорости  $v$  фаз среды. Однако, операторы не должны менять своего вида и при переходе к другой инерциальной системе координат  $t' = t = x_0$ ,  $x'_i = x_i + u_i t$ , когда скорости преобразуются добавлением некоторой скорости  $u$ . В этом случае операторы  $v_i \partial / \partial x_i$  не сохраняют свой вид. Сохраняющими свой вид операторами остаются операторы полного дифференцирования вдоль мировых линий фаз среды:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_j v_{(i)}^j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Таким образом, система уравнений сплошной среды является системой псевдодифференциальных уравнений, операторы которой являются квазилинейными функциями от операторов  $D_i$  и оператора Лапласа  $\Delta$ .

В механике при создании новых моделей среды часто вводят новые константы перед некоторой функцией или ее производных. При этом такая модель работает хорошо при определенных режимах и перестает работать в других режимах. Как правило, такое поведение связано с неправильным выбором модели реологии из-за ограниченности исследователя моделями только из класса дифференциальных операторов. Если представить себе, что введенная постоянная не является постоянной, а зависит от режима (т.е. от  $\xi$ ), то экспериментально можно измерить функцию-амплитуду  $a(\xi)$ , ставшую теперь псевдодифференциальным оператором, а не постоянной величиной в модели. Случаю линейной функции  $a(\xi)$  соответствует линейная зависимость от функции и от ее производной, которому часто прибегают, создавая упрощенные модели, когда остаются в рамках дифференциальных уравнений. Ясно, что не всегда удастся аппроксимировать функцию линейной функцией в широком диапазоне режимов  $\xi$ . Более точный учет вида  $a(\xi)$  сводится к более точному учету реологии, как, например, в силе Бассе, соответствующей оператору половинного дифференцирования  $B \sqrt{d/dt}$  вдоль траектории.

Нахождение более точного вида псевдодифференциальных операторов в уравнениях механики сплошной среды очень важно для управления сплошной средой через внешние силы или через граничные условия. Управлять малыми усилиями удастся только создавая резонансы в среде. Неустойчивости и резонансы существенно зависят от правильного вида задания амплитуд соответствующих псевдодифференциальных операторов вблизи режимов этих резонансов. Именно с этой целью в дальнейшем выводятся уравнения, описывающие сплошную среду в более широком диапазоне режимов.

### 3. ОСРЕДНЕНИЕ

Движение множества молекул, описываемых уравнениями Ньютона, определяет движение среды в целом. Однако, такое детальное описание среды с одной стороны невозможно, с другой не нужно. Соответственно, в механике пользуются осредненными значениями для описания потока молекул. Под осреднением функции  $f(r')$  понимается другая функция  $\bar{f}(r)$ , получаемая определенным образом от исходной. Любой способ получения  $\bar{f}(r)$  соответствует некоторому оператору осреднения. Естественными требованиями к оператору осреднения  $C$  являются линейность и коммутативность с операторами сдвига  $T_a : f(r') \rightarrow f(r' - a)$ , т.е.

$$CT_a f(r') = T_a \bar{f}(r) = \bar{f}(r - a).$$

Эти требования определяют осреднение по Фридрихсу:

$$\bar{f}(r) = \int \Phi(r - r') f(r') dV,$$

как применение некоторого пространственного псевдодифференциального оператора, соответственно, коммутирующего с дифференцированием по пространству. Функция  $\Phi(r)$  при этом имеет вид функции пространственной реологии. Осреднение в [9] этим свойством не обладает только

из-за того, что вместо дифференцируемой функции  $\Phi(r)$  там берется кусочно постоянная (разрывная) функция

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1/V, & |r| \leq R_0, \\ 0, & |r| > R_0, \end{cases}$$

где  $V$  — объем шара радиуса  $R_0$ . Кроме этого, там приходится специально оговаривать совпадение величин, осредняемых по шару, с величинами, осредняемыми по границе — сфере.

Естественными являются также следующие требования:

- (1) монотонность: если  $f(r') \geq 0$ , то  $\bar{f}(r) \geq 0$ ;
- (2) нормированность: если  $f(r') \equiv A = \text{const}$ , то  $\bar{f}(r) \equiv A$ .

Из этих требований вытекает, что  $\Phi(r) \geq 0$  и  $\int \Phi(r) dV = 1$ . Однако этих условий еще не достаточно, поскольку таким требованиям могут удовлетворять и обобщенные функции, в частности, функция Дирака  $\Phi(r) = \delta(r)$ .

Обычно используется изотропное осреднение, коммутирующее с поворотами  $T : f(r') \rightarrow f(T^{-1}r')$ , т.е.  $T\bar{f}(r) = \bar{f}(r)$ .

Так как в качестве осредняемой функции  $f(r')$  мы допускаем и обобщенные функции, соответствующие дискретным (точечным) распределениям молекул в пространстве, в качестве  $\Phi(r)$  мы можем взять только обычную функцию. Для дифференцируемости осредненных функций необходимо, чтобы функция  $\Phi(r)$  была гладкой. Любая гладкая неотрицательная функция, интеграл от которой равен 1, определяет осреднение с требуемыми свойствами. При этом осреднение сохраняет интегралы от неотрицательных функций. Вообще же норма осредненной функции не больше нормы осредняемой функции (в пространстве  $L_1$ ).

Главное свойство осреднения состоит в сглаживании и забывании излишне подробной информации о распределении. Важно также, чтобы (второе) осреднение осредненной функции практически совпадало с ним. Точное совпадение повторного осреднения (как оператора) имеет место только в случае, когда  $\Phi(r)$  — дельта-функция Дирака. В этом случае осреднение является тождественным отображением, не меняющим исходную функцию распределения, и нам такое осреднение не подходит. Для любой осредняемой функции  $\Phi(r)$  в  $n$ -мерном пространстве функция  $\Phi(r/R)/R^n$  также является подходящей для осреднения функцией при любом масштабном множителе  $R > 0$ . Назовем такие осреднения подобными. Поэтому, поставленный вопрос о вторичном осреднении можно ставить так, чтобы двойное осреднение совпало с осреднением с помощью функции, соответствующей оператору исходного осреднения. Такое гладкое осреднение — единственное с точностью до подобия и соответствует гауссову осреднению:

$$f(r') \rightarrow \frac{1}{(R\sqrt{2\pi})^n} \int \exp\left(-\frac{(r-r')^2}{2R^2}\right) f(r') dV.$$

Непосредственным интегрированием получается, что гауссову осреднению вначале с масштабом  $R_1$ , потом с масштабом  $R_2$  соответствует гауссово осреднение с масштабом  $R_3 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$ ; в частности, двойному осреднению соответствует осреднение с  $\sqrt{2}$  раз увеличенным масштабом. По сути эта проверка является многомерным вариантом проверки того, что сумма двух нормально распределенных величин является нормально распределенной величиной, соответствующей сумме дисперсий. Заметим, что распределение Максвелла скоростей молекул также является нормальным распределением, являющимся единственным стационарным решением кинетических уравнений.

В связи с тем, что диффузионные потоки, изучаемые далее, распространяются изотропно по всем направлениям, рассмотрим также осреднение по сфере радиуса  $R$ :

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}R^{n-1}} \int_{|r-r'|=R} f(r') dS, \quad \omega_{n-1} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

В частности, осреднение по нульмерной сфере ( $n = 1$ ) сводится к следующему вычислению:

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x+R) + f(x-R)}{2}.$$

Символ этого оператора выражается через функции Бесселя:

$$P_v(Rk), \quad k = \sqrt{-\Delta}, \quad \Delta = -(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2), \quad v = \frac{n-2}{2}, \quad P_v(s) = 2^v \Gamma(v+1) s^{-v} J_v(s).$$

Здесь  $\Delta$  соответствует оператору Лапласа.

Нас интересует случай  $n = 3$ , когда символ оператора осреднения по сфере радиуса  $R$  имеет простой вид:

$$\frac{\sin(Rk)}{Rk} = 1 + \frac{R^2}{3!} \Delta + \frac{R^4}{5!} \Delta^2 + \dots$$

Обозначим через  $M_R$  следующий естественный оператор разности:

$$M_R(f)(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} R^{n-1}} \int_{|r-r'|=R} f(r') dS - f(r).$$

Этот оператор имеет символ  $\sin(kR)/kR - 1$ ,  $n = 3$ , и выражается через оператор Лапласа как  $R^2 \Delta/3! + R^4 \Delta^2/5! + \dots$ . Однако такое приближение является расходящимся приближением, годным только в длинноволновом режиме.

Любое изотропное осреднение сферически симметричные функции переводит в сферически симметричные. Все изотропные осреднения с гладкой функцией  $\Phi(r)$  можно представить как осреднения по различным радиусам  $R$  осреднений по сферам радиуса  $R$ , т.е. можно выражать через операторы  $M_r$ . Параметр осреднения  $R$  можно рассматривать как радиус выбранного объема «нечеткого множества» осреднения. Здесь аналогия с нечеткими множествами не полная. Они определяются как функции из множества в интервал  $[0, 1]$ , а функция  $\Phi(r)$  принимает все положительные значения с условием, что интеграл от него равен 1. Тем не менее, такое представление как «нечеткое множество» для области осреднения является полезным.

Основные моменты осреднения механических уравнений не зависят от выбора функции  $\Phi(r, R) = R^{-n} \Phi(r/R)$ . Поэтому будем рассматривать осреднение с помощью произвольной фиксированной функции  $\Phi(r)$  и только иногда будем изучать зависимость величин при осреднении с помощью подобной ей функции  $\Phi(r, R)$ .

В дальнейшем рассмотрим осреднение таких аддитивных по массе величин, как масса, импульс, кинетическая энергия молекул и т. д. Как исходные функции от пространственных координат они являются дискретно распределенными функциями:

$$\sum_k m_k f_k \delta(r' - r'_k).$$

При  $f_k = 1$  получаем плотность распределения массы:

$$\rho = \sum_k \Phi(r_k - r) m_k$$

в точке  $r$  как осреднение функции

$$f(r') = \sum_k m_k \delta(r' - r_k).$$

Аналогично, при  $f_k = v_k$  получим плотность импульса

$$I = \rho v = \sum_k \Phi(r_k - r) m_k v_k$$

и среднемассовую скорость  $v = I/\rho$ . Заметим, что, вообще говоря, центр масс  $r_c = \bar{r}/\rho$  не совпадает с выбранным центром объема  $r$ .



Используются также среднемассовые величины как ускорение и кинетический момент:

$$a = \frac{\overline{a_k}}{\rho}, \quad K = \overline{mr \times v} = \sum_k \Phi(r - r_k) m_k r_k \times v_k.$$

При написании осредненных уравнений для последних надо учесть, что сумма моментов сил взаимодействия обращается в нуль вследствие того, что силы взаимодействия направлены параллельно векторам  $r_i - r_j$ , соединяющим местоположения молекул.

Для каждой аддитивной по массе физической величины определим ее среднее значение аналогично координатам и скоростям, а также среднеквадратичное отклонение физической величины и моменты (корреляции с координатами):

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{\rho} \sum_k \Phi(r - r_k) m_k f_k, \quad \sigma(f) = \sqrt{\frac{1}{\rho} \sum_k \Phi(r - r_k) m_k (f - f_k)^2}, \\ \Delta_r(f) &= \frac{1}{\rho \sigma(r) \sigma(f)} \sum_k \Phi(r - r_k) m_k (r_k - \bar{r})(f - \bar{f}). \end{aligned}$$

Первая величина представляет собой среднее значение  $f$  в «нечетком» объеме  $V$ , вторая — ее среднеквадратичное отклонение. Для скоростей в газе оно характеризует температуру и обычно значительно превосходит абсолютное значение первого. По этим характеристикам можно примерно оценить радиус  $R$  «нечеткого» объема  $V$ , необходимый для определения средних величин  $\bar{f}$  с точностью  $\delta(f)$ . Для этого в объеме должно содержаться не меньше, чем  $(\sigma(f)/\delta(f))^2$  молекул. Количество молекул в объеме определяется как  $\sum_k \Phi(r - r_k)$ .

Введем компоненты координат  $r = (r_1, r_2, r_3) = (r_a)$ , скоростей  $v = (v_1, v_2, v_3) = (v_b)$  и для массово аддитивных величин определим средние следующим образом:

$$\rho \bar{f} = \overline{\rho f} = \sum_k \Phi(r - r_k) m_k f_k.$$

Вычислим производную осредненной (среднемассовой) физической величины:

$$\frac{d}{dt} \rho \bar{f} = \frac{\partial \rho \bar{f}}{\partial t} + v^a \frac{\partial \rho \bar{f}}{\partial r^a} = - \sum_k \Phi'_a(r - r_k) v_k^a m_k f_k + v^a \sum_k \Phi'_a(r - r_k) m_k f_k + \sum_k \Phi(r - r_k) m_k \frac{df_k}{dt}.$$

Здесь производится суммирование по индексу  $a$ . Первый член равен  $-\frac{\partial \rho \bar{f} v_k^a}{\partial r^a}$ . Для случая  $f \equiv 1$  отсюда получается точное равенство:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (2)$$

Заметим, что эти уравнения не зависят от вида функции осреднения  $\Phi(r)$  и не содержат других членов. Это связано с тем, что скорость  $v$  определяется как среднемассовая, а также с осредненным (по данной функции  $\Phi(r)$ ) перемещением массы. Здесь играет также роль тот факт, что функции осреднения  $\Phi(r)$  выбраны как гладкие, а не как кусочно постоянные (разрывные).

Подставим в вышеприведенное соотношение  $f = v^b$  и вычтем из первого и второго члена усредненные скорости  $v^a$ . Тогда первый член можно записать в виде

$$-\frac{\partial \sigma_{ab}}{\partial r_a} - \frac{\partial \rho v^b v^a}{\partial r_a},$$

где  $\sigma_{ab}$  — локальная (без реологии) часть тензора напряжений, определяемая по формуле

$$\sigma_{ab} = \sum_k \Phi(r - r_k) m_k (v_k^a - v^a)(v_k^b - v^b). \quad (3)$$

Используя полученное уравнение сохранения массы (2) и объединяя первый член со вторым, получаем осредненное уравнение импульсов:

$$\rho \frac{dv^b}{dt} = -\frac{\partial \sigma_{ab}}{\partial r_a} + \sum_{kl} \Phi(r - r_k) F_{kl} + F, \quad F = \sum_k \Phi(r - r_k) F_{\text{out } k}.$$

Первый член справа можно считать шаровым тензором (диффузионный поток равноправен во всех направлениях) и записать его как градиент давления. Это дает уравнение импульсов в виде

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad } p + A(I) + F, \quad A(I) = \sum_{kl} \Phi(r - r_k) F_{kl}. \quad (4)$$

Совершенно аналогично получаются уравнения для кинетического момента и энергии. Они отличаются от уравнений идеальной жидкости членами

$$A(K) = \sum_{kl} \Phi(r - r_k) r_k \times F_{kl}, \quad A(\epsilon) = \sum_{kl} \Phi(r - r_k) v_k F_{kl}.$$

Уравнения многофазной среды получаются стандартным образом, разделяя соответствующие суммы по  $k, l$  на подмножества номеров, отнесенных к частицам определенной фазы.

Нам остается определить второй член как вычисление некоторого (не локального псевдодифференциального) оператора, примененного к импульсам  $I = \rho v$ . Согласно феноменологическому подходу [1], развитому в [2], если существует выражение для  $A(I)$  через осредненные величины, то оно должно выражаться через псевдодифференциальный оператор, являющийся функцией от оператора Лапласа и полной производной по времени

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^a \frac{\partial}{\partial r_a}.$$

#### 4. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ, КРУГОВЫЕ, НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ И МЕХАНИЗМ ДИССИПАЦИИ

Здесь рассмотрим три типа движений по уровню сложности. Наиболее простыми движениями являются стационарные движения, когда выполняются равенства

$$\frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{dv}{dt} \equiv 0.$$

К этому классу относятся стационарные плоскопараллельные течения, в частности, течения Пуазейля.

Несколько сложнее класс стационарных течений, когда не выполняется второе условие. Сюда относятся стационарные круговые течения. Последний тип относится к самому общему случаю. Рассмотрим обмен импульсами через боковые поверхности элементарного объема около точки, направления которых выбрано следующим образом. Направление скорости в точке выберем за направление оси  $x$ , соответственно скорость жидкости в точке имеет только это направление и равно  $u$ .

В качестве направления  $z$  возьмем направление  $\text{grad } u$ . Будем считать, что ось  $z$  перпендикулярна оси  $x$ . Это будет всегда так в случае плоскопараллельного течения. За ось  $y$  возьмем направление, перпендикулярное осям  $x, z$ .

Рассмотрим классический вывод диссипации в уравнениях сплошной среды. В статистической механике [12] при получении уравнений диффузии, теплопроводности и вязкости рассматривают слой газа между двумя плоскостями, параллельными плоскости  $z = \text{const}$  в вышеприведенной системе координат. В классическом подходе выписывается поток через границу элементарного объема между двумя плоскостями  $z = 0$  и  $z = d$ , что соответствует типичному дифференциальному подходу. В отличие от этого подхода в нашем подходе учитывается временное и пространственное распределение интенсивности обмена импульсом и другими характеристиками между

молекулами, и этот процесс не представляется дифференциальными выражениями из-за большой нелинейности именно в малых масштабах.

Заметим, что в классическом подходе мы вынуждены считать распределение смещения скоростей от осредненной скорости как неизотропное, т.е. сумма потоков импульсов и других параметров, кроме массы с одной (нижней) стороны поверхности в другую (верхнюю) и обратно (с верхней в нижнюю сторону) не равен нулю. Как указано в следующей секции, мы не отказываемся от изотропии броуновского движения, а анизотропия в обмене происходит из-за зависимости интенсивности обмена от положения и времени запаздывания. Силы между молекулами не бесконечны, и требуется некоторое время на обмен импульсами. В классическом подходе этот факт совсем не учитывается и в силу этого отбрасываются некоторые нестационарные эффекты. Поэтому в дальнейшем рассмотрим только анализ этого подхода в случае стационарных течений. При этом предполагается, что разницы потоков с разных сторон пропорциональны:

$$\left( W_{z=d} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d} - W_{z=0} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) f(d).$$

Здесь  $W$  — поток массы,  $u$  — скорость в направлении оси  $x$ . Точнее, мы здесь подправляем ошибочную формулу из [12]. Более того, в левой части может стоять величина

$$W((u_{z=d} - u_{z=0}) - (u_{z=0} - u_{z=-d})).$$

В [12] не учитывается также возможная разница потоков  $W$  в плоскостях  $z = 0$  и  $z = d$ , и в дальнейшем разница аппроксимируется второй производной от  $u$ , что больше соответствует первоначальной формуле. Здесь через  $f(d)$  мы уже учли разницу в реологиях в зависимости от толщины элементарного объема. Правильнее было бы брать разницу значений  $u$  на некотором фиксированном значении  $\delta$  в виде  $(u_{z=d} - u_{z=d-\delta}) - (u_{z=0} - u_{z=-\delta})$ .

Одной из причин расхождения реальных течений в случае потоков Пуазейля в микроканалах является отмеченный только что фактор. Мы не можем отходить на расстояние  $\delta$  (не позволяет толщина канала), а реология по толщине нелинейна, соответственно, мы не можем заменить на линейную аппроксимацию от производной  $\partial u / \partial z$  с уменьшением  $\delta$ . Иногда этот вопрос частично компенсируется за счет неньютоновой вязкости с нелинейной функцией тангенциального напряжения в зависимости от  $\partial u / \partial z$ . Примерно такова же причина неработоспособности формул диффузии, теплопроводности (при большой разнице теплопроводности жидкости и граничащего материала) в узких каналах.

В широких каналах для плоскопараллельных течений аппроксимационная формула работает почти всюду, за исключением тонкого слоя около границы, где все еще могут быть большие градиенты. Решения классических уравнений в целом правильно отражают течение. Однако при попытке найти условия устойчивости таких потоков мы получим существенно другие условия. В реальных потоках для нестационарных волновых решений мы получаем и другие безразмерные числа, кроме числа Рейнольдса, от которых зависит устойчивость. В реальных уравнениях и тип другой — гиперболический по времени. Соответственно, устойчивость может нарушаться даже при числах Рейнольдса на порядок меньших критичного для уравнений Навье—Стокса.

Рассмотрим теперь более общий стационарный поток, когда не выполняется равенство  $d/dt \equiv 0$ , хотя все еще  $\partial/\partial t \equiv 0$ . Типичным потоком такого типа является круговое движение с искривлением траекторий движения жидкости. В этом случае потоки  $W_{z=d}$  и  $W_{z=0}$  отличаются за счет изменения площадей внешних и внутренних колец. При повороте на определенный угол эффекты изменения тангенциальных скоростей в зависимости от слоя (радиуса)  $z$  и изменения площади за счет изменения радиуса дадут примерно одинаковый вклад. Как будет видно в дальнейшем, для правильного учета эффектов надо менять не только пространственное дифференцирование, взяв вместо оператора Лапласа некоторый оператор, являющийся функцией от оператора Лапласа, но и надо учесть и временную реологию. Для крупных масштабов, связанных по длине с радиусом движения и по времени с периодом вращения, получатся существенно другие результаты, по сравнению с решениями Навье—Стокса.

Заметим, что если какие-либо одинаковые частицы выстроятся непрерывным образом в замкнутую траекторию и начнут двигаться вдоль этой траектории с одинаковой скоростью, то диссипативная сила в правой части (4) не изменится. Однако, частицы двигаются не по траектории осредненной скорости жидкости, а отклоняются от нее равномерно во все стороны. Соответственно, это приводит к обмену импульсами, энергией и другими характеристиками потоков, соответствующих разным близким траекториям.

Любую траекторию, проходящую через определенную точку, в малой окрестности этой точки можно приблизить круговой траекторией с точностью до второго порядка. Здесь мы не рассматриваем вырожденный случай, когда эта траектория имеет нулевую кривизну в этой точке.

Легко построить поле течения идеальной жидкости с заданной круговой траекторией. Наиболее простое течение идеальной несжимаемой жидкости — это плоское течение с вращением с полем скоростей  $v_x = -\omega y$ ,  $v_y = \omega x$ . Заметим, что такое поле скоростей линейно зависит от координат, удовлетворяет не только уравнениям идеальной жидкости, но и уравнениям Навье—Стокса, так как оператор Лапласа от скорости равен нулю. Последнее парадоксально и не учитывает тот факт, что с внешней стороны приходит несколько больше частиц, чем с внутренней стороны. Соответственно, такое распределение скоростей не может быть решением реальных уравнений движения жидкости. В рамках дифференциальных уравнений нельзя учесть, что поток импульса с внешней стороны несколько больше, чем с внутренней стороны, так как в этом случае разница составляет только второй порядок малости. Для правильного описания требуется учесть как пространственную, так и временную реологию диффузионного потока.

Заметим, что при учете только пространственной реологии, как в уравнениях новосибирской школы, среднее величины, линейно зависящей от координат потока, даст значение, имеющееся в данной точке. Соответственно, получится отсутствие результирующего обмена импульсами в таком потоке. В нашем случае учитывается также реология по времени.

Пространственное осреднение осуществляется с учетом сдвига по времени с радиусом осреднения, пропорциональным  $\sqrt{t}$ . Соответственно, средние значения для такого линейного потока соответствуют характеристикам потока, которые были некоторое время назад. Так как при круговом движении за этот промежуток времени даже при стационарном потоке скорость успеет несколько измениться за счет кривизны потока, получается ненулевой обмен импульсами даже при линейном распределении скоростей. Так можно объяснить закручивание потока жидкости в ванне при сливе, когда угловая скорость вблизи слива становится большой. Поток закручивается за счет сил трения и Кориолиса.

При круговом течении Навье—Стокса трение исчезает только в случае постоянной угловой скорости, а в нашем случае трение исчезает при постоянной орбитальной скорости. Обмен импульсами прекращается только тогда, когда примерно постоянна не угловая скорость вращения, а орбитальная скорость вращения, что приводит к закручиванию потока вблизи слива. Точнее этот эффект можно объяснить диффузионным потоком момента импульсов, т.е. обменом моментами импульсов между разными слоями жидкости. Заметим, что и в космологии вопрос о кривой вращения галактик (когда орбитальные скорости вращения звезд почти не меняются в зависимости от расстояния до центра галактики) остается без удовлетворительного объяснения.

При нелинейном распределении скоростей, как, например, в течении Пуазейля, за счет несовпадения пространственной производной с реологией, определяемой через операторы  $M_R$  с производной без реологии (оператор Лапласа как предел  $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{M_R}{R^2}$ ), обмены импульсами будут различаться даже без учета реологии по времени.

Прежде чем выяснить способ учета реального трения, оценим размеры радиуса осреднения, необходимого для учета кривизны распределения скоростей, для получения напряжений в уравнениях Навье—Стокса методом осреднения. Первые производные можно оценить также через

корреляции с координатами следующим образом:

$$\Delta_a(v^b) = \frac{1}{\rho\sigma(r^b)\sigma(v^b)} \sum_k \Phi(r_k - r) m_k (r_k^a - r_c^a) (v_k^b - v^b).$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial v^b}{\partial r^a} \approx \Delta_a v^b \frac{\sigma(v^b)}{\sigma(r^a)}$$

с точностью до  $O((R/R_v)^2)$ , где  $R_v$  — радиус кривизны распределения скорости от координат. Однако эти оценки могут ничего не значить. При оценке потоков импульсов надо оценить величины такого рода через средние по соседним областям. Для этого средние скорости в каждой области должны быть определены с такой точностью  $\delta v$ , чтобы отношение  $2\delta v/R$  ( $R$  — радиус объема) было в несколько раз меньше  $v_0/L$ , где  $v_0$  — характерное значение скорости, например, следующим образом:

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{M} \int \rho v^2 dV}, \quad L = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{1}{M} \int \rho \left( \frac{\partial v}{\partial r^a} \right)^2 dV}}, \quad M = \int \rho dV. \quad (5)$$

Здесь интегрирование производится в макрообъеме (шаре), содержащем рассматриваемую точку,  $M$  — масса жидкости в этом объеме,  $L$  — характерный масштаб изменения скорости в этом объеме. Таким образом, величина  $\delta v$  должна быть в несколько (точнее, во много) раз меньше, чем  $v_0 R/2L$ . Это значит, что величина  $\sigma(v) = \sqrt{2}c$  (выражение  $\sigma(v)$  для газа через скорость звука  $c$ ) должна быть в несколько раз меньше  $v_0 R^{1+n/2}/2Ll_0^{n/2}$ . В нашем случае  $n = 3$ ; это означает, что

$$R \gg \left( \frac{2cl_0}{v_0 L} \right)^{2/5} (L^4 l_0)^{1/5} \approx Re^{-2/5} (L^4 l_0)^{1/5}.$$

В последнем случае объемы для осреднения получаются имеющими почти макромасштаб ( $l_0$  — длина свободного пробега,  $L$  — характерный макромасштаб длины). А при оценке вторых производных, используемых в уравнениях диффузии, теплопроводности и Навье—Стокса, этот масштаб иногда может оказаться больше характерного масштаба изменения параметров. Соответственно, такого рода уравнения не будут описывать осредненное движение сплошной среды.

Эти рассуждения показывают, что при подсчете диффузионных потоков (концентрации, тепла, импульсов) мы не можем полагаться на их выражение через вторые производные. На самом деле, при вычислении вязких напряжений через вторые производные (через оператор Лапласа) от осредненной скорости мы забываем про обмен импульсами с молекулами, вращающимися в среднем вблизи поверхности нашего объема, но обменивающимися импульсами между разными орбитами вращения за счет диффузии, соответствующими силам поверхностного натяжения или трения вращению поля скоростей осредненного движения (как в приведенном выше примере). Нельзя сказать, что здесь не будет обмена импульсами между соприкасающимися объемами жидкости, вследствие указанной выше причины. Это означает, что большая часть обмена импульсами происходит за счет циркуляции для осредненной скорости, за счет обмена импульсами между траекториями с разными циркуляциями. Такой обмен импульсами, в силу вышесказанного, не может быть выражен локально (через производные от параметров, локализованных в точке). Таким образом, приходим к выводу, что взаимодействие с соседними областями жидкости необходимо учитывать через нелокальный (с пространственной и временной реологией) обмен импульсами, энергией и т. д.

В то же время надо учесть, что обмен происходит не мгновенно, а имеет некоторую продолжительность, в ходе которого движущиеся части жидкости проходят некоторое расстояние. Соответственно, уравнения получаются с некоторой реологией как по пространству, так и по времени, чему соответствует оператор, выражаемый как функция от двух операторов  $\Delta$  (оператор Лапласа) и  $d/dt$  (полная производная). Для точного выражения диссипативных членов нам

необходимо изучить такие потоки, которые не приносят массу (суммарный поток массы равен нулю), называемые в дальнейшем диффузионными. В то же время, за счет разницы импульсов, энергий, в приходящем и уходящем потоках, меняется локальное значение импульсов и энергии без конвективного потока. Такими потоками являются потоки броуновского движения.

## 5. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И ВИД ОПЕРАТОРОВ ОБМЕНА

Пусть движение частиц описывается конвективным (осредненным) движением и наложенным случайным движением. Чтобы случайное движение не влияло на значение осредненного движения, их вклад в осреднение среднemasовой скорости должен дать нуль. Такие движения можно разложить в сумму движений типа Бернулли.

Начнем с простейшего одномерного случая случайного движения. Пусть объект перемещается с вероятностью  $p$  на расстояние  $x$  вперед и с вероятностью  $1-p$  на расстояние  $y = -|y|$  назад. Чтобы среднее передвижение получилось равным нулю, должно выполняться равенство  $px + (1-p)y = 0$ .

Пусть  $z = x/(1-p) = -y/p$ . Тогда через  $n$  шагов объект будет находиться на позиции  $z(k(1-p) - p(n-k)) = z(k - np)$  от исходной точки (отрицательное значение означает нахождение по другую сторону от направления оси отсчета) с вероятностью  $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ .

Вычислим среднее отклонение:

$$z \sum_{k=0}^n (k - np) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = zp \sum_{k=1}^n n C_{n-1}^{k-1} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} - znp \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 0.$$

Найдем теперь среднее значение квадрата отклонения:

$$\begin{aligned} S &= z^2 \sum_{k=0}^n (k - np)^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = z^2 np(1-p)^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k} - \\ &\quad - 2z^2 p(1-p) \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + z^2 np^2(1-p) \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Вычислим по отдельности каждый член суммы. Первый член разлагается на две суммы:

$$S_1 = z^2 np(1-p)^2 + z^2 np(1-p)^2 \sum_{k=0}^{n-1} k C_{n-1}^k (1-p)^{n-1-k} = z^2 np(1-p)^2 (1-p + np).$$

Вторая же часть суммы равна

$$S_2 = 2z^2 np(1-p)^2 \sum_{k=1}^{n-1} k C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k} = 2z^2 n(n-1)p^2(1-p)^2.$$

Третья часть получается аналогично первой:

$$S_3 = z^2 np^2(1-p)(p + n(1-p)).$$

Складывая все это получаем:

$$S = S_1 - 2S_2 + S_3 = z^2 np(1-p),$$

т.е. найдено среднее значение квадрата отклонения после  $n$  шагов.

Введем безразмерную координату отклонения

$$r = \frac{k(1-p) - (n-k)p}{s} = \frac{k - np}{s}, \quad s = \sqrt{np(1-p)},$$

и вычислим вероятность того, что объект окажется в интервале  $(r, r + dr)$ , считая число шагов  $n$  большим. Получаем

$$P = \sum_{rs \leq k - np < (r+dr)s} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Используя формулу Стирлинга  $n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n} \theta_n$ , перепишем члены суммы в следующем виде:

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \frac{\theta_n}{\theta_k \theta_{n-k}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}.$$

Подставляя  $k = np + rs$  в произведение степеней, получаем:

$$\exp\left(-\frac{r^2}{2} + \frac{r^3(1-2p)}{6s} + O\left(\frac{r^4}{s^2}\right)\right).$$

Просуммировав по  $k$  из указанного интервала получим:

$$P = \sum_{rs \leq k - np < (r+dr)s} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr.$$

В исходных переменных (когда  $t = n$ ,  $r = (k - np)/\sqrt{p(1-p)}$ ) это дает формулу распределения отклонения объекта за время  $t$ :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{r^2}{2t}\right) dr.$$

Когда шаги разные и делаются с частотой  $\omega$ , получим:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega t}} \exp\left(-\frac{r^2}{Dt}\right) dr, \quad D = 2R_0^2\omega, \quad (6)$$

где  $R_0^2$  — среднее значение квадрата шага. Здесь положение  $r$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

В многомерном случае получается аналогичная формула. При этом надо учесть, что в этом случае отклонение  $r$  измеряется по абсолютной величине и, соответственно, вероятность умножается на 2 и, к тому же, вместо  $R_0^2$  надо ставить  $R_0^2/\pi$ , согласно доказанному выше утверждению, что среднее значение квадрата отклонения за один шаг равно среднему значению квадрата шага, деленное на  $\pi$ . Соответственно, формула вероятности нахождения на расстоянии от  $r$  до  $r + dr$  находится по формуле

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\pi\omega_0 t}} \exp\left(-\frac{r^2}{Dt}\right) dr, \quad D = \frac{2R_0^2\omega_0}{\pi}. \quad (7)$$

Заметим, что формула (7) имеет характер универсального закона для изотропного броуновского движения. Даже если считать, что движение происходит по случайному марковскому процессу с некоторой интенсивностью, в случайные моменты времени, на некоторое случайное расстояние и с некоторым равномерным распределением по направлениям, то также приходим к формуле (7) с некоторым эффективным  $R_0$  и  $\omega_0$ .

Для твердых тел тензор  $\sigma_{ab}$  — не шаровой. Соответственно, броуновское движение — не изотропное, когда вместо величины  $r^2/D$  в экспоненте будет стоять некоторая положительно определенная квадратичная форма  $\sum_{ab} f_{ab} x^a x^b$ , где  $f_{ab}$  — матрица, обратная к  $\sigma_{ab}$ . Хотя наши уравнения работают и в таком случае, мы в дальнейшем рассматриваем только жидкости с изотропным броуновским движением и с изотропным тензором напряжений  $\sigma_{ab}$ .

Считаем, что частицы, захваченные в область осреднения, двигаются дополнительно к осредненному движению по законам броуновского движения (7) и обмениваются с областью своей энергией и импульсом. При каждом обмене (концентрацией, импульсом, энергией) вес, с которым надо учитывать обмен с исходными характеристиками, падает в некоторое количество раз. Например, если обмен для характеристики  $\kappa$  происходит по закону

$$\kappa' = \kappa_1 + \alpha(\kappa_2 - \kappa_1), \quad \kappa_2' = \kappa_2 + \alpha(\kappa_1 - \kappa_2),$$

то вес при следующем обмене должен составлять только  $(1 - \alpha)$  часть от предыдущего обмена. Отсюда получается, что происходит экспоненциальное забывание информации, соответственно,

диффузионный обмен параметра  $I(t, x)$  с его значением в другой точке  $I(t - \tau, x - \tau v - y)$  должен учитываться согласно следующей формуле:

$$AI = \int_0^\infty \int_{V_y} \frac{1 - \exp(-b/\omega_0)}{2\pi y^2 \sqrt{2\pi\omega_0\tau}} \exp\left(-\frac{y^2}{D\tau} - b\tau\right) \left(I(t - \tau, x - \tau v - y) - I(t, x)\right) d\tau dy. \quad (8)$$

Здесь  $y^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$  — квадрат расстояния в пространстве смещений  $y = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  — скорость сплошной среды,  $b$  — параметр затухания по времени. Он должен учитывать тот факт, что если частица уже учтена как вступившая в обмен с окружающей средой с коэффициентом  $\alpha$ , то при следующем обмене коэффициент обмена должен уменьшаться, составляя только  $(1 - \alpha)$ -ю часть предыдущего, т.е. должен быть равен  $\alpha(1 - \alpha)$ . На следующем шаге с коэффициентом  $\alpha(1 - \alpha)^2$  и т. д. При этом сумма всех таких коэффициентов равна 1. В таком случае  $b = -\omega_0 \ln(1 - \alpha)$ . Здесь коэффициент  $b = b_I$  будет своим для каждой функции  $I$  (для импульсов — один, для энергий — другой и т. д.). Минимальное значение этого коэффициента ожидается для коэффициента диффузии. Коэффициенты  $D$  и  $\omega_0$  должны быть общими для всех операторов обмена, когда броуновское движение однородно по масштабу.

При сложных моделях можно учесть, что в броуновском движении участвуют частицы в большом диапазоне масштабов. Соответственно, они дают разные средние показатели  $D, \omega$  для разных показателей, таких как диффузия, теплопроводность и вязкость.

В данных рассуждениях учтено, что частица попадает с расстояния  $r$  в заданную точку с вероятностью, пропорциональной  $\exp(-r^2/Dt)$ , где  $D$  — параметр, имеющий размерность кинематической вязкости, и все это отражает скорость диффузионного (броуновского) потока. Так как расстояние отклонения при этом растет пропорционально  $\sqrt{t}$ , то квадрат расстояния отклонения растет пропорционально времени, т.е. отношение квадрата расстояния отклонения к прошедшему времени постоянно, что естественно называть скоростью броуновского движения, измеряемого в единицах  $m^2/c$ .

Обоснуем теперь предположение о плотности вероятности нахождения на расстоянии  $r$  через время  $t$  как величине, пропорциональной  $\exp(-r^2/Dt)$ . Пусть элементарная частица объема передвигается за время  $\Delta t$  на вектор  $\Delta r_i$ , направленный равномерно по всем направлениям. Тогда передвижение по некоторой выбранной оси имеет вид  $\Delta x_i = \Delta r_i \cos \phi_i$ . При этом вероятность того, что угол находится в интервале  $(\phi, \phi + d\phi)$ , вычисляется из величины  $S_{n-2}(\sin \phi)^{n-2}(d\phi/\pi)/S_{n-1}$ , где  $S_k$  — объем  $k$ -мерной сферы единичного радиуса в  $(k + 1)$ -мерном пространстве. В частности,

$$S_0 = 2, \quad S_k = \frac{2^{(k+2)/2} \pi^{(k+1)/2}}{(k-1)!}.$$

Ясно, что среднее значение  $\Delta x_i$  равно 0, а нас интересует среднее значение

$$(\Delta x_i)^2 = \frac{(\Delta r_i)^2}{\pi S_{k-1}} \int_0^\pi \sin^{k-1} \phi \cos^2 \phi d\phi = \frac{(\Delta r_i)^2}{\pi(k+1)}.$$

Суммируя квадраты отклонений по всем направлениям, получаем, что среднее значение квадрата отклонения за один шаг составляет  $(\Delta r_i)^2/\pi$  независимо от размерности пространства, начиная с размерности 2. В одномерном случае нет интегрирования по направлениям (оно фиксированное). Это приводит к другим коэффициентам, получаемым из схемы Бернулли. Так как за определенное время приходит много частиц с расстояния  $r$ , обмен с каждой такой частицей даст обмен со средним значением по сфере радиуса  $r$  с центром в указанной точке. Именно это и учтено в формуле (8), которую можно выразить через ранее введенный оператор обмена с средним по



сфере следующим образом:

$$AI = C \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_0\tau}} \exp\left(-\frac{y^2}{D\tau} - b\tau\right) \exp\left(-\tau\frac{d}{dt}\right) M_y I(t, x) d\tau dy, \quad (9)$$

$$C = 2 \left(1 - \exp\left(-\frac{b}{\omega_0}\right)\right).$$

Естественно предположить, что эти коэффициенты, как и коэффициенты вязкости, зависят от температуры и плотности среды (более точно — от температуры, плотности и давления, однако между тремя величинами имеется функциональная зависимость).

Наиболее простой вид уравнения с оператором обмена получается для уравнения диффузии:

$$\frac{d\kappa}{dt} = A\kappa. \quad (10)$$

Это — псевдодифференциальное уравнение гиперболического типа, допускающее разрывные решения. Уравнение имеет вид уравнения с реологией как по времени, так и по пространству.

В работе [11] также предпринята попытка заменить классическое уравнение диффузии на новое псевдодифференциальное уравнение. Однако автор не понял того, как связать теорию псевдодифференциальных уравнений, уравнение диффузии и броуновское движение. Если в дифференцировании по пространственной координате брать «не взвешенное» дифференцирование, то уравнение зависит от направления выбора отсчета, т.е. оно не изотропное. На самом деле правильнее говорить именно о неизотропной диффузии. Аномальная диффузия может появиться разве что в случае, когда микродвижения «молекул» имеют релятивистские скорости, и по-разному протекают времена для разных молекул. В этом случае температура должна исчисляться миллиардами градусов. Так, в работе [11] рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^\gamma c(x, t)}{\partial t^\gamma} = D \frac{\partial^\alpha c(x, t)}{\partial x^\alpha},$$

отличающееся от классического только степенями дифференцирования  $(\alpha, \gamma)$  (в качестве альтернативы к классическому уравнению). При этом, в отличие от случая  $\gamma = 1$ , для нахождения искомой концентрации  $c(x, t)$  мы должны знать не только начальное значение, а всю историю  $c(x, t), t \leq 0$ , что неприемлемо. Можно было бы получить уравнение с другими  $(\alpha, \gamma) \rightarrow (\alpha/\gamma, 1)$  не меняя дисперсионные соотношения. Однако новое уравнение не будет эквивалентно старому из-за различий в заданиях начальных и граничных условий.

В классической механике иногда возникает потребность рассмотрения не аномальной, а неизотропной диффузии (теплопроводности) в следующих ситуациях:

- (1) среда имеет неизотропную кристаллическую структуру;
- (2) среда имеет большую скорость движения (в газах), когда не выполняется неравенство  $M^2 = v^2/c^2 \ll 1$ ;
- (3) среда подвергается быстрым однонаправленным колебаниям.

Для жидкостей неизотропная диффузия возможна только в последнем случае и будет рассмотрена в следующем разделе.

## 6. УРАВНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ И ЭНЕРГИИ И ХАРАКТЕР РЕШЕНИЙ

При выводе вида операторов обмена мы не учитывали возможность изменения массы в объеме осреднения, приводящей к изменению плотности в объеме. При таком процессе также происходит некоторая диссипация. В классических уравнениях для этого вводится вторая вязкость. Этот член в уравнениях зависит от дивергенции скоростей

$$\operatorname{div} v = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d \ln(\rho)}{dt}$$

и может быть выражен через изменение плотности через скорость расширения. Авторами найден вид этого члена из условия затухания волн сжатия: он пропорционален частоте в широком диапазоне частот. Это приводит к следующей добавке в уравнениях импульсов:

$$\rho \frac{dv^a}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r^a} + AI + F + \frac{\partial B\rho}{\partial r^a}. \quad (11)$$

Здесь  $B$  — оператор, характеризующий трение при расширении, наподобие второй вязкости, имеющий вид

$$B\rho = \text{const} \cdot \rho(\Delta)^{-3/4} \left( \frac{d}{dt} \right)^{3/2} (\ln \rho).$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

— оператор дифференцирования вдоль траектории и оператор Лапласа соответственно. Практическое влияние этого члена мало, за исключением некоторых случаев, когда требуется учесть сжимаемость жидкости и затухание акустических волн в жидкости.

Аналогично уравнениям диффузии, получается уравнение энергии (теплопроводности):

$$\frac{d\epsilon}{dt} = R + A\epsilon. \quad (12)$$

Здесь член  $R$  соответствует работе сил (как и в классическом случае),  $A$  — оператор обмена; как было отмечено ранее, коэффициенты забывания информации  $b = b_D, b_I, b_\epsilon$  — разные, т.е. в каждом операторе обмена  $A = A_D, A_I, A_\epsilon$  — свой коэффициент.

Решения этих уравнений существенно отличаются от решений классических уравнений Навье—Стокса, теплопроводности при малых характерных масштабах изменения параметров:

$$l = \frac{\|v\|}{\|\text{grad } v\|},$$

где  $\|v\|, \|\text{grad } v\|$  — нормы (например, в пространстве  $L_2$ ).

Аналогично можно определить характерный масштаб изменения и для других параметров, однако для скорости диффузии существен именно определенный выше масштаб изменения скоростей —  $l$ . Когда этот масштаб сравним или мал по сравнению с  $R_0$  (случай больших градиентов), точнее, когда выполняется отношение

$$l^2 \frac{\|dv/dt\|}{\|v\|} \gg D = R_0^2 \omega_0,$$

решение сильно отличается от решения классических уравнений. Для стационарных потоков  $\frac{dv}{dt} \approx \frac{v^2}{l}$ ; соответственно, отношение  $vl/D$  характеризует число Рейнольдса. При малых числах Рейнольдса и стремлении  $R_0 \rightarrow 0, \omega_0 \rightarrow \infty$  так, чтобы величина  $R_0^2 \omega_0 = D$  оставалась постоянной, решения этих уравнений переходят в решения уравнений Навье—Стокса.

В [4] исследованы стационарные решения этих уравнений типа решений Пуазейля. Когда размер щели или радиус трубы существенно больше по сравнению с  $R_0$  и числа Рейнольдса небольшие, решения этих уравнений практически не отличаются от решений Пуазейля для уравнений Навье—Стокса. Когда размер трубы порядка  $R_0$ , сопротивление начинает падать по сравнению с навьестоксовым решением, и при постоянном напоре (перепаде давления на единицу длины) средняя скорость течения при уменьшении диаметра  $d$  переходит от квадратичной зависимости  $v = Cd^2$  (при больших  $d \gg R_0$ ) к линейной (при малых  $d \ll R_0$ ). Последнее соответствует сухому трению при движении твердого тела в трубе. Заметим, что и скорость течения жидкости при этом становится постоянной по сечению, как и у твердого стержня. При этом обмен импульсами с границей соответствует поверхностному натяжению.

Здесь не задаются дополнительные граничные условия, кроме условий непротекания (как в уравнениях Эйлера). Скорость на границе получается из решения. Она равна почти нулю при

больших  $d/R_0$ . При малости этого отношения скорость в сечении почти постоянна. Для стационарных течений параметр  $b$  выпадает, образуя некоторый коэффициент кинематической вязкости совместно с коэффициентом  $D$ . Тем не менее, при малых  $d$  появляется некоторая зависимость решения от «граничного условия» для оператора  $A$ , заключающегося в способе продолжения интегрирования после достижения поверхности. Так как операторы не увеличивают порядок уравнений, дополнительные по отношению к уравнениям Эйлера граничные условия не требуются.

Однако появляется необходимость продолжения линии интегрирования после достижения границы течения или раздела фаз. В таких случаях интегралы по прямым следует продолжать далее по отраженным линиям с некоторым весовым коэффициентом. Эти вопросы обсуждены в перечисленных работах авторов. При больших  $d$  решение от этого практически не зависит. При малых  $d$  появляется некоторая зависимость от способа продолжения интегрирования. Из-за этого по малому количеству экспериментальных данных [14] удалось только примерно оценить характерный радиус  $R_0$  для воды как  $R_0 \approx 50$  мк.

Решение существенно отличается от классического также при быстрых процессах (при больших числах Рейнольдса). При больших масштабах (как на море) даже относительно слабые процессы дают большие числа Рейнольдса или большую нестационарность, когда решения этих уравнений существенно отличаются от решений классических уравнений. На самом деле роль безразмерных чисел Рейнольдса здесь играют отношения циркуляций скорости к кинематической вязкости (это эквивалентно потоку вихря). Они в морских течениях действительно оказываются большими. При классическом осреднении (без учета диффузионных потоков) по крупным масштабам мы теряем большую часть обмена импульсами и энергией за счет циркуляции скорости, что является следствием диффузионных потоков в неоднородном по своим характеристикам течении. Чтобы учесть потерянный поток обмена импульсами и энергией, механики увеличивают коэффициенты вязкости и теплообмена, относя это к турбулентной вязкости и теплообмену. В приведенных выше уравнениях этот учет проявляется автоматически, т.е. не требуется менять значения параметров среды в зависимости от режима течения.

Силы взаимодействия сохраняют общий импульс, общий момент импульса и т. д. Соответственно, их можно интерпретировать как обмен импульсом, моментом импульса и т. д. Так как эти силы быстро убывают в зависимости от расстояния, то они вносят вклад только вблизи и могут быть интерпретированы как поверхностные интенсивности обмена или поверхностные силы (натяжения). При малости циркуляций дисперсионных скоростей их можно учесть приближенно классическими уравнениями. Когда они большие, классическими уравнениями не удастся учесть диффузионный обмен импульсами и энергией достаточно точно, оставаясь в рамках дифференциальных уравнений (без реологии). По мнению авторов, существенные отклонения в расчетах параметров погоды от реальных значений вызываются не столько самой неустойчивостью решений, сколько за счет использования не соответствующих реальности классических уравнений при больших масштабах.

Заметим, что вычисление диффузионного потока разреженного газа через броуновское движение с коэффициентом  $R_0$ , равным среднему значению длины свободного пробега между разными соударениями молекул, и со значением  $\omega_0$  (соответствующем частоте соударений), согласуется с такими известными фактами, как увеличение вязкости или скорости диффузии  $D$  пропорционально квадратному корню от температуры (при постоянном объеме).

Параметры броуновского движения  $R_0, \omega_0$  можно получить от двухчастичного распределения относительных скоростей. Если две частицы (молекулы) находятся в точках  $r_1, r_2$  и имеют скорости  $v_1, v_2$ , то проекции относительной скорости  $v = v_2 - v_1 = v_\tau + v_n$  не зависят от направления  $r = r_2 - r_1$ . Направление  $v_n$  распределяется равномерно. Появляются зависимости распределений  $|v_\tau|, |v_n|$  от  $|r|$ . Их мы называем двухчастичными распределениями скоростей. Они определяют параметры броуновского движения и, тем самым, уравнения движения реальной вязкой жидкости. Сами распределения могут быть получены от функции, определяющей силы взаимодействия между частицами, от плотности и температуры. Однако аналитическое вычисление этих

зависимостей вряд ли возможно. Их можно получить имитационным моделированием движения большого количества частиц.

Для газа обычно принимается, что двухчастичные распределения скоростей не зависят от расстояния. При таком предположении  $R_0$  есть средняя длина свободного пробега, а частота  $\omega_0$  — частота соударений. На самом деле зависимость от  $r$  имеется. Вследствие этого величина  $R_0$  больше средней длины свободного пробега, а частота  $\omega_0$  меньше частоты соударений, вычисленной при допущении отсутствия корреляции скоростей в зависимости от расстояния между молекулами. В случае газа корреляции малые, и в целом можно пользоваться допущением об отсутствии корреляции. Однако для жидкостей и тем более для твердых тел отличие получается существенным.

Случай звезд в галактике похож на случай разреженного газа. Однако он существенно отличается от этого случая нелокальностью сил взаимодействия между частицами (звездами), заключающейся в быстром расхождении интеграла от силы взаимодействия в бесконечности

$$\int_{r>R} \frac{dV}{r^2}.$$

Это приводит к большой корреляции двухчастичного распределения скоростей и к невозможности использования классической гидромеханики для объяснения некоторых «загадочных» парадоксов космологии.

## 7. МАСШТАБИРУЕМОСТЬ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К АСТРОФИЗИКЕ

Представим себе, что разные частицы участвуют в разных орбитальных движениях. Исходя только из локального движения в окрестности радиуса  $R$  некоторой точки, мы не можем сказать о внешнем движении. Изучая движение частиц в данной окрестности, мы можем говорить только о том, как они движутся друг относительно друга. При этом вся эта система частиц может двигаться относительно других систем частиц с определенной скоростью, возможно искривленно, орбитально, относительно более крупной системы частиц и т. д. Чтобы определить орбиту укрупненного движения, мы должны увеличить радиус рассматриваемой области в несколько раз и изучить, как двигаются подсистемы частиц прежнего уровня (рассматриваемого ранее радиуса). Так можно оценить характер броуновского движения для объектов разных уровней, звезд в галактиках, галактик в скоплениях галактик, скоплений галактик в метagalактиках.

При броуновском движении расстояние между двумя частицами, находящимися на некотором расстоянии, растет в среднем как  $R^2(t) = R^2(0) + 2Dt$ , где  $D$  — описанная ранее скорость броуновского движения. Этот закон характеризует удаление друг от друга двух произвольно взятых частицы в среднем и является характеристикой двухчастичного распределения.

В космологии представляет интерес двухчастичное распределение скоростей, т.е. распределение разницы скоростей  $v_1 - v_2$ . Две частицы определяют радиус-вектор  $r_1 - r_2$ . Считая двухчастичное распределение скоростей изотропным, получаем, что относительная скорость должна разлагаться на два распределения: вдоль направления, соединяющего частицы, и в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Обозначим первое (скорость в направлении прямой, соединяющей частицы) через  $u$ , второе — через  $w$ . Естественно ожидать, что эти распределения независимы и зависят только от расстояния  $|r_1 - r_2| = r$ . Эвристические соображения относительно распределения  $w(r)$  подсказывают, что величина  $W^2/r$  ограничена, иначе можно было бы ощутить центробежное ускорение. Другие эвристические соображения говорят, что  $u$  не может неограниченно расти, колеблясь в обе стороны. Таким образом, допускается рост  $w^2$  не более чем пропорционально  $r$ . При этом, когда по одной линии мы удаляемся от фиксированной частицы (например, от наблюдателя на Земле), то рост  $w^2$  пропорционально  $r$  возможен так, что само направление при этом может несколько раз непрерывно меняться на противоположное. Этому способствует двумерность этой скорости, соответственно, конец вектора может раскручиваться по спирали. Скорость  $u$  одномерна и не обладает этим свойством. Поэтому здесь эвристические

соображения говорят, что скорость  $u(r)$  или монотонно растет в среднем (расширение) с некоторой случайной вариацией в обе стороны, или в среднем монотонно убывает (отрицательное значение  $u$  соответствует сжатию) также с некоторой небольшой вариацией, или в среднем равно нулю.

Для двухчастичного распределения скоростей мы не имеем кинетических уравнений, как в случае одночастичного распределения, стационарным решением которого является распределение Максвелла. Но некоторое представление о двухчастичном распределении можно извлечь из броуновского движения.

До этого мы интересовались отклонением одной частицы из своего первоначального положения за счет случайных движений с некоторой частотой  $\omega_0$ . Можно интересоваться также случайным движением в фазовом пространстве, характеризующимся также координатами скоростей частицы. Здесь действует примерно те же законы сложения случайных величин, в среднем равных нулю. Когда складывается много таких независимых случайных величин, дисперсия суммы равна сумме дисперсий, т.е. среднее отклонение растет как квадратный корень от суммы дисперсий. Только при применении этого принципа к двухчастичному распределению надо учесть некоторые особенности. Ускорения в разные моменты нельзя считать независимыми, если силы нелокальные. Так как силы, действующие издалека, практически не меняются при небольших отклонениях от исходного положения.

Разобьем область на сфероподобные области  $V_n$ , определенные неравенствами

$$nl_0 \leq |r - r_0| \leq (n + 1)l_0,$$

где  $r_0$  — координаты некоторой частицы-центра,  $l_0$  — среднее расстояние между частицами. Если взять не всю область  $V_n$ , а части, находящиеся в некотором секторе (например, в одной половинке), то такие частицы дают результирующую силу  $F_n$ , действующую на частицу в центре. Заметим, что количество частиц в секторе растет пропорционально  $n^2$  (при равномерном распределении частиц), соответственно  $n$ -я сила имеет порядок  $n^2 f(n)$ . Если силы взаимодействия с ростом  $n$  быстро убывают (например, силы взаимодействия между молекулами газа убывают как  $f(n) = O(n^{-4})$  так, что ряд  $\sum_n n^2 f(n)$  сходится), то локальные силы и результирующая сила зависят в основном только от расположения близких частиц. В этом случае двухчастичное распределение скоростей практически не зависит от расстояния. Однако гравитационные силы не относятся к локальным в указанном выше смысле, для них выполняются законы убывания  $f(n) = O(n^{-2})$  и  $F_n = O(1)$ . Здесь величины  $F_n$  не являются независимыми, к тому же это силы, действующие из разных областей пространства. Поэтому здесь требуется несколько другой подход для определения двухчастичного распределения скоростей в космологии.

Приведем еще одно эвристическое соображение в пользу вышесказанного о двухчастичном распределении скоростей. Рассмотрим систему координат и шаровидные области все большего размера. Система координат, связанная с большим шаром, не может иметь большое ускорение за счет внешних сил. Однако эта система может совершать вращение, которое при малых угловых скоростях может дать большие относительные скорости  $w$ , имеющие порядок  $O(\sqrt{r})$  на расстоянии  $r$ . При этом  $u(r)$  может иметь порядок  $O(1)$ ю

Доказать это предположение, вытекающее из эвристических соображений, пока не представляется возможным: мы даже не имеем соответствующих кинетических уравнений для описания двухчастичного распределения скоростей. Тем не менее, можно численно моделировать такие процессы с конечным числом частиц и проверять выполнимость такого распределения при больших  $t$ , пока  $r$  мало по сравнению с размерами моделируемой Вселенной. Можно проверить выполнение предположений, вытекающих из этих эвристических соображений, с помощью реальных измерений расстояний и скоростей относительно наблюдателя с Земли. Правда, пока сложно измерить даже относительные расстояния: расстояние до очень близкой (по космическим масштабам) Полярной звезды только в конце 2012 г. пересмотрели и уменьшили с 434 до 323 световых лет. Измерение относительных скоростей далеких звезд является пока еще более

трудной задачей. Мы можем с большой точностью измерить доплеровское смещение, однако это не позволяет определить даже модуль  $w$ . Для космических масштабов относительные скорости получаются большими, релятивистскими, т.е. сравнимыми с максимальной скоростью (скоростью света). Соответственно, надо говорить о росте импульсов  $mv/\sqrt{1-w^2}$  (здесь и далее скорость света принимается за единицу). Соответственно? наше предположение будет

$$|u| < \epsilon < 10^{-2}, \quad \frac{|w|}{\sqrt{1-w^2}} = O(\sqrt{r})$$

или  $w^2/(1-w^2) = O(r)$ .

Для дальнейшего не важно направление относительной скорости  $w$ , и в формулах будет встречаться только  $w^2$ .

Вместе с формированием двухчастичного распределения скоростей во Вселенной происходит также фрактальное распределение материи, когда звезды объединяются в галактики, галактики в метагалактики. Однако при конечной жизни Вселенной дальнейшие субобъединения в фракталы не успевают формироваться.

Доплеровский эффект выражается формулой

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2-w^2}}. \quad (13)$$

Здесь  $\lambda$  — длина волны у принимаемой стороны (у наблюдателя на Земле),  $\lambda_0$  — длина волны, исходящей от источника,  $u$  — относительная скорость в направлении к источнику,  $w$  — в перпендикулярном направлении. Астрономические наблюдения показали, что пока отношение (13) не превосходило 5, доплеровский эффект соответствовал закону Хаббла:

$$u = Hr. \quad (14)$$

Это означало расширение Вселенной. При больших значениях указанного отношения мы должны учесть релятивистское измерение и считать, что

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = Hr.$$

В этом случае для далеких объектов из (13) получилось бы

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{1+H^2r^2} + Hr.$$

Однако при приближении к релятивистским скоростям измеренное отношение уменьшилось бы в несколько раз. Это приводит к выводу, что расширение Вселенной более 8 миллиардов лет назад ускорилось. Это время как раз соответствует тому моменту, когда уже требуется учесть релятивистские эффекты для измерения относительных скоростей очень удаленных объектов по закону Хаббла. Для объяснения этих эффектов потребовалось ввести в уравнения ОТО так называемый  $\lambda$ -член и «темную» энергию, расталкивающую материю. В свою очередь, за этим последовало также введение «темной» материи для удержания звезд в галактиках.

Заметим, что наши предположения объясняют эти эффекты без дополнительных сущностей. Согласно нашим предположениям

$$\frac{w}{\sqrt{1-w^2}} = O(\sqrt{r}).$$

Наши эвристические соображения допускают, что это отношение не точное, а имеет распределение, допустим, с вероятностью 0.99 в интервале  $H_1 < 2H = \frac{w^2}{r(1-w^2)} < H_2$ . Заметим также, наблюдения показали, что даже для нерелятивистских скоростей нельзя считать «постоянную» Хаббла фиксированной постоянной: она меняется в некоторых пределах в зависимости от выбранного объекта наблюдения. Как было сказано выше, большие вариации этой величины противоречат некоторым эвристическим соображениям, в то время как большие вариации в распределении двумерной скорости  $w$  вполне допустимы. Для удобства в дальнейшем мы пренебрежем

величиной  $u < 10^{-2}$ . Тогда

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{1 + 2Hr} \approx 1 + Hr \quad (15)$$

(последнее выражение для случая, когда  $Hr \ll 1$  — нерелятивистский случай). Как видно, формула (15) объясняет закон Хаббла о «расширении» без всякого расширения. Мало того, это объясняет даже то, почему астрономам кажется, что «расширение» ускорилося. Действительно, если интерпретировать эффект через  $u$  без  $w$ , нам бы пришлось выдумать, что более 8 миллиардов лет коэффициент «расширения» был меньше, чем сейчас.

Двухчастичное распределение скоростей объясняет также отсутствие зависимости орбитальных скоростей звезд в галактиках от «темной» материи. В [8] указан способ оценки орбитальной скорости по данным доплеровского смещения. Для этого из уравнений Пуассона оцениваются дисперсии скоростей. Они получаются малыми по отношению к измеренным скоростям по доплеровскому сдвигу, и поэтому всю скорость относят к орбитальной за малым исключением. На самом деле здесь не учитывается, что из уравнений Пуассона мы получаем только первичные дисперсии скоростей (для звезд, находящихся на расстояниях порядка средних расстояний между соседними звездами). Согласно вышеприведенным предположениям, для далеких друг относительно друга звезд это не работает. Соответственно, мы не можем считать скорости, получаемые из доплеровского эффекта от Земли, соответствующими орбитальным скоростям. Сама Солнечная система также может иметь большую составляющую, не соответствующую орбитальной скорости.

Мы можем объединить ближайших соседей в одну систему и изучить движение, связанное с этой системой, далее объединить этой систему в еще большие скопления звезд, и т. д. Тогда суммарная дисперсия скоростей может оказаться даже больше, чем то, что мы получили относительно орбитальной скорости, оценивая только первичные дисперсии (на самом низком уровне) из уравнений Пуассона. Заметим, что факт, что в измеренных орбитальных скоростях большую долю составляет разбросы — квадратные корни от дисперсии скоростей, уже объясняет поведение кривых «орбитальных» скоростей в галактиках. Если масса в диске радиуса  $r$  растет линейно по  $r$ , то орбитальные скорости постоянны:

$$v = \sqrt{\frac{rM(r)}{r^2}} = \text{const.}$$

Именно при постоянных орбитальных скоростях перемещение звезд из одной орбиты в соседнюю не меняет импульсов, кинетического момента и соответствует «отсутствию трения» или «равновесности» в приведенном ранее смысле. Соответственно требуется знать точнее распределение  $M(r)$ .

Распределение массы определяют по светимости. Однако тут нет прямой зависимости. Распределение различных по светимости (на единицу массы) звезд вблизи центра и на окраинах разная. При оценке  $M(r)$  в книгах по астрономии это различие считается не существенным. Заметим, что даже при одинаковом свечении для линейного роста  $M(r)$  свечение на расстоянии  $r$  должно падать как  $1/r$ , что мало отличимо от экспоненциального (принимаемого астрономами) убывания. На самом деле светимость падает быстрее при линейном законе, если учесть ее зависимость от температуры примерно как  $O(T^4)$ , принятую для газа. Известно, что вблизи центра галактики много молекул свободного газа, и чем ближе к центру, тем выше ее температура. Вдобавок светимость звезд, т.е. распределение температур поверхности звезд, также различна для звезд, находящихся в более плотных (близких к центру галактики) окружениях по сравнению с отдаленными от центра. Таким образом, в отдалении может быть в процентном отношении меньше светящихся, больше не светящихся объектов, таких как «черные дыры» и множество малых звезд и планетоподобных объектов. Соответственно, авторы ставят под сомнение введение «темной материи» для объяснения кривых орбитальных скоростей. Заметим, что большая часть вводимой «темной материи» требуется для компенсации отталкивания из-за введенной «темной

энергии», необходимость в которой отпала после введенных предположении о двухчастичном распределении скоростей.

Для шарообразных или почти шарообразных галактик при отсутствии «темной» энергии и так не требуется введение значительного количества «темной» массы. Но таких галактик мало (менее 30%). Обычно массы, скопившиеся в галактиках, имеют достаточный кинетический момент, и за счет этого с течением времени расширяются в плоскости вращения и теряют часть размера в направлении оси вращения, образуя более устойчивую дископодобную форму. Когда вращение быстрое, такая форма теряет устойчивость, разрываясь в некоторых частях, и образуются спиралевидные ветки. При вращении появляется «трение», которое пытается уравнивать орбитальные скорости при линейном распределении масс. Хотя распределение масс не вполне соответствует линейному росту, тем не менее, при отказе от учета удаленной дисперсии или двухчастичного распределения скоростей от расстояния астрономы считают, то орбитальные скорости почти постоянны. Так представляются авторам возможные заблуждения астрономов.

В объяснении кривых орбитальных скоростей, по мнению авторов, должны учитываться также электромагнитные силы. Дело в том, что они гораздо сильнее гравитационных: два протона отталкиваются с силой примерно в  $10^{36}$  раз большей, чем притягиваются за счет гравитации. В учебниках по астрономии отмечается, что вблизи центра галактик происходит ионизация (например, сильно нагретого газа). При этом легкие электроны приобретают почти световую скорость и разлетаются даже в межгалактическое пространство. Заметим, что даже при потере одного электрона с каждого из  $10^{18}$ , сила отталкивания оставшихся положительно заряженных ионов примерно равна гравитационному притяжению. Если допустить, что вблизи центра галактики атомы потеряли примерно такое количество электронов, далее — меньше, а в отдаленных звездах — даже больше (пусть незначительно), чем протонов, то это дает еще одно объяснение почти постоянства орбитальных скоростей, даже при малом росте  $M(r)$  (меньшем, чем линейный рост). Таким образом, возможных объяснений парадокса кривых вращения галактик много даже без введения темной материи.

Физики приводят еще один аргумент в пользу темной материи, связанный с линзированием лучей света, проходящих мимо крупных скоплений звезд и галактик. Отчасти темная материя и здесь необходима для удержания от разбегания за счет неправильно введенной «темной» энергии. Вдобавок, по мнению авторов, здесь не учитывается распределение массы из-за сложности учета. Если вычислять линзирование света, поместив всю массу скоплений в одну точку (в некоторый центр масс), то он окажется в несколько раз меньше, чем сумма эффектов линзирования, рассчитанная по распределенным массам вблизи траектории луча.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Феноменологический подход к определению межфазных сил // Докл. РАН. — 2007. — 412, № 1. — С. 44–47.
2. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Общий спектральный подход к динамике сплошной среды // Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — 23. — С. 52–70.
3. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Псевдодифференциальные операторы в теории многофазных многоскоростных течений // Совр. мат. прилож. — 2009. — 65. — С. 11–30.
4. Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Операторы усреднения и реальные уравнения гидромеханики // Совр. мат. прилож. — 2009. — 65. — С. 31–47.
5. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. — М.: Мир, 1981.
6. Ганиев Р. Ф., Украинский Л. Е. Нелинейная волновая механика и технологии. — М.: Институт компьютерных исследований, 2011.
7. Локшин А. А., Суворова Ю. В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
8. Морозов А. Г., Хоперсков А. В. Физика дисков. — Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005.
9. Нигматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978.



10. *Рудяк В. Я.* Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. — Новосибирск: Наука, 1987.
11. *Сластухинский Ю. В.* Математическое моделирование аномальной диффузии с использованием дробно-дифференциальных уравнений и дискретно-элементных моделей/ Дисс. на соискание уч. степ. кандидата физ.-мат. наук. — М., 2013.
12. *Хир К.* Статистическая механика, кинетическая теория и стохастические процессы. — М.: Мир, 1976.
13. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. — М.: Наука, 1979.
14. *Noy A., Park H. G., Fornasiero F., et al.* Nanofluidics in carbon nanotubes// Nano Today. — 2007. — 2 (6).

Р. Р. Айдагулов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru