

## МАЯТНИКОВЫЕ СИСТЕМЫ С ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

© 2016 г. **Б. Я. ЛОКШИН, В. А. САМСОНОВ, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Рассматривается некоторый класс колебательных механических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, содержащими параметры, имеющими знакопеременную диссипацию и обладающими свойством динамической симметрии. Изучаются свойства математических моделей таких систем в зависимости от параметров. Особое внимание уделяется бифуркациям, перестройкам фазовых портретов, возникновению и исчезновению циклов, как охватывающих фазовый цилиндр, так и лежащих целиком на его разветвке.

Проведен полный параметрический анализ одной системы с позиционно-вязким трением и четырьмя параметрами, в которой силовое воздействие зависит линейно от скорости. Построено разбиение пространства параметров на области топологически одинакового поведения системы.

Для некоторых классов маятниковых систем, правые части которых зависят от гладких функций, проведен качественный анализ, т.е. пространство рассматриваемых систем разбито на области с различным поведением траекторий на фазовом цилиндре квазискоростей.

В задаче об аэродинамическом маятнике проведен систематический анализ, обнаружены ранее не отмеченные периодические режимы, которым отвечают циклы в математической модели.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	76
2. Некоторые свойства фазовых траекторий маятниковой системы с динамической симметрией . . . . .	82
3. Колебательная система с позиционно-вязким трением . . . . .	91
4. Полный параметрический анализ одной системы с позиционно-вязким трением и четырьмя параметрами . . . . .	98
5. Полный параметрический анализ одной системы с позиционно-вязким трением и четырьмя параметрами (классификация портретов) . . . . .	103
6. Полный параметрический анализ одной системы с позиционно-вязким трением и четырьмя параметрами (классификация портретов). Продолжение . . . . .	107
7. О некоторых свойствах фазовых траекторий аэродинамического маятника с пластиной вдоль державки . . . . .	122
Список литературы . . . . .	132

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика широкого круга колебательных объектов техники (с одной степенью свободы) может быть описана в рамках одного дифференциального уравнения второго порядка

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, p). \quad (1.1)$$

Его можно интерпретировать как уравнение движения осциллятора с массой  $m$ , на который действует сила  $F(x, \dot{x}, p)$ , зависящая не только от положения, задаваемого координатой  $x$ , но

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 15-01-06970, 14-08-01130, 12-01-00020).

и от скорости  $\dot{x}$ . Кроме того, эта сила, как правило, зависит еще и от одного или нескольких конструктивных параметров объекта, обозначенных в (1.1) символом  $p$ .

Среди уравнений вида (1.1) выделим класс уравнений, описывающих поведение периодических (маятниковых) систем, для которых функция  $F(x, \dot{x}, p)$   $2\pi$ -периодична по координате  $x$  и принадлежит классу  $C^1$  по своим аргументам. Такие системы описывают разнообразные физические маятники, которые, в частности, могут совершать некоторое количество полных оборотов. Для маятниковых систем параметр  $m$  — момент инерции маятника относительно его оси вращения,  $x$  — угловая координата (угол поворота маятника от некоторого фиксированного положения).

Обычно в таких системах имеется возможность достаточно точно задать математическое описание статического силового воздействия (восстанавливающего или опрокидывающего). В частности, оно может быть получено из статических экспериментов. Совершенно по-другому обстоит дело с описанием динамического воздействия, зависящего от скорости движения. Определение, как экспериментальное, так и теоретическое на основе использования тех или иных гипотез, диссипативного или антидиссипативного (разрушающего) силового воздействия на движущийся объект вызывает большие сложности. Тем не менее, изучение поведения «в большом» систем с переменной диссипацией имеет важное прикладное значение (см., например, [13, 5, 22, 9, 15]).

Математическая модель силового воздействия, зависящего от скорости, обычно носит эвристический характер и содержит параметры. Изучение фазовых портретов системы в зависимости от значений параметров позволяет определить границы области значений параметров, для которых поведение системы отображается адекватно экспериментальным наблюдениям, а также выявить области недопустимых значений параметров, для которых создаваемая математическая модель не годится категорически.

**1.1. Общие рассуждения.** Уравнение (1.1) представим в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x, y, p). \end{cases} \quad (1.2)$$

Зависимость силы  $f(x, y, p)$  от положения при нулевой скорости (так сказать, ее позиционная составляющая), т.е. функция  $f_0(x, p) = f(x, 0, p)$ , позволяет определить положения равновесия маятника с помощью уравнения

$$f_0(x, p) = 0. \quad (1.3)$$

Решение  $x_*(p)$  уравнения (1.3) дает возможность проследить за изменением положений равновесия (точек покоя  $(x_*(p), 0)$  на фазовой плоскости  $\mathbb{R}^2\{x, y\}$ ) при изменении параметров  $p$ , за возникновением, исчезновением и ветвлением этих решений.

Отметим, что сила  $f_0(x, p)$  потенциальна и может быть измерена в результате прямых весовых (статических) экспериментов с объектом (по крайней мере, теоретически).

Положение равновесия называют «статически устойчивым», если  $f'_{0x}(x_*(p), p) < 0$ , т.е. когда позиционная сила имеет «притягивающий» характер.

**1.2. Скоростная сила.** Для определения характера устойчивости равновесия *изолированного* решения  $x_*(p)$  уравнения (1.3) нужно знать, как сила  $f(x, y, p)$  зависит от скорости  $y$ . Следуя [1], выделим в силе  $f(x, y, p)$  ее «скоростную» составляющую

$$\Phi(x, y, p) = f(x, y, p) - f_0(x, p).$$

Очевидно,

$$\Phi(x, 0, p) \equiv 0. \quad (1.4)$$

В силу (1.4) скоростная сила  $\Phi(x, y, p)$  при малых значениях  $y$ , вообще говоря, может быть представлена в виде

$$\Phi(x, y, p) = \Phi_0(x, p)y + \bar{o}(y), \quad (1.5)$$

где

$$\Phi_0(x, p) = \Phi'_y|_{y=0}.$$

В традиционных задачах теории колебаний обычно учитываются силы «вязкого» трения, которые линейны по  $y$ , т.е. считают, что

$$\Phi = -hy, \quad h > 0. \quad (1.6)$$

При действии таких сил решение  $x(t)$  уравнения (1.1) существует на всем интервале изменения времени  $-\infty < t < +\infty$ , т.е. движение совершается «вечно». Заметим, что при  $t \rightarrow -\infty$  (в обратном времени) если  $|y(t)| \rightarrow \infty$ , то и  $|x(t)| \rightarrow \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$ . Это означает, что если функция  $f$  — периодическая по  $x$  с периодом  $T_1$ , т.е.  $f(x+T_1, y, p) = f(x, y, p)$  для любых допустимых  $x, y, p$ , то соответствующая часть любой такой траектории имеет винтовой (с конечным шагом) характер на фазовом цилиндре  $\mathbb{S}^1\{x \pmod{T_1}\} \times \mathbb{R}^1\{y\}$ , а маятник совершал (в прошлом) бесконечное число оборотов.

Если обратиться к исследованию «будущего» движения маятника (при  $t \rightarrow +\infty$ ), то обнаружим, что с ростом времени имеем  $|y(t)| \rightarrow 0$ , а  $x(t)$  стремится к некоторому значению  $x_*$ , отвечающему статически устойчивому положению равновесия, монотонно или совершая около этого значения затухающие колебания.

**1.3. Квадратичная и кубическая скоростная сила.** В прикладных задачах гидро- или аэродинамики силы сопротивления обычно зависят от скорости квадратичным образом, т.е.  $\Phi \sim y^2$  при  $|y| > M$ , где  $M$  — достаточно большое число.

Рассмотрим следующий пример:

$$\Phi = -hy^2 \operatorname{sign} y, \quad h > 0, \quad \Phi_0 \equiv 0.$$

Тогда  $|y(t)| \rightarrow \infty$  при  $x(t) \rightarrow -\infty$ , т.е. поведение траектории на верхней части фазового цилиндра такое же, как и при линейном сопротивлении. Однако движение маятника не обладает достаточно отдаленным «прошлым», так как выход в «обратном времени» координат на бесконечные значения происходит в конечный момент  $T$  времени  $-\infty < T < t_0$ . При этом если  $t \rightarrow +\infty$ , то имеем  $|y(t)| \rightarrow 0$ , но  $x(t) \rightarrow \infty$  в отличие от случая линейного сопротивления.

При более высокой степени, например, при  $\Phi = -hy^3$ , та траектория  $x(t), y(t)$ , для которой в обратном времени  $|y(t)| \rightarrow \infty$ , существует не только на конечном предшествующем интервале времени  $(T, t_0)$ , но и даже на ограниченном интервале  $(X, x_0)$  значений координаты  $x$  (здесь  $X > -\infty$ ). Это означает, что на фазовом цилиндре существуют траектории с вертикальными асимптотами (при  $|y(t)| \rightarrow \infty$ ).

**1.4. Основное условие на скоростную силу.** В литературе обычно обсуждаются те виды скоростной силы  $\Phi(x, y, a)$ , которые обладают свойством диссипативности, т.е.

$$y\Phi < 0, \quad y \neq 0. \quad (1.7)$$

Если же в неравенстве (1.7) поменять знак на противоположный, то зависимость силы  $\Phi$  от скорости носит «антидиссипативный» характер, что заведомо обеспечивает неустойчивость равновесия. Такое свойство силы представляется настолько неестественным, что в традиционной литературе по качественной теории дифференциальных уравнений даже не обсуждается.

Однако такие известные явления, как «галопирование», «пляска проводов», описание которых можно найти в нескольких трудах по колебаниям, например, в [12], и объясняются этим свойством аэродинамической силы.

В простых случаях это может выражаться в смене знака коэффициента  $h$  в формуле (1.6) или условия  $\Phi_0(x, p) > 0$  в (1.5). При этом следует считаться с возможностью отсутствия у такой системы «отдаленного будущего», т.е. непродолжимости решения на интервал  $(T, +\infty)$ . В теории дифференциальных уравнений такое свойство решений иногда называют «режимом с обострением».

В последующем изложении ограничимся предположением, что

$$|\Phi| \leq By^2$$

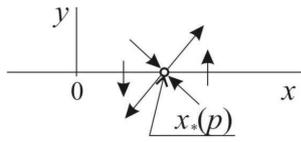


Рис. 1

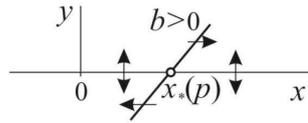


Рис. 2

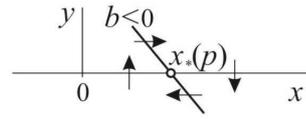


Рис. 3

при  $|y| > M$ , где  $M$  — некоторая достаточно большая постоянная, а  $B$  — некоторое конечное число.

Те случаи, когда свойство диссипативности (или антидиссипативности) скоростной силы  $\Phi$  проявляется на фазовом цилиндре при достаточно больших значениях  $|y|$ , будем однозначно трактовать в терминах: «бесконечность» *отталкивает* (или *притягивает*).

**1.5. Некоторые свойства фазового потока.** Для уравнения (1.1) обычно обсуждают более детальные свойства фазового потока, т.е. направления вектора фазовой скорости в различных областях (фазовой) плоскости  $\mathbb{R}^2\{x, \dot{x}\}$  (или полосы  $\{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < x < \pi\}$  — развёртки фазового цилиндра).

*1.5.1. Окрестность седловой точки.* Множество точек фазовой плоскости, в которых вектор фазовой скорости вертикален (параллелен оси  $Oy$ ), определяется условием  $\dot{x} = y = 0$ , т.е. это точки оси  $Ox$ . Если в точке равновесия  $x_*(p)$  происходит смена направления этого вектора так, что справа от точки  $x_*(p)$  он направлен вверх, а слева вниз, то это положение равновесия неустойчиво, а неподвижная точка  $(x_*(p), 0)$  — седловая (рис. 1).

*1.5.2. Условие неустойчивости.* Множество точек фазовой плоскости, в которых вектор фазовой скорости горизонтален (параллелен оси  $Ox$ ), определяется условием  $\dot{y} = 0$ , т.е. уравнением

$$f(x, y) = 0. \tag{1.8}$$

(Здесь и ниже зависимость от параметров  $p$  подразумевается, хотя для простоты записи не всегда указывается явно.)

Вообще говоря, уравнение (1.8) определяет в окрестности точки  $(x_*(p), 0)$  прямую

$$y = b(x - x_*(p)). \tag{1.9}$$

Если  $b > 0$ , то положение равновесия неустойчиво независимо от того, как направлен (вверх или вниз) вектор фазовой скорости при  $y = 0, x \neq x_*$  (рис. 2).

*1.5.3. Условия устойчивости.* Если

$$b < 0, \quad \Phi_0(x_*) \neq 0, \quad f'_{0x}(x_*) \neq 0,$$

а направления векторов фазовых скоростей соответствуют рис. 3, то положение равновесия асимптотически устойчиво.

**1.6. Периодические траектории различного типа на фазовом цилиндре.** Отметим, что характер зависимости аэродинамической силы от скорости объекта невозможно определить прямыми (весовыми, статическими) измерениями силы. Эта зависимость проявляется лишь в движении, что составляет одну из важнейших проблем экспериментальной аэродинамики.

В прикладном аспекте теории нелинейных колебательных систем важное место занимает вопрос как о вынужденных периодических колебаниях с конечной (не малой) амплитудой, так и об автоколебаниях, как притягивающих (аттракторов), так и отталкивающих (репеллеров). Для маятниковых систем возможны периодические движения как колебательного типа (автоколебания) так и вращательного типа (авторотации). Поскольку именно замкнутым траекториям отвечают наиболее интересные в прикладном отношении автоколебательные или ротационные движения исходной системы, исследование вопросов существования или отсутствия замкнутых фазовых

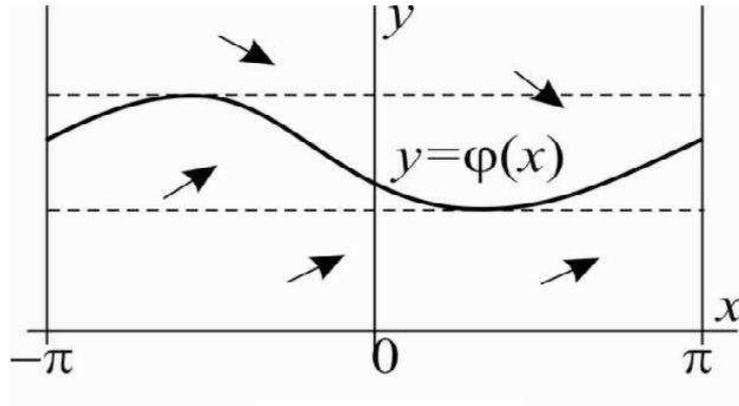


Рис. 4

траекторий имеет особое значение. При этом первые траектории мы будем также называть *стягиваемыми по фазовому цилиндру в точку*, а вторые — не стягиваемыми или *охватывающими фазовый цилиндр* (см. [16, 21, 23]). Более того, на фазовом цилиндре оба типа траекторий являются периодическими.

Анализ обоих типов периодических движений маятниковых систем представляет значительные трудности. В то же время, для поиска таких типов траекторий существуют некоторые простые приемы.

*1.6.1. Одна из предельных ситуаций.* Фазовое пространство маятниковой системы с одной степенью свободы — двумерный цилиндр, представляемый на плоскости  $\mathbb{R}^2\{x, y\}$  обычно в виде неограниченной по  $y$  полосы

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < x \leq \pi\}$$

(развертки фазового цилиндра). Некоторую полезную информацию могут нести те линии в этой полосе, которые определяются уравнением

$$f(x, y, p) = 0. \quad (1.10)$$

Это равенство определяет множество  $\Gamma$  линий

$$y = \varphi_i(x, p),$$

где  $\varphi_i$  — функции,  $2\pi$ -периодические по  $x$ . Через каждую точку покоя  $(x_*(p), 0)$  проходит какая-либо из этих линий.

Допустим, что среди этих линий имеется одна непрерывная периодическая ветвь  $y = \varphi(x, p)$ , пересекающая фазовую полосу (рис. 4). Допустим для определенности, что  $f < 0$  в области  $y > \max_x \varphi(x, p)$  и  $f > 0$  при  $y < \min_x \varphi(x, p)$ . Тогда при достаточно малом значении параметра  $m$  в уравнении (1.1) (т.е. когда в этом уравнении имеется малый параметр при старшей производной) именно эта кривая может служить хорошей оценкой для фазовой траектории притягивающего режима авторотации. Так же очевидно, что в этом случае не существуют режимы авторотации, целиком лежащие в указанных областях.

*1.6.2. Другая из предельных ситуаций.* Обратимся теперь к другой предельной ситуации:  $m \rightarrow \infty$ . В этом случае уравнение (1.1) содержит малый параметр в правой части. При  $m = \infty$  уравнение (1.1) имеет в качестве совокупности «порождающих» ротаций систему

$$y(t) \equiv y(0) = \text{const} = b.$$

Для достаточно больших значений  $m$  метод осреднения в первом приближении позволяет оценить направление эволюции (рост или убывание) медленной переменной  $y(t)$  с помощью знака

выражения

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x, b, p) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x, b, p) dx + \bar{f}_0, \quad (1.11)$$

где  $\bar{f}_0$  — среднее за период значение позиционной составляющей силы  $f_0$ :

$$\bar{f}_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(x, p) dx.$$

В случае  $\bar{f}_0 = 0$  знак выражения (1.11) определяется свойством скоростной силы  $\Phi(x, b, p)$ , которое можно назвать «диссипативностью (антидиссипативностью) в среднем».

В той области положительных значений параметра  $b$ , где

$$\int_0^{2\pi/b} \Phi(bt, b, p) dt < 0 \quad (> 0),$$

скоростная сила  $\Phi$  диссипативна (антидиссипативна) в среднем, и значение медленной переменной  $y$  убывает (возрастает).

То значение  $b_*(p)$ , при котором

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x, b_*(p), p) dx = 0, \quad (1.12)$$

дает оценку периодической траектории авторотации маятника.

Очевидно, что в указанном выше случае существования кривой  $y = \varphi(p, x)$  имеем

$$\min_x \varphi(x, p) < b_* < \max_x \varphi(x, p).$$

**1.6.3. Замечания.** Анализ свойств фазовых траекторий уравнения (1.1) в общем случае весьма сложен. Авторы ограничились некоторыми конкретными типами этого уравнения, для которых существует набор содержательных (модельных) задач.

Обычно у конкретных механических систем параметр  $m \neq 0$  имеет некоторое конечное значение. Переходя к нормированным значениям параметров и переменных, можно принять  $m = 1$ , что и используется в последующем изложении.

**1.7. Системы с динамическими симметриями.** Среди механических маятниковых систем выделяется класс систем, обладающих свойством так называемой *динамической симметрии*. Под этим свойством понимается существование «парности» возможных движений механической системы: каждому движению системы «в одну сторону» отвечает «симметричное» ему движение «в другую сторону» (с таким же успехом это движение можно называть и «антисимметричным»). Примеры конкретных механических объектов с этим свойством имеются в [13, 5, 22, 9, 15].

Представляется целесообразным обобщить ранее полученные результаты и сформулировать некоторые общие свойства маятниковых систем с динамической симметрией. Особое внимание будет уделяться анализу наличия аттракторов и репеллеров: точек покоя, которым отвечают состояния равновесия системы или балансировочные режимы движения, замкнутых траекторий, лежащих на развертке фазового цилиндра, т.е. циклов, которым отвечают периодические (колебательные) движения системы, и замкнутых траекторий, охватывающих фазовый цилиндр, т.е. циклов, которым отвечают периодические (ротационные) движения системы.

В дальнейшем устойчивые точки покоя будем отмечать значком «+» сверху, неустойчивые (типа узел или фокус) — значком «-», седловые — значком «x», устойчивые и неустойчивые циклы первого типа —  $C^+$  и  $C^-$  соответственно, циклы второго типа —  $R^+$  и  $R^-$  соответственно, притягивающую и отталкивающую «бесконечности» (см. раздел 1.4) —  $\infty^+$  и  $\infty^-$  соответственно.

## 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ МАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ С ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

**2.1. Свойство динамической симметрии.** Будем считать, что математическую модель рассматриваемой системы можно представить в виде совокупности дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x, y, p), \end{cases} \quad (2.1)$$

где через  $p$  обозначены параметры системы, принимающие значения из некоторого множества  $A \subseteq \mathbb{R}^k$   $k$ -мерного пространства, а  $f(x, y, p)$  —  $2\pi$ -периодическая по переменной  $x$  функция, удовлетворяющая условию

$$f(-x, -y, p) = -f(x, y, p),$$

отражающему свойство динамической симметрии.

Такая модель использовалась ранее при анализе задач о движении аэродинамического маятника с пластинкой вдоль державки [13, 12], о движении аэродинамического маятника с пластинкой поперек державки [5, 10, 12], о движении в среде тела с плоским торцом [22], о колебаниях динамической системы с позиционно-вязким трением [1], а также в работе [3] как некоторый математический объект, но иногда без учета свойства динамической симметрии. Во всех указанных работах функция  $f(x, y, p)$  обладала также свойством  $2\pi$ -периодичности по переменной  $x$ , что позволяло в качестве фазового пространства использовать фазовый цилиндр или его развертку на плоскость. Таким образом, система (2.1) при указанных предположениях относительно функции  $f(x, y, p)$  описывает поведение маятниковой механической системы, а сама функция  $f(x, y, p)$  выступает как математическая модель момента, действующего на эту механическую систему, включающая позиционную (потенциальную и непотенциальную), диссипативную и антидиссипативную составляющие (в общем случае, не аддитивные).

Будем считать, что функция  $f(x, y, p)$  определена и непрерывна для всех значений аргументов и для всех  $p \in A$  имеет непрерывные частные производные первого порядка. В частности,  $f(0, 0, p) = 0$  для всех  $p \in A$ .

**2.2. Точки покоя.** Из указанных свойств следует, что начало координат (точка  $O = (0, 0)$ ) является точкой покоя системы (2.1). Ясно, что и точки  $(\pm 2\pi, 0)$ ,  $(\pm 4\pi, 0)$  и т. д. также являются точками покоя. На фазовом цилиндре они совпадают с точкой  $O$ . Из этих же свойств следует, что если пара функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  является решением системы уравнений (2.1) при некотором наборе параметров  $p \in A$ , то и пара  $-x(t)$ ,  $-y(t)$  также является решением этой системы при том же наборе параметров. Это означает, что фазовая плоскость переменных  $(x, y)$  заполнена парами фазовых траекторий, симметричных относительно начала координат.

В частности, если при некотором значении параметра  $p$  существует отличная от начала координат точка покоя  $Q_1 = (\bar{x}, 0)$ , то точка  $Q_2 = (-\bar{x}, 0)$  также является точкой покоя системы при том же значении параметра. Таким образом, точки покоя рассматриваемой системы, не совпадающие с началом координат  $O$ , могут существовать только парами  $Q_{1,2} = (\pm \bar{x}, 0)$ . Отметим, что все точки покоя рассматриваемой системы лежат на оси  $Ox$ .

Покажем, что точки  $P_1 = (-\pi, 0)$  и  $P_2 = (\pi, 0)$  также являются точками покоя для нашей системы. Действительно, если предположить, что  $f(\pi, 0) > 0$  (опустим для простоты записи зависимость функции  $f(x, y, p)$  от параметров), то, с одной стороны, в силу периодичности имеем  $f(-\pi, 0) > 0$ , а с другой стороны, в силу динамической симметрии, имеем  $f(-\pi, 0) < 0$ . Противоречие устраняется только в том случае, если справедливы равенства  $f(\pi, 0) = 0 = f(-\pi, 0)$ , т.е. точки  $P_{1,2} = (\pm \pi, 0)$  суть точки покоя.

Следовательно, в системе (2.1) при сделанных предположениях заведомо имеются точки покоя  $O = (0, 0)$ ,  $P_1 = (-\pi, 0)$ ,  $P_2 = (\pi, 0)$  и  $2\pi$ -кратные им, и, возможно, еще пары точек  $Q_{1,2} = (\pm \bar{x}, 0)$ , не совпадающие с перечисленными, и также  $2\pi$ -кратные им.

**2.3. Изоклины горизонтального направления.** На (фазовой) плоскости  $\mathbb{R}^2\{x, y\}$  равенством  $f(x, y) = 0$  определяется «антисимметричное» множество  $\Gamma$  точек, описываемое одной или несколькими кривыми (*изоклинами горизонтального направления*)  $y = \varphi_i(x)$ , где функции  $\varphi_i(x)$  —  $2\pi$ -периодические нечетные функции<sup>1</sup>. Ясно, что через каждую точку покоя проходит, по крайней мере, одна из этих кривых. Эти кривые, могут быть определены на всем интервале  $[-\pi, \pi]$  или только на его части, могут иметь разрывы первого или второго рода, но при этом сохраняется их антисимметричность.

**2.4. Случай однозначности.** Рассмотрим случай, когда множество  $\Gamma$  описывается однозначной функцией  $y = \varphi(x)$ , непрерывной и определенной для всех  $x$  из диапазона  $[-\pi, \pi]$ . В этом случае кривая  $y = \varphi(x)$  (*единственная изоклина горизонтального направления*) проходит через все точки покоя и разделяет область возрастания и область убывания координаты  $y$  вдоль фазовых траекторий.

Если выше линии  $y = \varphi(x)$  имеет место неравенство  $f(x, y) < 0$ , то исходная система диссипативна в большом. Отметим также, что в этом случае во всех точках кривой  $y = \varphi(x)$  выполняется неравенство  $f'_y(x, y) < 0$ , в том числе и в точках покоя.

*2.4.1. Характеристическое уравнение.* Для анализа устойчивости любой точки покоя рассматриваемой системы имеем характеристическое уравнение вида

$$\lambda^2 - f'_y\lambda - f'_x = 0,$$

где частные производные вычисляются в соответствующей точке покоя. Отсюда видно, что, во-первых, одно из условий устойчивости ( $f'_y(x, y) < 0$ ) выполняется и, во-вторых, в системе не могут существовать неустойчивые точки покоя типа фокус или узел, они могут быть только точками седлового типа.

Таким образом, если на фазовом цилиндре отсутствуют другие точки покоя, кроме начала координат  $O$  и точки  $P$  (точка совпадения точек  $P_1$  и  $P_2$ ), то заведомо одна из этих точек устойчива, а другая — седловая (значения  $f'_x$ , вычисленные в точке  $O$  и в точке  $P$ , имеют разные знаки). Никаких других вариантов в этом случае нет.

*2.4.2. Об отсутствии периодических траекторий.* В рассматриваемом случае можно сформулировать и некоторые утверждения относительно замкнутых фазовых траекторий.

Во-первых, ясно, что поскольку на антисимметричной кривой  $y = \varphi(x)$  выполняется неравенство  $f'_y(x, y) < 0$ , то существует область, симметричная относительно начала координат, содержащая целиком эту кривую (если эта область ограничена, то уравнение границы этой области имеет вид  $f'_y(x, y) = 0$ ). Согласно критерию Бендиксона в этой области заведомо отсутствуют замкнутые фазовые траектории типа циклов  $C$ .

Во-вторых, ясно, что в областях, где

$$|y| > \varphi_m = \max_{-\pi \leq x \leq \pi} \varphi(x),$$

в которых модуль координаты  $y$  монотонно убывает, заведомо отсутствуют замкнутые фазовые траектории типа циклов  $R$ .

Сформулируем, следуя [1], еще одно условие отсутствия циклов в системе (2.1), основанное на использовании функции Ляпунова. Справедливо следующее утверждение. Пусть на плоскости  $\mathbb{R}^2\{x, y\}$  существует непрерывная однозначная неотрицательная функция  $V(x, y)$  такая, что ее производная по времени, взятая в силу уравнений (2.1), отрицательна, причем множество

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x, y)|_{(2.1)} = 0\}$$

<sup>1</sup>Прилагательное «фазовая» взято в скобки по причине того, что плоскость  $\mathbb{R}^2\{x, y\}$  является координатной, но не фазовой. В данном случае фазовым пространством системы является фазовый цилиндр  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \pmod{2\pi}\}$ .

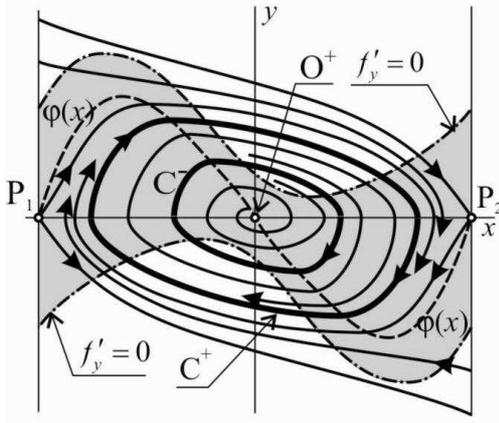


Рис. 5

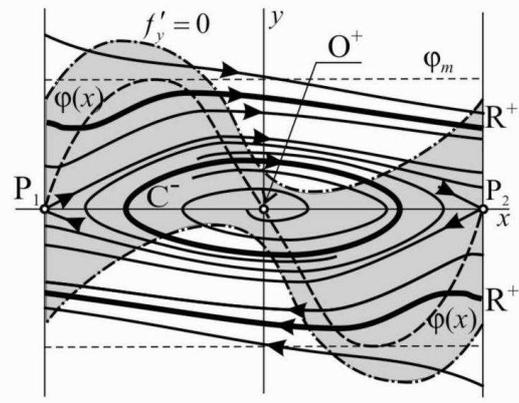


Рис. 6

не содержит целых траекторий. Тогда система (2.1) не имеет предельных циклов типа  $C$ . Если при этом функция  $V(x, y)$  периодическая по  $x$  с периодом  $2\pi$ , то в системе (2.1) отсутствуют и предельные циклы типа  $R$ .

Отметим, наконец, еще одну особенность систем вида (2.1). Если наряду с указанными выше свойствами функция  $f(x, y)$  обладает свойством антисимметрии (некоторой зеркальной симметрии) по  $x$  относительно прямых  $x = \pm\pi/2$ , так что

$$f\left(\pm\frac{\pi}{2} + x, y\right) = -f\left(\pm\frac{\pi}{2} - x, y\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

то этим же свойством будет обладать и поле фазовых скоростей. Следствием этого является то, что фазовые траектории будут (зеркально) симметричны относительно прямых  $x = \pm\pi/2$ . Это означает, в свою очередь, что в этом случае система (2.1) не имеет никаких предельных замкнутых траекторий: ни циклов типа  $C$ , ни циклов типа  $R$ .

**2.4.3. Существование периодических траекторий.** Вне выше указанных областей, вообще говоря, могут существовать замкнутые фазовые траектории. Рассмотрим подробнее эту ситуацию.

Пусть  $f(x, y) = 0$  только в точках  $O$  и  $P$  (напомним, что одна из них седловая). Предположим, что существует цикл  $C$ . Тогда внутри его может находиться только устойчивая точка ( $O^+$  или  $P^+$ ). Следовательно, этот цикл неустойчив. Но тогда в силу диссипативности системы в среднем должен существовать, по крайней мере, еще один цикл, устойчивый (типа  $C^+$  или типа  $R^+$ ). При этом циклы  $C^-$  и  $C^+$  должны частично лежать вне области, ограниченной уравнением  $f'_y = 0$ , а цикл  $R^+$  — в полосе  $|y| < \varphi_m$ . Примеры таких фазовых портретов представлены на рис. 5 и 6.

Пусть теперь  $f(x, y) = 0$  только в точках  $O$  и  $P$ , но существует замкнутая фазовая траектория типа  $R$ , охватывающая фазовый цилиндр, например, в области  $0 < y < \varphi_m$ . Тогда вследствие динамической симметрии существует и замкнутая симметричная траектория в области  $-\varphi_m < y < 0$ . В силу диссипативности системы обе эти фазовые траектории являются аттракторами системы, т.е. они относятся к типу  $R^+$ . Но аттрактором является и одна из точек покоя, лежащая между ними. Следовательно, существует еще по крайней мере одна пара антисимметричных неустойчивых циклов типа  $R^-$  или неустойчивый цикл типа  $C^-$ , которые разделяют области притяжения указанных аттракторов. Примеры таких фазовых портретов качественно представлены на рис. 6 и 7. Жирными линиями выделены циклы, пунктирной линией изображена линия  $y = \varphi(x)$ ; область, где выполняется условие  $f'_y(x, y) < 0$ , закрашена.

**2.5. Эволюция фазовых портретов.** С практической точки зрения представляет особый интерес проследить эволюцию фазовых портретов системы (2.1) при изменении параметров. В

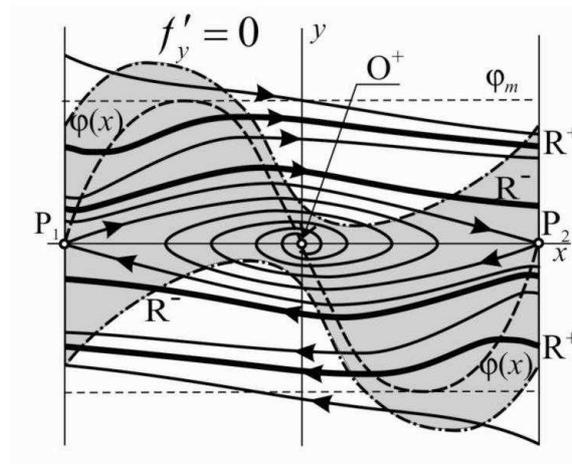


Рис. 7

общем виде это сделать, очень затруднительно. Поэтому рассмотрим сначала несколько частных случаев, увеличивая постепенно сложность функции  $f(x, y, p)$ .

2.5.1. *Некоторые системы маятникового типа.* Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -y - \sin x(a - \cos x). \end{cases} \quad (2.2)$$

Уравнениями такого вида при  $a \in (0, 1)$  описываются, например, колебания маятника, горизонтальная ось подвеса которого совершает равномерное вращение с постоянной угловой скоростью вокруг вертикали (известный регулятор Уатта, см. [8]).

Здесь (в обозначениях введения) имеет место аддитивная суперпозиция позиционной «силы»

$$F_0(x, a) = \sin x(a - \cos x)$$

и диссипативной скоростной силы

$$\Phi(x, y, a) = y.$$

Введенная выше функция  $\varphi(x)$  в данном случае имеет вид

$$\varphi(x) = -\sin x(a - \cos x).$$

При  $|a| \geq 1$  эта периодическая функция на периоде  $-\pi \leq x \leq \pi$  обращается в нуль только в точках  $x = 0$  и  $x = \pm\pi$ . Если  $|a| < 1$ , то функция  $\varphi(x)$  имеет еще пару симметричных корней  $\pm\bar{x}$ , где  $\bar{x} = \arccos a$ .

Отметим еще одну особенность системы уравнений (2.2). Если  $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$  — решение этой системы при некотором значении  $a = \tilde{a}$ , то при значении параметра  $a = -\tilde{a}$  существует решение  $\tilde{x}(t) + \pi, \tilde{y}(t)$ . Таким образом, все решения системы (2.2) при  $a = -\tilde{a}$  получаются из решений этого уравнения при  $a = \tilde{a}$  простым сдвигом на  $\pi$  переменной  $x$ . Это означает, что достаточно рассмотреть только неотрицательные значения  $a$ , так что в дальнейшем будем считать, что  $a \geq 0$ .

Переходим к анализу фазового портрета системы (2.2). Если не будет специальной оговорки, под фазовой плоскостью будем подразумевать полосу

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi\},$$

т.е. развертку фазового цилиндра на плоскость.

Итак, пусть сначала  $a > 1$ . Как и следовало ожидать, в полосе  $D$  имеются три точки покоя  $O(0, 0), P_1 = (-\pi, 0)$  и  $P_2 = (\pi, 0)$ . Ясно, что точки  $P_1$  и  $P_2$  — это одна «разрезанная» точка на фазовом цилиндре. Поскольку других точек покоя в этом случае нет, то одна из них устойчивая, а другая — седловая (неустойчивая). Легко проверить, что начало координат — асимптотически

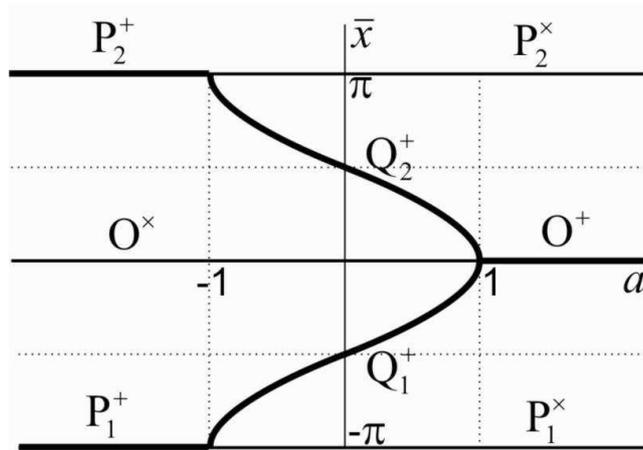


Рис. 8

(даже экспоненциально) устойчивая точка покоя, а точки  $P$  — седловые (так что с учетом введенных обозначений ситуацию можно описать таким образом:  $O^+$ ,  $P_1^x$ ,  $P_2^x$ ,  $\infty^-$ ).

Рассмотрим подробнее случай  $a = 1$ . Точки  $P_k$ ,  $k = 1, 2$ , остаются седловыми, точка  $O$  асимптотически устойчива, но не экспоненциально, поскольку один из корней соответствующего характеристического уравнения равен нулю. Уравнения малых отклонений относительно точки  $O$  имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -y - x^3/2. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция  $V(x, y) = x^4 + 4y^2$  является функцией Ляпунова для этой системы, что и доказывает устойчивость точки  $O$  (не экспоненциальную; тем не менее, опять имеет место ситуация  $O^+$ ,  $P_1^x$ ,  $P_2^x$ ,  $\infty^-$ ).

Пусть теперь  $0 < a < 1$ . В этом случае, кроме точек  $O$  и  $P_k$ ,  $k = 1, 2$ , в полосе  $D$  существуют еще две точки покоя  $Q_1 = (-\bar{x}, 0)$  и  $Q_2 = (\bar{x}, 0)$ . При уменьшении значения  $a$  от 1 точки  $Q_k$ ,  $k = 1, 2$ , раздвигаются, так что значение  $\bar{x}$  стремится к  $\pi/2$  при  $a \rightarrow 0$ .

Из уравнений малых колебаний около точек покоя легко видно, что в этом случае точки  $O$  и  $P$  неустойчивы (седловые), а точки  $Q_k$ ,  $k = 1, 2$ , экспоненциально устойчивы, так что в этом случае имеем  $O^x$ ,  $P_1^x$ ,  $P_2^x$ ,  $Q_1^+$ ,  $Q_2^+$ ,  $\infty^-$ . Таким образом, при переходе значения  $a = 1$  (в сторону уменьшения), во-первых, вместо одной точки покоя  $O$  имеем три точки покоя и, во-вторых, сама точка  $O$  теряет устойчивость; при  $a = 1$  происходит бифуркация состояния покоя.

Пусть, наконец,  $a = 0$ . В этом случае никаких новых особенностей по сравнению с предыдущим случаем не возникает. Все так же имеем  $O^x$ ,  $P_1^x$ ,  $P_2^x$ ,  $Q_1^+$ ,  $Q_2^+$ ,  $\infty^-$ . При этом  $\bar{x} = \pi/2$ , а система (2.2) и ее фазовый портрет антисимметричны не только относительно начала координат, но и относительно точек  $Q_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Как видим, во всех случаях бесконечность носит отталкивающий характер. На рис. 8 представлена бифуркационная диаграмма положений равновесия (точек покоя). Устойчивые состояния выделены более жирной линией. Для полноты картины представлены и отрицательные значения параметра  $a$ . Отметим, что аналогичная бифуркационная диаграмма была построена при анализе положений равновесия аэродинамического маятника с пластинкой, расположенной вдоль державки (см. [13]).

Таким образом, с точками покоя мы разобрались. Чтобы определиться с областями притяжения этих точек, необходимо установить наличие циклов и определить их характеристики или установить их отсутствие.

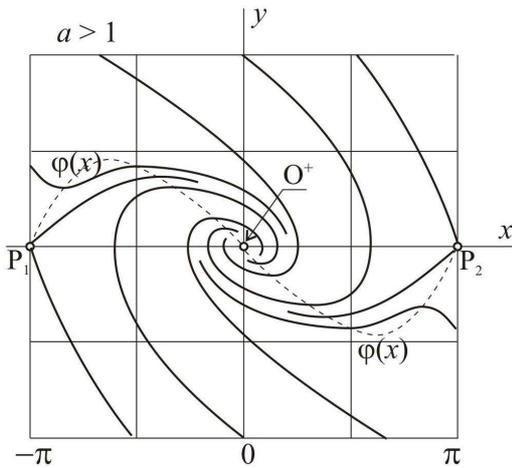


Рис. 9

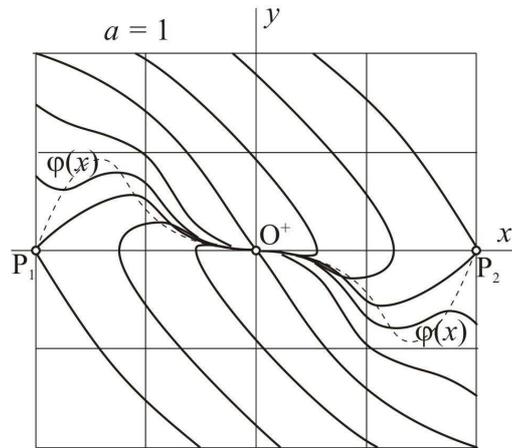


Рис. 10

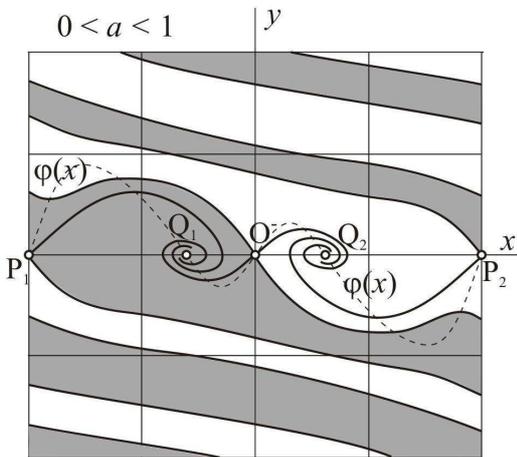


Рис. 11

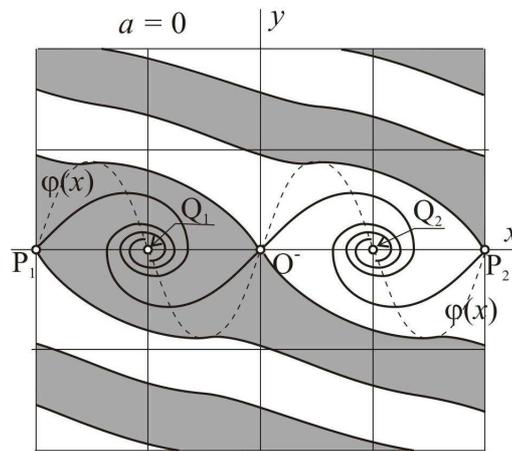


Рис. 12

Прежде всего, отметим, что для рассматриваемого уравнения имеем  $f'_y = -1 < 0$  всюду в полосе  $D$ . Следовательно, в системе (2.2) отсутствуют циклы типа  $C$ . Чтобы убедиться в отсутствии циклов типа  $R$ , рассмотрим однозначную неотрицательную  $2\pi$ -периодическую функцию

$$V(x, y) = y^2 + 2a(1 - \cos x) + \cos^2 x.$$

Ее производная, вычисленная в силу уравнений (2.2), равна

$$\dot{V}(x, y)|_{(2.2)} = -2y^2.$$

Уравнение

$$\dot{V}(x, y)|_{(2.2)} = 0$$

не содержит целых траекторий (кроме точек покоя). Следовательно, в системе (2.2) отсутствуют и циклы типа  $R$ .

Итак, при любых значениях параметра  $a$  множество аттракторов и репеллеров системы (2.2) содержит только найденные точки покоя, а сама система диссипативна в большом, имеет место «тотальная» диссипация.

Изложенной информации достаточно для представления вида фазового портрета. На рис. 9–12 качественно изображены фазовые портреты в зависимости от характерных значений  $a$ .

На этих рисунках пунктирной линией отмечена кривая  $y = \varphi(x)$ . Для наглядности масштабы по вертикали не одинаковы для разных значений  $a$ . В случаях  $a \geq 1$  аттрактор единственный, и его областью притяжения является вся полоса  $D$ . При  $a \in [0, 1)$  в полосе  $D$  существуют два аттрактора, область притяжения одного из них закрашена, сепаратрисы седловых точек  $P$  и  $O$  разделяют области притяжения точек  $Q_k$ ,  $k = 1, 2$ .

В заключение отметим что, аналогичное рассмотрение позволяет наблюдать эволюцию фазовых портретов и для системы типа устойчивого перевернутого маятника (например, вертикальный спуск системы груз-парашют, см. [10]), описываемой уравнением

$$\ddot{x} = -\dot{x} + \sin x(a - \cos x).$$

В этом случае для  $a \geq 1$  имеет место ситуация  $P_1^+$ ,  $O^x$ ,  $P_2^+$ , а для  $0 \leq a < 1$  — ситуация  $P_1^+$ ,  $Q_1^x$ ,  $O^+$ ,  $Q_2^x$ ,  $P_2^+$ , причем сепаратрисы седловых точек  $Q_k$ ,  $k = 1, 2$ , разделяют области притяжения точек  $O$  и  $P$ . Соответствующие иллюстрации здесь не приводятся.

*2.5.2. Система типа аэродинамического маятника.* В предыдущем пункте диссипация системы (2.2) обеспечивалась постоянством знака коэффициента при производной  $y$ . Более интересным представляется случай, когда этот коэффициент знакопеременный и меняет знак в зависимости от координаты  $x$  (знакопеременная диссипация). Рассмотрим пример такой системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay \cos x - b \sin x \cos x, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $a, b$  — некоторые параметры. Эта система уравнений также является частным случаем системы (2.1), если положить

$$f(x, y, p) = -ay \cos x - b \sin x \cos x.$$

Такая функция принадлежит указанному выше классу функций. Уравнениями вида (2.3) при положительных значениях коэффициентов  $a$  и  $b$  описываются, например, колебания симметричного аэродинамического маятника (см. [13, 22, 10]). Поэтому ниже в качестве механической системы, соответствующей уравнению (2.3), будем иметь в виду именно аэродинамический маятник.

В отличие от [13, 22, 10], проведем более широкий параметрический анализ, полагая, что параметры могут принимать и отрицательные значения.

Очевидно, система имеет точки покоя  $O = (0, 0)$ ,  $P = (\pi, 0)$ ,  $Q_{1,2} = (\pm\pi/2, 0)$  независимо от значений параметров. Но при  $b = 0$  точки покоя заполняют всю ось  $y = 0$ , так как в системе отсутствует чисто позиционная составляющая силы.

Отметим некоторые общие свойства решений системы (2.3).

- Если пара функций  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$  — решение системы (2.3) при некотором значении  $a = \tilde{a}$ , то при значении параметра  $a = -\tilde{a}$  существует решение  $\tilde{x}(t) + \pi$ ,  $\tilde{y}(t)$ . Таким образом, как и в предыдущем примере, все решения системы уравнений (2.3) при  $a = -\tilde{a}$  получаются сдвигом на  $\pi$  решений, отвечающих значению  $a = \tilde{a}$ . Поэтому в дальнейшем ограничимся только неотрицательными значениями  $a$ , т.е.  $a \geq 0$ .
- Из системы (2.3) видно, что поле фазовых скоростей симметрично относительно прямых  $x = \pm\pi/2$ . Следовательно, фазовый портрет также будет обладать (некоторой зеркальной) симметрией относительно этих прямых. Благодаря такой симметрии система (2.3) обнаруживает еще ряд замечательных свойств.
- Если кривая  $y(x)$ , составленная из фазовых траекторий рассматриваемой системы, определена на промежутке  $[-\pi, \pi]$ , то  $y(-\pi) = y(\pi)$ , т.е. эта кривая  $y(x)$  задается  $2\pi$ -периодической функцией.
- Система (2.3) не имеет никаких предельных циклов (ни типа  $C$ , ни типа  $R$ ), ни устойчивых, ни неустойчивых. При этом замкнутые траектории могут быть, но они не являются ни притягивающими, ни отталкивающими.

- (е) Система (2.3) не является диссипативной «в большом», хотя при определенных условиях в системе могут существовать аттракторы с ограниченной областью притяжения.
- (ф) Седловые точки имеют общие сепаратрисы, которые в случае соединения соседних седловых точек образуют петлю.

Переходим к анализу фазового портрета системы (2.3). Прежде всего отметим, что введенное выше множество  $\Gamma$ , на котором  $\dot{y} = 0$ , в рассматриваемом случае представлено тремя ветвями: двумя вертикальными прямыми  $x = \pm\pi/2$  и кривой  $\varphi(x) = -(b/a) \sin x$ .

Что касается устойчивости точек покоя, то с учетом указанных свойств достаточно элементарно устанавливается следующее.

Для положительных значений параметра  $b$  точка  $O$  устойчива, точка  $P$  неустойчива (обе являются фокусами, если  $4b > a^2$ , и узлами в противном случае), обе точки  $Q$  седловые. Для отрицательных значений  $b$  точки  $O$  и  $P$  — седловые, а точки  $Q_{1,2}$  — центры.

Этой информации вполне достаточно для представления схемы фазовых портретов при различных значениях  $b$ .

На рис. 13–15 качественно изображены эти фазовые портреты. Закрашенным областям фазовой плоскости отвечают ограниченные колебания маятника или затухающие колебания с выходом на устойчивое положение равновесия. Не закрашенным областям отвечают вращательные (периодические) движения маятника.

При отрицательных значениях параметра  $b$  возможны только колебания с ограниченной амплитудой около положений равновесия, отвечающим точкам  $Q_{1,2}$ , или периодические вращательные движения. Сепаратрисы из седловых точек  $O$  и  $P$  образуют петлю, которая, как и положено, отделяет колебательные режимы от ротационных.

При уменьшении  $b$  кривая  $\varphi(x) = -(b/a) \sin x$  приближается к оси абсцисс, и при  $b = 0$  сливается с этой осью. Точки покоя заполняют сплошь отрезок  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $y = 0$  (множество  $Q$  неизолированных точек покоя). При этом точки, лежащие внутри промежутка  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , устойчивы, а лежащие вне этого промежутка — неустойчивы.

При положительных значениях параметра  $b$  возникает аттрактор  $O^+$ , и сепаратрисы седловых точек  $Q_{1,2}$  ограничивают область притяжения этого аттрактора. Эти сепаратрисы соединяют точки  $(-3\pi/2, 0)$ ,  $(\pi/2, 0)$  и  $(-\pi/2, 0)$ ,  $(3\pi/2, 0)$ . На рисунке представлен случай, когда точки  $O$  и  $P$  — фокусы, аналогичная картина имеет место и для случая, когда эти точки — узлы.

**Замечание 1.** В [22] представлен фазовый портрет системы (2.3) для случая  $a < 0$ ,  $b > 0$ . Он отличается от представленных на рис. 13–15, как следует из вышесказанного, только сдвигом на  $\pi$  по оси  $x$ .

*2.5.3. Некоторые обобщения: системы, зависящие от функциональных классов.* Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon \frac{F(x)}{\cos x}, \\ \dot{y} = -F(x), \end{cases} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

в правую часть которой входит функция

$$F(x) = R(x)s(x), \quad (2.5)$$

в которой оба множителя  $R(x)$   $s(x)$  пробегает некоторые функциональные классы  $\mathcal{R}$  и  $\Sigma$  соответственно. При  $\varepsilon = 1$  система (2.4) была изучена в задаче о плоскопараллельном движении твердого тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы (см. [16, 17, 21, 23]).

Система вида (2.4) может быть получена из системы динамических уравнений третьего порядка для свободного твердого тела путем редукции к системе второго порядка на фазовом цилиндре, при этом  $\varepsilon = 1$ , переменная  $x$  имеет смысл угла атаки при движении свободного тела, а переменная  $y$  — угловой скорости.

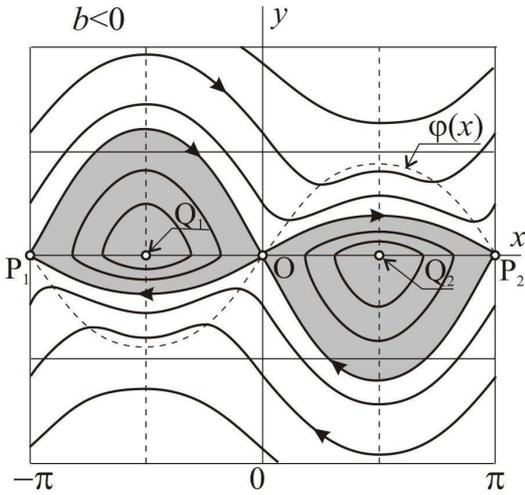


Рис. 13

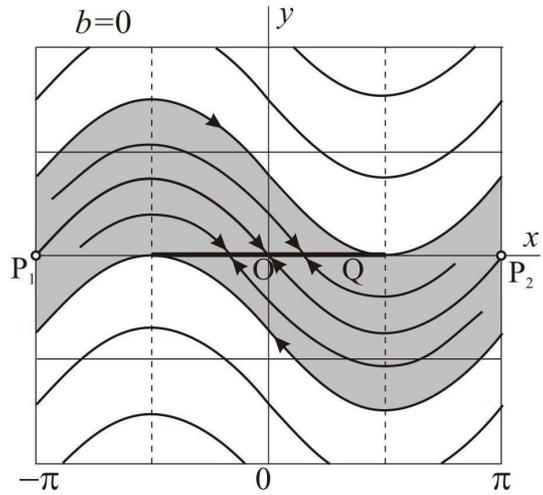


Рис. 14

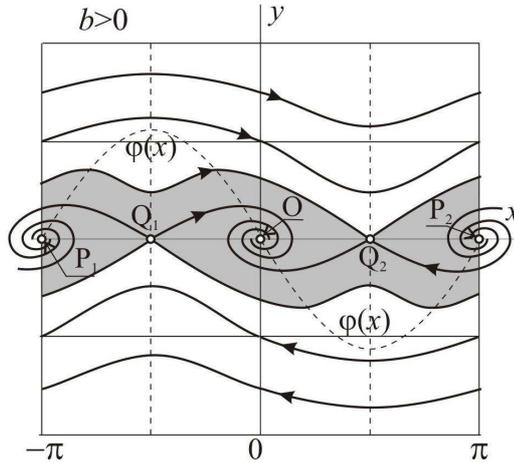


Рис. 15

Также система вида (2.4) может быть получена из уравнения второго порядка для закрепленного твердого тела, при этом  $\varepsilon = -1$ , переменная  $x$  имеет смысл угла отклонения при движении закрепленного тела, а переменная  $y$  — угловой скорости (см. [10, 12, 21, 22]).

Для качественного описания пары функций  $R(x), s(x)$  используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания. Вводимые классы достаточно широки: они состоят из гладких функций,  $2\pi$ -периодических ( $s$  — четная, а  $R$  — нечетная), удовлетворяющих следующим условиям:

- (i)  $R(x) > 0$  при  $x \in (0, \pi)$ , причем  $R'(0) > 0, R'(\pi) < 0$  (класс функций  $\mathcal{R}$ );
- (ii)  $s(x) > 0$  при  $x \in (0, \pi/2), s(x) < 0$  при  $x \in (\pi/2, \pi)$ , причем  $s(0) > 0, s'(\pi/2) < 0$  (класс функций  $\Sigma$ ).

Как  $R$ , так и  $s$  меняют знак при замене  $x$  на  $x + \pi$ . Таким образом,  $R \in \mathcal{R}, s \in \Sigma$ . В частности, аналитические функции типа функций Чаплыгина (см. [20, 19])

$$R = R_0(x) = A \sin x \in \mathcal{R}, \quad s = s_0(x) = B \cos x \in \Sigma, \quad A, B > 0, \quad (2.6)$$

являются типичными представителями описанных выше классов.

В рассматриваемой динамической системе (2.4) возникает произведение (2.5). Из вышеперечисленных условий следует, что  $F$  — достаточно гладкая нечетная  $\pi$ -периодическая функция, удовлетворяющая условиям:

(iii)  $F(x) > 0$  при  $x \in (0, \pi/2)$ ,  $F'(0) > 0$ ,  $F'(\pi/2) < 0$  (класс функций  $\Phi$ ).

Таким образом,  $F \in \Phi$ .

В силу определения класса функций  $\Phi$  можно сделать вывод, что правая часть системы (2.4) является гладкой вектор-функцией, поэтому саму систему (2.4) можно рассматривать на двумерном цилиндре

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \pmod{2\pi}\}.$$

Итак, в данном случае нам приходится исследовать динамическую систему, определенную с помощью пары функций, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

Система (2.4) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = -F(x) + \varepsilon u \frac{d}{dx}g(x), \end{cases} \quad (2.7)$$

где

$$g(x) = \frac{F(x)}{\cos x} \quad (2.8)$$

— гладкая функция.

В частности, при выполнении условий (2.6) система (2.7) примет вид аналитической:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = -AB \sin x \cos x + \varepsilon ABu \cos x, \end{cases} \quad (2.9)$$

и при  $a = AB$ ,  $b = -\varepsilon AB$ ,  $u \leftrightarrow y$  совпадает с системой (2.3).

Основной результат касается фазового портрета системы (2.7) для всех функций  $F \in \Phi$ .

### Теорема 2.1.

1. Свойства (a)–(f), приведенные выше для систем вида (2.3), справедливы и для систем вида (2.4).
2. Для любых двух функций  $F_1, F_2 \in \Phi$  системы вида (2.7) (траекторно) топологически эквивалентны между собой (см. [21, 23]).

Таким образом, фазовые портреты любой системы вида (2.7) имеют типы, эквивалентные типу фазового портрета системы (2.9) (для функций типа функций Чаплыгина (2.6)), и при  $\varepsilon = -1$  изображены на рис. 15. Если же  $\varepsilon = 1$ , то фазовый портрет системы вида (2.7) также изображен на рис. 15, только при  $x \mapsto x + \pi$ .

## 3. КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА С ПОЗИЦИОННО-ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

**3.1. Класс систем с динамической симметрией.** В этом разделе рассмотрим в общем виде частный случай системы (2.1): колебательную систему с одной степенью свободы, в которой «динамическая» часть воздействия линейна по скорости (так называемое позиционно-вязкое трение, см. [1, 3]). Поведение такой системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -h(x, p)y - q(x, p). \end{cases} \quad (3.1)$$

К таким системам могут быть приведены системы вида (2.4), если в них принять

$$z = y + \varepsilon \frac{F(x)}{\cos x}.$$

Действительно, система (2.4) будет преобразована в систему

$$\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = -F(x) + \varepsilon z \frac{dF(x)}{dx \cos x}, \end{cases}$$

при этом

$$h(x, \varepsilon) = -\varepsilon z \frac{dF(x)}{dx \cos x}, \quad q(x, \varepsilon) = F(x).$$

Как и раньше  $p \in A$  — вектор параметров, где  $A$  — множество допустимых значений (в частности,  $A$  может быть частью двумерной плоскости  $\mathbb{R}^2$ ).

Будем считать, что для всех значений  $p \in A$  функции  $h(x, p)$  и  $q(x, p)$  удовлетворяют следующим условиям:

- (а) для всех допустимых значений параметров эти функции периодические по  $x$  с периодом  $2\pi$ , непрерывно дифференцируемы для всех  $x \in [-\pi, \pi]$ , непрерывны по  $p$ ;
- (б) функция  $h(x, p)$  четна по  $x$ , т.е.  $h(-x, p) = h(x, p)$ , а функция  $q(x, p)$  нечетна по  $x$ , т.е.  $q(-x, p) = -q(x, p)$ ;
- (в)  $q(x, p) > 0$  для всех  $x \in (0, \pi)$ .

Из перечисленных свойств этих функций следует, что при фиксированном значении параметров наряду с решением  $x(t)$ ,  $y(t)$  существует и решение  $-x(t)$ ,  $-y(t)$ , так что каждому движению системы в «одну» сторону отвечает такое же симметричное движение в «другую» сторону. Таким образом, системы вида (3.1) относятся к классу систем с динамической симметрией (СДС). Как уже упоминалось, подобные системы, но несколько более сложные, рассматривались при исследовании движения аэродинамического маятника (см. [13, 5]) и движения тела с плоским торцом в сопротивляющейся среде (см. [22]). В настоящем исследовании ограничимся рассмотрением системы (3.1) как некоторой модельной.

В виду выше указанной периодичности функций  $h(x, p)$  и  $q(x, p)$  достаточно рассматривать «свернутое» фазовое пространство — фазовый цилиндр или его развертка на полосу

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi\} \quad (3.2)$$

(при этом образующая  $x = \pi$  как бы «разрезается» на две прямые  $x = \pi$  и  $x = -\pi$ ). В силу симметрии ясно, что для СДС иногда достаточно рассматривать лишь полуполосу

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi, y \geq 0\}.$$

Те фазовые траектории (или участки фазовых траекторий), на которых координата  $y$  не меняет знака, можно описать решениями уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{h(x, p)y + q(x, p)}{y}, \quad (3.3)$$

которое мы поставим в соответствие системе (3.1).

**3.2. Некоторые свойства фазовых траекторий.** Теперь сформулируем некоторые свойства фазовых траекторий рассматриваемой системы, опираясь на представления (3.1), (3.3).

*3.2.1.* В силу принятых предположений в системе (3.1) на фазовом цилиндре имеются ровно две точки покоя  $O = (0, 0)$  и  $P = (\pi, 0)$ . На развертке цилиндра точка  $P$  как бы «разрезается» на две точки  $P_1 = (-\pi, 0)$  и  $P_2 = (\pi, 0)$ , так что в полосе (3.2) имеются три точки покоя.

*3.2.2.* При  $q(x, p) > 0$  других точек покоя нет. В случае, если функция  $q(x, p)$  меняет знак на интервале  $x \in (0, \pi)$ , существуют другие точки покоя, причем они симметричны относительно начала координат.

3.2.3. При  $q(x, p) > 0$ ,  $x \in (0, \pi)$ , имеем  $q'_x(0, p) > 0$ ,  $q'_x(\pi, p) < 0$ . Следовательно, точка  $O$  асимптотически устойчива ( $O^+$ ) по первому приближению, если

$$h(0, p) > 0, \tag{3.4}$$

и неустойчива ( $O^-$ , фокус или узел, не седло), если  $h(0, p) < 0$ . Точка  $P$  — седловая ( $P^\times$ ) и, следовательно, неустойчива.

3.2.4. Введем несколько полезных обозначений:

$$H(p) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x, p) dx, \quad h_{\min}(p) = \min_x \{h(x, p)\},$$

$$h_{\max}(p) = \max_x \{h(x, p)\}, \quad q_{\max}(p) = \max_x \{h(x, p)\}.$$

Рассмотрим область на фазовом цилиндре, в которой  $y \gg q_{\max}$ . В этой области уравнение (3.3) приближенно можно представить в виде  $y' \cong -h(x, p)$ . Тогда приращение  $\Delta y$  вдоль фазовой траектории за один оборот вокруг фазового цилиндра равно

$$\Delta y = y(\pi) - y(-\pi) \cong -H(p).$$

Следовательно, если  $H(p) > 0$ , то фазовые траектории из «бесконечности» опускаются по фазовому цилиндру (система диссипативна в большом, бесконечность «отталкивает»,  $\infty^-$ ). А если  $H(p) < 0$ , то фазовые траектории «поднимаются» по цилиндру и уходят в бесконечность (бесконечность «притягивает»,  $\infty^+$ ).

3.2.5. В соответствии со знаками величин  $h(0, p)$  и  $H(p)$ , т.е. с характером устойчивости точки  $O$  и свойством притяжения/отталкивания бесконечности, множество  $A$  параметров может быть разбито на четыре подмножества:

$$A_1 = \{p \in A : h(0, p) > 0, H(p) > 0, (O^+, \infty^-)\},$$

$$A_2 = \{p \in A : h(0, p) < 0, H(p) > 0, (O^-, \infty^-)\},$$

$$A_3 = \{p \in A : h(0, p) < 0, H(p) < 0, (O^-, \infty^+)\},$$

$$A_4 = \{p \in A : h(0, p) > 0, H(p) < 0, (O^+, \infty^+)\}.$$

Некоторые из этих подмножеств могут оказаться и пустыми.

3.2.6. Если  $A_1$  и  $A_2$  не пусты, то у них есть общая граница  $A_{12}$ , при переходе через которую меняется характер устойчивости точки  $O$ . Так, при переходе из  $A_1$  в  $A_2$  точка  $O$  переходит из типа  $O^+$  в тип  $O^-$ , может иметь место бифуркация Андронова—Хопфа, возникает устойчивый цикл  $C^+$  вокруг точки  $O$ , которому отвечают ограниченные устойчивые автоколебания исходной механической системы. При этом, вообще говоря, не исключается возможность существования еще пар циклов  $C^-$  и  $C^+$ , охватывающих указанный цикл  $C^+$ .

3.2.7. Если  $A_1$  и  $A_4$  не пусты, то при переходе из  $A_1$  в  $A_4$  через их общую границу  $A_{14}$  меняется характер поведения фазовой траектории на бесконечности (отталкивание  $\infty^-$  переходит в притяжение  $\infty^+$ ), и в  $A_4$  с необходимостью возникает замкнутая фазовая траектория, охватывающая цилиндр, — репеллер  $R^-$ , которому отвечает неустойчивый ротационный режим движения исходной механической системы<sup>1</sup>. Если он единствен, то он разделяет области притяжения двух аттракторов:  $O^+$  и  $\infty^+$ .

<sup>1</sup>Наряду с указанным репеллером, при положительных значениях  $y$  могут существовать еще пары  $R^-$ ,  $R^+$  замкнутых траекторий, расположенные ниже его в порядке снизу вверх.

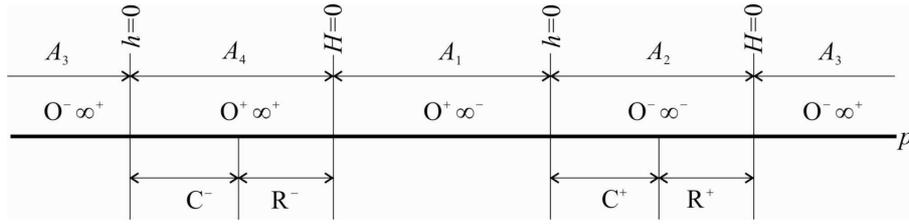


Рис. 16

3.2.8. Аналогично, при переходе из множества  $A_3$  в множество  $A_4$  через общую границу  $A_{34}$  возникает неустойчивый цикл  $C^-$ , охватывающий точку  $O^+$  и ограничивающий область притяжения этой точки. При переходе же в множество  $A_2$  через общую границу  $A_{32}$  возникает устойчивый ротационный режим  $R^+$ .

3.2.9. Таким образом, для точек  $A_2$ , близких к границе  $A_{12}$ , существует вышеуказанный устойчивый цикл  $C^+$ , а для точек, близких к границе  $A_{32}$ , — устойчивый ротационный режим  $R^+$ . При изменении параметра  $p$  от границы  $A_{12}$  к границе  $A_{32}$  существует такое значение  $p^*$  параметра  $p$ , при котором траектории  $C^+$  и  $R^+$  сливаются, образуя петлю сепаратрис. Соответствующая кривая  $y_{CR}(x)$  (на которой лежит фазовая траектория) определяется как решение дифференциального уравнения (3.3), удовлетворяющее условиям  $y_{CR}(x) > 0$  на  $(-\pi, \pi)$  и

$$y_{CR}(-\pi) = y_{CR}(\pi) = 0.$$

Подставляя это решение в уравнение (3.3), несложно получить

$$\left( \frac{y_{CR}^2(x)}{2} \right)' = -h(x, p^*)y_{CR}(x) - q(x, p^*).$$

Интегрируя в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ , получим соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x, p^*)y_{CR}(x)dx = 0, \quad (3.5)$$

связывающее критическое значение  $p^*$  параметра и искомое решение  $y_{CR}(x)$ . Учитывая сформулированные выше условия, в качестве приближенной оценки решения  $y_{CR}(x)$  примем

$$y_{CR}(x) \cong M \cos \frac{x}{2}.$$

Тогда для приближенного определения критического значения  $p^*$  получим уравнение

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x, p^*) \cos \frac{x}{2} dx = 0. \quad (3.6)$$

Такое же приближенное критическое значение величины  $p^*$  определяется и в области  $A_4$ , разделяющее неустойчивый цикл  $C^-$  и репеллер  $R^-$ .

Для случая скалярного параметра  $p$  на рис. 16 условно построено разбиение множества  $A$  значений этого параметра на указанные подмножества с указанием характерных примет каждого подмножества.

3.2.10. Рассмотрим случай, когда  $h_{\min}(p) > 0$ . Обозначим через  $A_{10}$  подмножество точек  $p$ , для которых выполнено это условие, так что

$$A_{10} = \{p \in A : h_{\min}(p) > 0\}$$

(при этом множество  $A_{10}$  является подмножеством множества  $A_1$ ,  $A_{10} \subset A_1$ ). В этой ситуации диссипация, хотя и переменная, имеет место для любой области фазовой плоскости. Тогда на фазовом цилиндре аттрактор  $O^+$  является единственным, никаких замкнутых траекторий (типа  $C$

или  $R$ ) не существует; все фазовые траектории, кроме входящих в седловую точку сепаратрис, стягиваются в точку  $O^+$ . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + B(x),$$

где

$$B(x) = \int_0^x q(s) ds$$

— положительная функция (для простоты записи зависимость от параметра здесь не указывается).

По построению, выполнено неравенство  $V(x, y) > 0$  во всех точках фазового цилиндра, кроме начала координат. Производная  $\dot{V}(x, y)|_{(3.1)}$ , вычисленная в силу системы (3.1), удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(x, y)|_{(3.1)} = -h(x, p)y^2 \leq -h_{\min}(p)y^2 < 0,$$

так что выпуклая положительная функция, вычисленная вдоль фазовых траекторий, убывает на всем фазовом цилиндре. Следовательно, изображающая точка стремится к точке  $O^+$ .

3.2.11. Аналогичным образом устанавливается, что в случае, когда  $h_{\max}(p) < 0$ , для точек  $p \in A_{30}$ ,

$$A_{30} = \{p \in A : h_{\max}(p) < 0\} \subset A_3;$$

точка  $O$  является единственным репеллером, никаких замкнутых траекторий нет, и все фазовые траектории (кроме все тех же сепаратрис) уходят в бесконечность по фазовому цилиндру. В этом случае в системе постоянно действует антидиссипация.

**3.3. Пример маятниковой системы.** Рассмотрим механическую систему (типа маятниковой системы), описываемую уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -(a + b \cos x)y - \sin x, \end{cases}$$

где  $p = \{a, b\}$  — вектор параметров  $p \in \mathbb{R}^2$ . Это частный случай системы (3.1), если в ней принять

$$h(x, p) = a + b \cos x, \quad q(x, p) = \sin x.$$

Границы  $A_{12}$  и  $A_{34}$  задаются уравнением  $h(0, p) = 0$ , т.е.  $a + b = 0$ . Несложно с помощью (3.6) вычислить приближенные критические значения  $a^*$ ,  $b^*$  параметров: это все точки, лежащие на прямой  $b = -3a$ . Поскольку  $h_{\min}(p) = a - |b|$ , то область  $A_{10}$  определяется неравенством  $a > |b|$ . Аналогично, область  $A_{30}$  задается неравенством  $a < -|b|$ . В этих областях существует только один аттрактор (начало координат или бесконечность) и отсутствуют какие бы то ни было замкнутые фазовые траектории, т.е. соответствующая механическая система не имеет ни автоколебаний, ни ротационных режимов движения.

Численные расчеты подтвердили полученные качественные выводы. С помощью этих расчетов установлено также, что для рассматриваемой системы при всех значениях параметров  $a$ ,  $b$  никаких других замкнутых траекторий (типа  $C$  или  $R$ ), кроме указанных в предыдущем пункте, не существует.

На рис. 17 изображены все перечисленные границы и области с указанием характерных свойств каждого подмножества. Этой информации достаточно, чтобы качественно представить себе фазовый портрет в том или ином случае.

Проследим за изменением структуры фазового портрета при фиксированном значении параметра  $b > 0$ , отвечающего за переменную составляющую демпфирования, и изменении в широких пределах параметра  $a$ , отвечающего за постоянную составляющую демпфирования (или антидемпфирования).

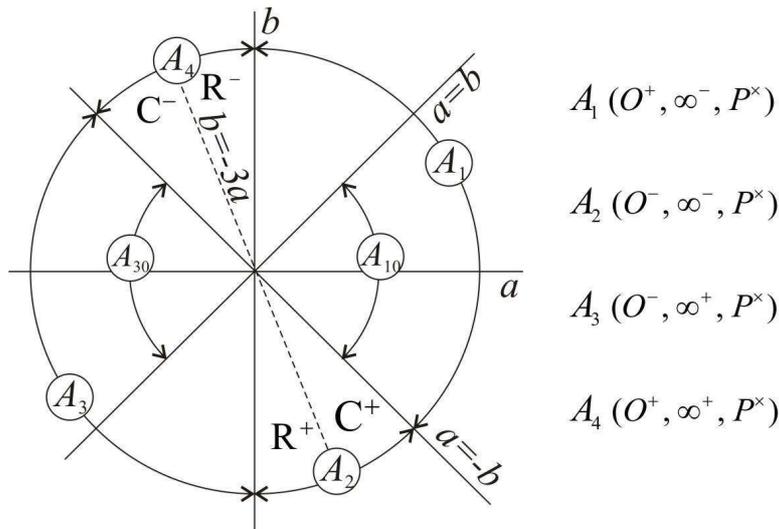


Рис. 17

На рис. 18–23 схематически представлены фазовые портреты системы (3.1) при некотором фиксированном положительном значении  $b$  и различных значениях  $a$ . Пунктирной линией отмечено множество  $\Gamma$ , для данной системы оно состоит из одной функции

$$\varphi(x) = -\frac{\sin x}{a + b \cos x},$$

которая может иметь точки разрыва. Жирной линией отмечены замкнутые фазовые траектории (типов  $C$  и  $R$ ).

Проведенный анализ (см. рис. 17) и дополнительные расчеты показали, что при всех значениях  $a > 0$  существует единственный аттрактор — точка  $O^+$  и не существуют никакие замкнутые траектории (нет ни автоколебаний, ни ротационных режимов движения исходной механической системы). На рис. 18 и 19 эту ситуацию иллюстрируют случаи  $a > b$  и  $0 < a < b$ .

Как только  $a$  становится отрицательным (имеет место антидемпфирование), на фазовой плоскости из бесконечности «спускается» замкнутая фазовая траектория типа  $R$  (бесконечность — слабая отталкивающая «точка»). В соответствии со свойством 3.2.7, сформулированным выше, бесконечность приобретает притягивающий характер, а замкнутая траектория — это неустойчивый периодический режим  $R^-$  (случай  $-b/3 < a < 0$  на рис. 20). При этом имеется еще и симметричный ему неустойчивый периодический режим  $R^+$  в нижней полуплоскости ( $y < 0$ ). Эти режимы разделяют области притяжения бесконечности и область притяжения начала координат (точка  $O$ ), которая продолжает оставаться устойчивой. Подчеркнем, что в рассматриваемом случае при наличии антидемпфирования (отрицательном значении  $a$ ) устойчивость начала координат тем не менее сохраняется, хотя область ее притяжения уменьшается. Это происходит за счет наличия переменной составляющей демпфирования.

При дальнейшем уменьшении  $a$  режимы  $R^\pm$  сближаются (в верхней полуплоскости он опускается, в нижней — поднимается) и в конце концов оба они «салятся» на сепаратрисы, образуя петлю сепаратрис (случай  $a = -b/3$  на рис. 21).

При переходе  $a$  через критическое значение  $a = -b/3$  с петли сепаратрис «снимается» замкнутая фазовая траектория типа  $C$ . В соответствии со свойством 3.2.9 — это цикл  $C^-$ , также разделяющий области притяжения точки  $O^+$  и  $\infty^+$  (случай  $-b < a < -b/3$  на рис. 22).

С уменьшением  $a$  цикл  $C^-$  «сжимается», и при  $a = -b$  он «схлопывается» в точку  $O$ , происходит бифуркация Андронова–Хопфа, точка теряет устойчивость (жесткая потеря устойчивости точки  $O$ ).

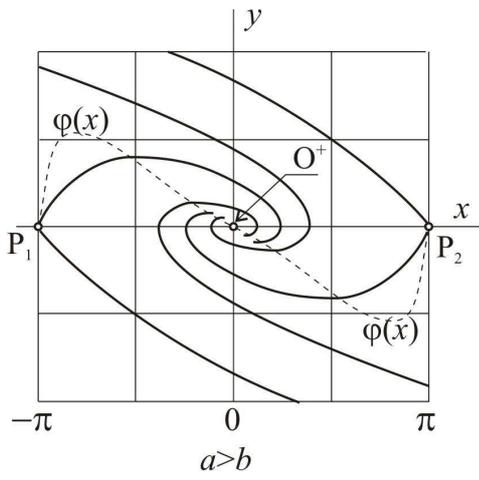


Рис. 18

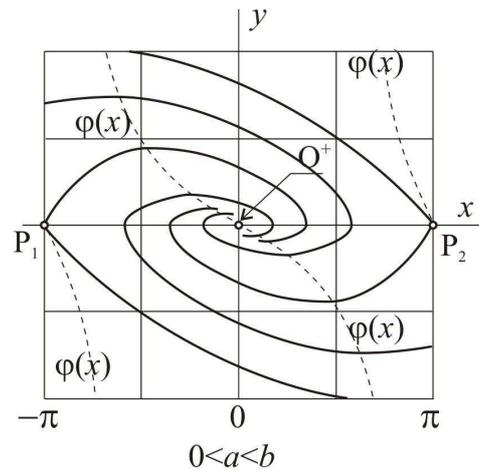


Рис. 19

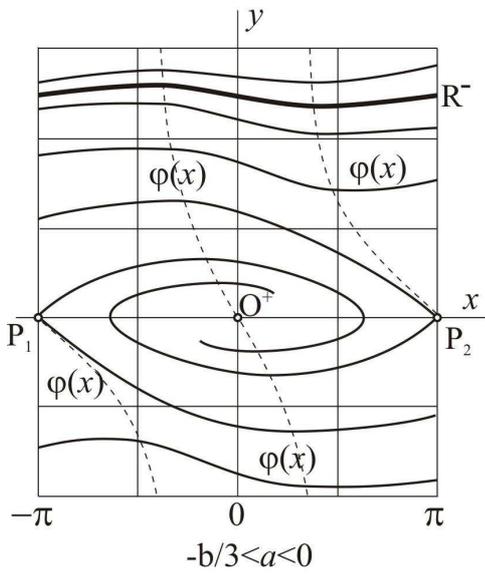


Рис. 20

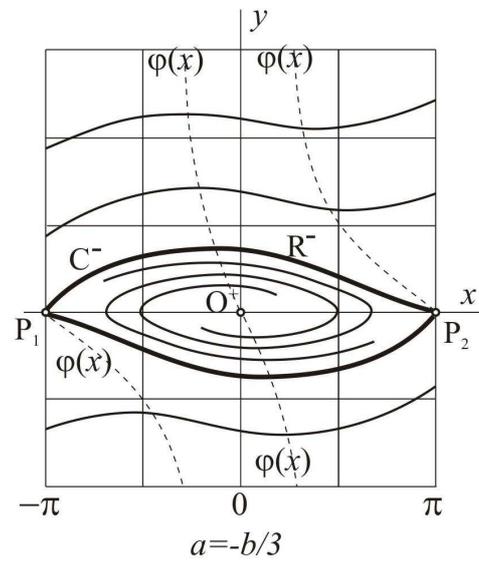


Рис. 21

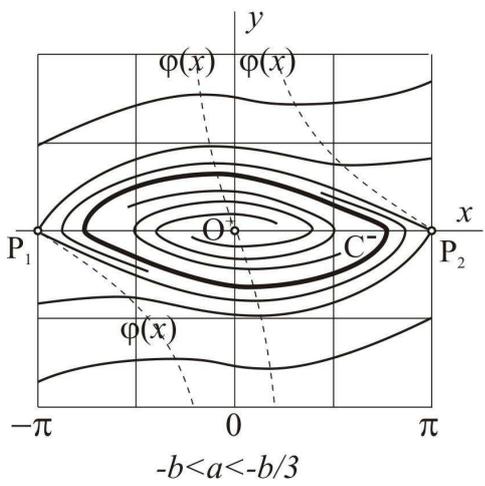


Рис. 22

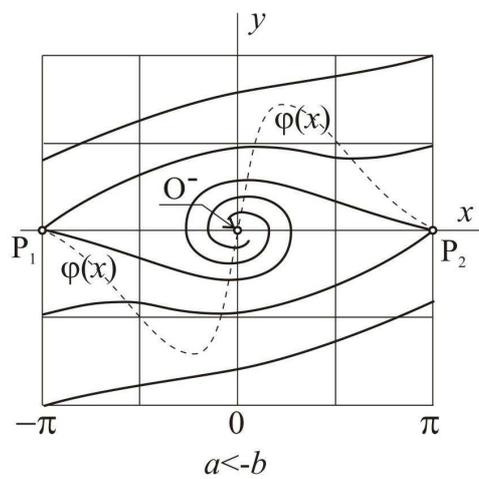


Рис. 23

По мере дальнейшего уменьшения  $a$  точка  $O$  неустойчива, никаких аттракторов нет, и все фазовые траектории уходят в бесконечность (случай  $a < -b$  на рис. 23).

Необходимо также заметить, что свойства (??)–(??), описанные выше и отмеченные в теореме 2.1, качественно проиллюстрированы на рис. 20–23.

Отметим также, что в рассматриваемой ситуации имеет место единственность возникающих циклов.

Аналогичную цепочку изменений можно проследить и для отрицательных значений  $b$ .

#### 4. ПОЛНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С ПОЗИЦИОННО-ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ И ЧЕТЫРЬМЯ ПАРАМЕТРАМИ

**4.1. Маятниковая система с четырьмя параметрами.** Рассмотрим некоторое обобщение маятниковых систем, представленных ранее в предыдущих параграфах. Будем считать, что поведение маятника описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -(a + b \cos x)y - (c + d \cos x) \sin x, \end{cases} \quad (4.1)$$

с аналитической правой частью, где  $a, b, c, d$  — параметры, которые могут принимать любые значения из  $\mathbb{R}$ .

Уравнения (4.1) являются частным случаем системы (3.1) с позиционно-вязким трением, когда

$$h(x, p) = (a + b \cos x)y, \quad q(x, p) = (c + d \cos x) \sin x.$$

Очевидно, такое представление удовлетворяет условиям четности и периодичности, сформулированным для системы (3.1), так что все основные свойства 3.2.1–3.2.11, сформулированные в разделе 3.2 гл. 3, остаются справедливыми и для (4.1).

Отметим одно глобальное свойство рассматриваемой системы. Если  $a > 0$ , то система (4.1) диссипативна в большом («бесконечность» отталкивает,  $\infty^-$ ). Если же  $a < 0$ , то бесконечность притягивает,  $\infty^+$ . При  $a = 0$  вопрос о характере бесконечности требует дополнительного анализа.

Отметим также, что в случае  $|c| > |d|$  в системе (4.1) существуют только две неподвижные точки покоя ( $O$  и  $P$ ). А в случае  $|c| < |d|$ , кроме этих точек покоя, существуют еще две точки покоя  $Q_{1,2}(\bar{x}, 0)$ , где  $\bar{x} = \arccos(c/d)$ , наличие которых приводит к существенному изменению фазового портрета.

**4.2. Преобразования в пространстве параметров.** Прежде чем переходить к анализу устойчивости точек покоя в зависимости от параметров, обратим внимание на то, что, во-первых, все параметры входят линейно и, во-вторых, как подсказывает анализ задачи в разделе 3.3 гл. 3, важным оказываются отношения параметров, а не их величины. И вообще, желательно было бы иметь дело с каким-то ограниченным геометрическим образом в пространстве параметров, а не с бесконечным пространством  $\mathbb{R}^4$ . С этой целью четыре параметра  $a, b, c, d$  представим в виде

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \quad c = \rho \cos \psi, \quad d = \rho \sin \psi, \quad (4.2)$$

$r, \varphi, \rho, \psi$  — новые четыре параметра, причем можно без ограничения общности считать, что

$$r \geq 0, \quad \rho \geq 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad -\pi \leq \psi \leq \pi.$$

Таким образом, преобразование (4.2) позволило несколько «сжать» представление пространства  $\mathbb{R}^4$ , хотя бы по двум параметрам  $\varphi$  и  $\psi$ . Уравнения (4.1) также преобразуются и примут вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -r(\cos \varphi + \sin \varphi \cos x)y - \rho(\cos \psi + \sin \psi \cos x) \sin x. \end{cases} \quad (4.3)$$

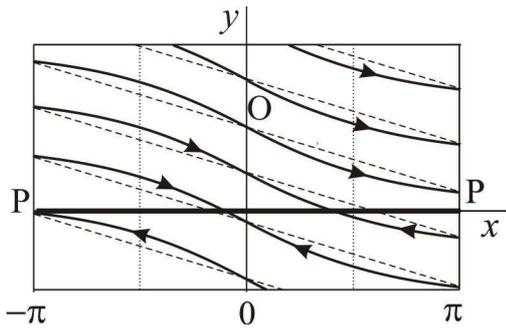


Рис. 24.  $a > b > 0$

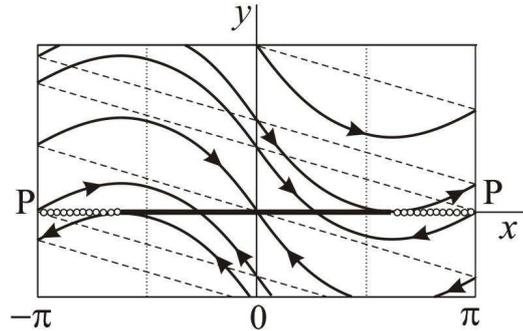


Рис. 25.  $0 < a < b$

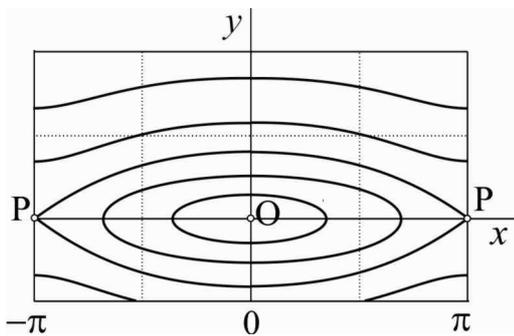


Рис. 26.  $|\operatorname{tg} \psi| < 1$

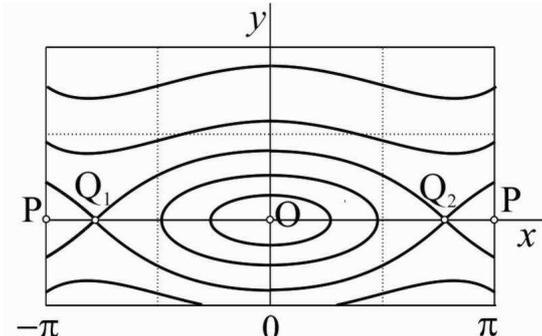


Рис. 27.  $|\operatorname{tg} \psi| > 1$

На языке этих параметров условие диссипативности системы в большом (бесконечность отталкивает,  $\infty^-$ ), имеет вид неравенства

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2}. \quad (4.4)$$

При  $|\varphi| > \pi/2$  бесконечность притягивает ( $\infty^+$ ), а при  $|\varphi| = \pi/2$  требуется дополнительное исследование для определения характера бесконечности. Это первый результат относительно разбиения квадрата

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad -\pi \leq \psi \leq \pi$$

на области одинакового поведения исходной системы.

### 4.3. Частные случаи.

Рассмотрим сначала два простых частных случая.

Пусть  $\rho = 0, r \neq 0$ . Тогда система (4.3) имеет первый интеграл

$$y = C - r(x \cos \varphi + \sin \varphi \sin x).$$

Фазовые траектории представляют собой «параллельные» синусоиды, вытянутые вдоль прямой, наклон которой определяется значением  $\varphi$  (рис. 24 и 25). При этом все точки оси  $x$  — точки покоя системы. В случае  $a > b > 0$  (рис. 24) все эти точки устойчивы. В случае  $0 < a < b$  (рис. 25) некоторая часть точек, примыкающих к точке  $P$ , становятся неустойчивыми. На рис. 24 и 25 устойчивые точки отмечены жирной линией, а неустойчивые — кружочками. Бесконечность имеет отталкивающий характер. Аналогичный анализ можно провести и для отрицательных значений  $a$ .

Пусть теперь  $\rho \neq 0, r = 0$ . Тогда система (4.3) становится консервативной, ее первый интеграл

$$y = C + 2\rho(\cos \psi \cos x + \sin \psi \cos^2 x).$$

При  $|\operatorname{tg} \psi| < 1$  соответствующий фазовый портрет аналогичен портрету классического физического маятника (рис. 26), точки покоя — только точки  $O$  и  $P$ .

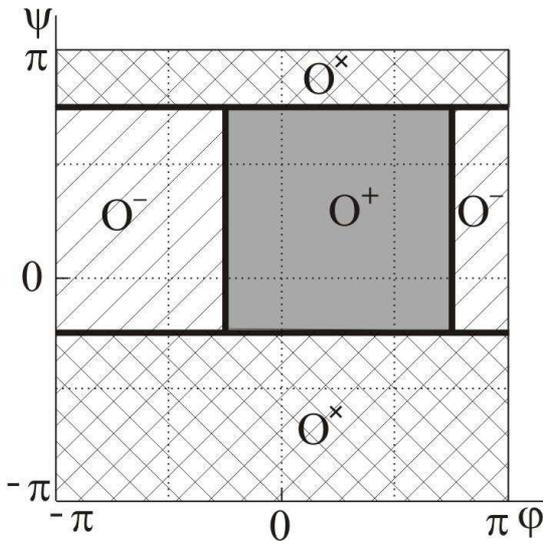


Рис. 28

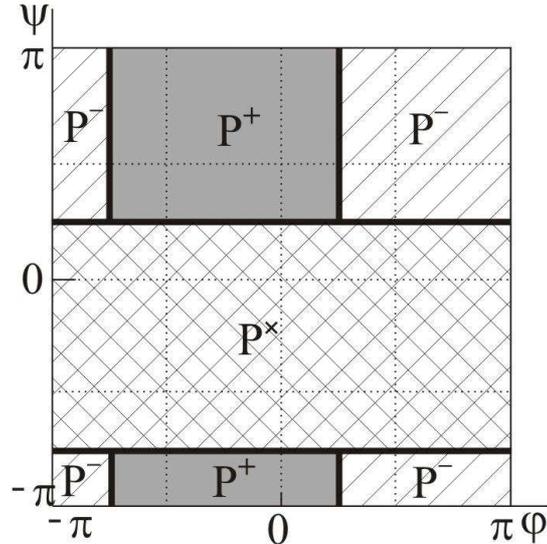


Рис. 29

При  $|\operatorname{tg} \psi| > 1$ , кроме точек покоя  $O$  и  $P$ , появляются точки покоя  $Q_{1,2}$  седлового типа. В области фазовой плоскости, ограниченной сепаратрисами, точки  $O$  и  $P$  «окружены» замкнутыми фазовыми траекториями, остальная часть плоскости заполнена замкнутыми фазовыми траекториями (рис. 27).

В дальнейшем будем считать, что  $r > 0$  и  $\rho > 0$ .

**4.4. Разбиение пространства параметров.** Как уже упоминалось, устойчивость точек покоя по первому приближению определяется соотношением исходных параметров, т.е. введенными углами  $\varphi$  и  $\psi$ . Рассмотрим последовательно все точки покоя. Как и раньше, точку покоя будем отмечать значком «+», если она устойчива, значком «-», если неустойчива (но не седловая), и значком «x», если она седловая.

Для точки  $O$  имеем следующие условия:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \varphi + \sin \varphi > 0 \\ \cos \psi + \sin \psi > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow O^+; \quad \left. \begin{array}{l} \cos \varphi + \sin \varphi < 0 \\ \cos \psi + \sin \psi > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow O^-; \quad \cos \psi + \sin \psi < 0 \Rightarrow O^x.$$

На рис. 28 изображено разбиение квадрата  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ,  $-\pi \leq \psi \leq \pi$  на соответствующие области. Жирными линиями выделены границы этих областей. Кроме того, области отмечены различной штриховкой, область устойчивости закрашена.

Аналогично, для точки  $P$  получим:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \varphi - \sin \varphi > 0 \\ -\cos \psi + \sin \psi > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P^+; \quad \left. \begin{array}{l} \cos \varphi - \sin \varphi < 0 \\ -\cos \psi + \sin \psi > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P^-; \quad -\cos \psi + \sin \psi < 0 \Rightarrow P^x.$$

На рис. 29 представлено разбиение того же квадрата  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ,  $-\pi \leq \psi \leq \pi$  на соответствующие области, отмеченные различной штриховкой. Жирными линиями, как и раньше, выделены границы этих областей.

Наконец, для точки  $Q$ , с учетом условия ее существования, имеем следующие соотношения:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\psi - \varphi) < 0 \\ \sin \psi < 0 \\ |\operatorname{ctg} \psi| \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow Q^+; \quad \left. \begin{array}{l} \sin(\psi - \varphi) > 0 \\ \sin \psi < 0 \\ |\operatorname{ctg} \psi| \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow Q^-; \quad \left. \begin{array}{l} \sin \psi > 0 \\ |\operatorname{ctg} \psi| \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow Q^x.$$

Соответствующие ситуации изображены на рис. 30 с сохранением прежних обозначений.

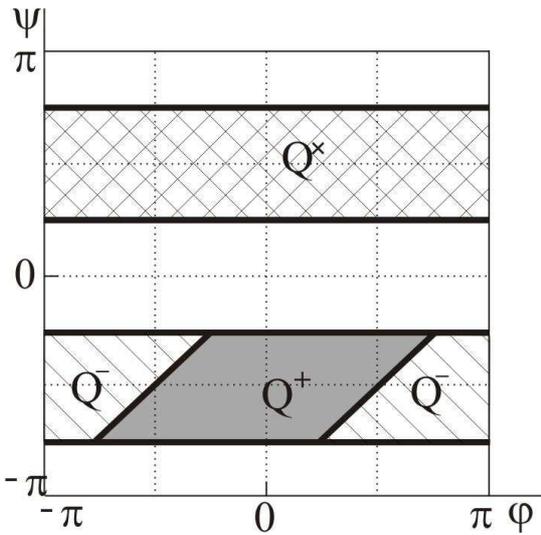


Рис. 30

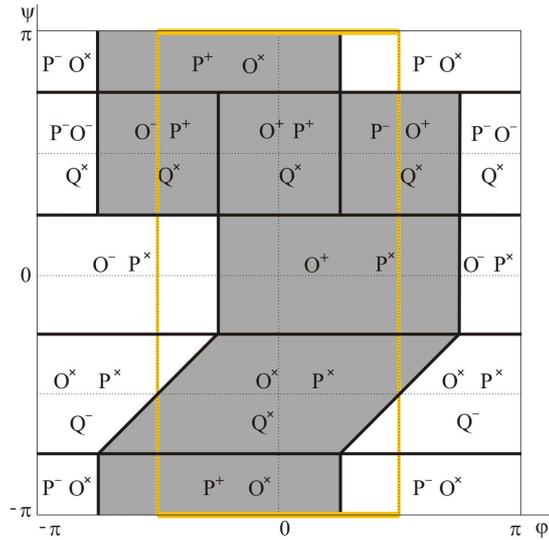


Рис. 31

«Складываем» все полученные картинки, получим искомое разбиение квадрата  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ,  $-\pi \leq \psi \leq \pi$  на области одинакового качества точек покоя. Это разбиение представлено на рис. 31 с указанием характера устойчивости (неустойчивости) точек покоя.

Кроме того, на рис. 31 выделена область  $|\varphi| \leq \pi/2$ , в которой система диссипативна в большом ( $\infty^-$ , бесконечность имеет отталкивающий характер). Вне этой области бесконечность имеет притягивающий характер ( $\infty^+$ ). Как видно из этого рисунка, имеется всего 24 возможных варианта, качественно различающихся в зависимости от устойчивости точек покоя и свойства притяжения/отталкивания бесконечности. На рис. 31 хорошо видно, как при переходе через границы областей меняется характер устойчивости точек покоя и свойства притяжения/отталкивания бесконечности. При анализе фазовых портретов можно проследить эту перестройку при переходе из одной области в другую.

Прежде чем заниматься вопросом построения фазовых портретов, обратим внимание еще на одно свойство «симметрии» системы (4.1). Пусть при фиксированных значениях параметров  $a, b, c, d$  система имеет решение  $x(t), y(t)$ . Тогда, как нетрудно видеть, при значениях параметров  $a, -b, -c, d$  эта система имеет решение  $x(t) + \pi, y(t)$  (мы уже сталкивались с этим свойством выше). В новых параметрах (4.2) это означает, что при одновременной смене знаков у  $\sin \varphi$  и  $\cos \psi$  решение  $x(t)$  системы уравнений (4.3) сдвигается на  $\pi$ . В частности, происходят замены  $O^* \rightarrow P^*$  и  $P^* \rightarrow O^*$ , где значком «\*» обозначен один из символов «+», «-», «x». Другими словами, рис. 31 обладает некоторой симметрией относительно точек  $\varphi = 0, \psi = \pm\pi/2$  с точностью до замены  $O \leftrightarrow P$ . Для удобства можно считать, что симметрия имеет место относительно точки  $\varphi = 0, \psi = \pi/2$  при  $\psi \in [0, \pi]$  и относительно точки  $\varphi = 0, \psi = -\pi/2$  при  $\psi \in [-\pi, 0]$ .

Учитывая это свойство, вместо квадрата  $-\pi \leq \varphi \leq \pi, -\pi \leq \psi \leq \pi$  достаточно рассматривать его «половину» — область  $0 \leq \varphi \leq \pi, -\pi \leq \psi \leq \pi$ . Тогда вместо 24 вариантов остается 14.

**4.5. Замкнутые траектории.** Как отмечалось при постановке задачи, особый интерес представляют замкнутые фазовые траектории, поскольку им отвечают периодические авторотационные или автоколебательные движения маятника. Более того, даже при поверхностном анализе рис. 31 уже возникает вопрос о сосуществовании нескольких аттракторов. Такая ситуация имеет место, например, для области

$$\left\{ \varphi \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right), \psi \in \left( -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) \right\},$$

в которой сосуществуют два аттрактора: начало координат и бесконечность ( $O^+, \infty^+$ ).

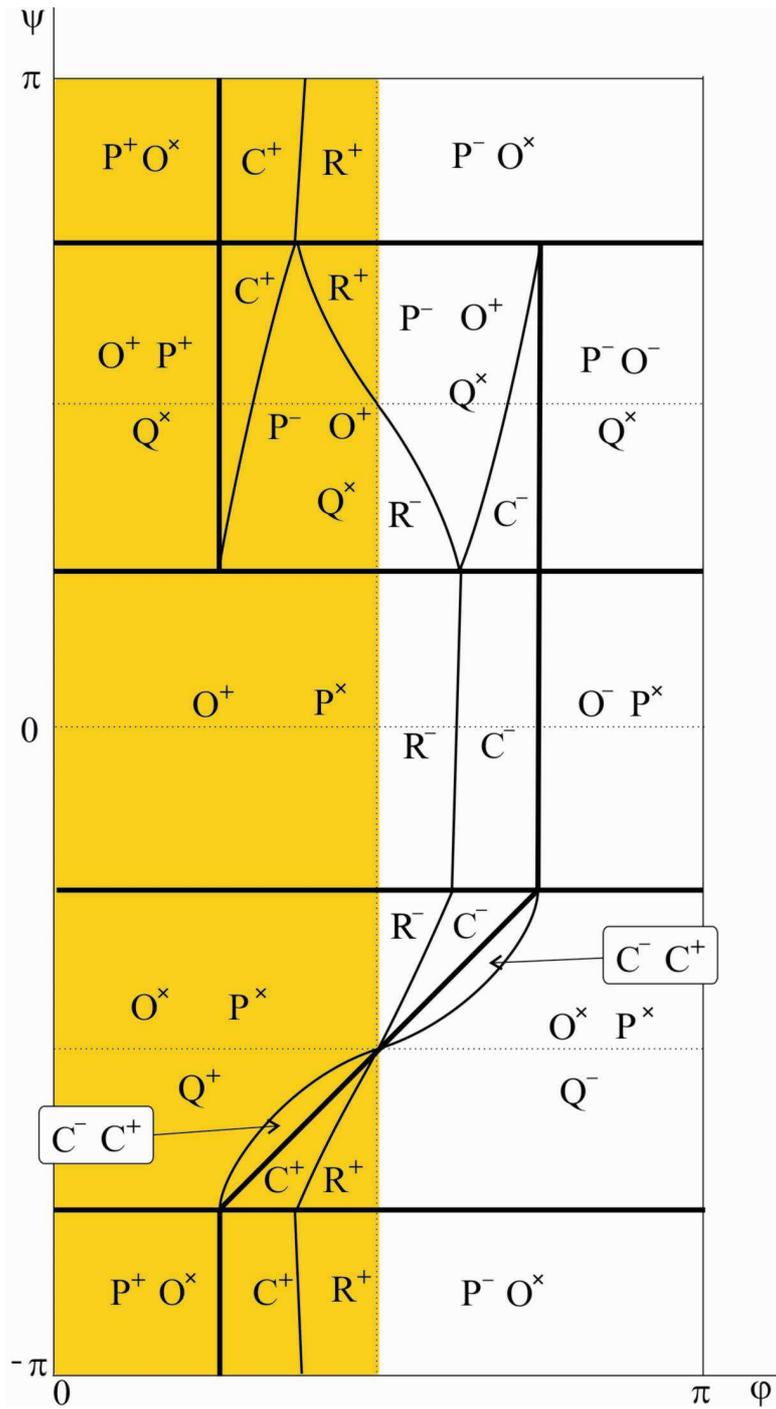


Рис. 32

Аналогичный вопрос возникает и относительно существования неустойчивых замкнутых фазовых траекторий в областях с несколькими седловыми точками, например, в области

$$\left\{ \varphi \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right), \psi \in \left( \varphi - \pi, -\frac{\pi}{4} \right) \right\},$$

в которой имеет место ситуация  $(O^\times, P^\times, Q^\times, \infty^+)$ .

Определение значений параметров, при которых существуют замкнутые траектории, и характеристик этих траекторий производилось с помощью численного интегрирования с использованием стандартных процедур в пакете MatLab при заданной относительной точности  $10^{-6}$ . Учитывая, что за счет изменения масштаба времени один из коэффициентов  $r, \rho$  можно считать равным единице, расчеты производились при  $\rho = 1$ . В результате последовательного рассмотрения каждой из построенных областей (всех 14 вариантов) найдены критические значения параметров  $\varphi, \psi$ , при которых внутри области происходят перестройки фазовых портретов, в частности, возникают или исчезают замкнутые траектории типов  $C$  и  $R$ . На рис. 32 (вышеуказанной «половине» рис. 31) представлены результаты численного анализа, указаны области существования замкнутых траекторий, отмечен характер их устойчивости, окрашена область, в которой система диссипативна в большом.

В последующих разделах на рисунках для фиксированных диапазонов изменения  $\psi$  качественно представлена эволюция фазового портрета при изменении  $\varphi$  от 0 до  $\pi$  и приведен комментарий к этому изменению. По оси абсцисс для удобства представления вместо  $y$  откладывается  $\arctg y$ . В этом случае бесконечность отображается конечным числом  $\pi/2$ .

При  $\psi = 0$  имеем случай, рассмотренный в разделе 3.3 гл. 3, хотя и в несколько других обозначениях. Поэтому специально на нем останавливаться не будем, а начнем с ситуации, когда значения этого угла лежат в диапазоне  $0 < |\psi| < \pi/4$ .

## 5. ПОЛНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С ПОЗИЦИОННО-ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ И ЧЕТЫРЬМЯ ПАРАМЕТРАМИ (КЛАССИФИКАЦИЯ ПОРТРЕТОВ)

В данной главе проводится классификация фазовых портретов при изменении параметров системы.

### 5.1. Случай $0 < |\psi| < \pi/4$ .

А.  $0 < \varphi < \pi/2$ . Почти все траектории (кроме сепаратрис, входящих в седловую точку  $P$ ) стягиваются в начало координат (рис. 33).

В.  $\pi/2 < \varphi < \varphi^*$ . Из  $\infty^-$  «спускается» цикл  $R^-$ , отталкивающая бесконечность  $\infty^-$  превращается в притягивающую  $\infty^+$ . Бифуркация аналогична бифуркации Андронова–Хопфа (рис. 34).

С.  $\varphi = \varphi^*$ . Цикл  $R^-$ , опускаясь, ложится при  $\varphi = \varphi^*$  на сепаратрисы точек  $P$ , образуя петлю сепаратрис (рис. 35).

Д.  $\varphi^* < \varphi < 3\pi/4$ . С петли снимается неустойчивый цикл  $C^-$ , который с ростом параметра  $\varphi$  сжимается (рис. 36).

Е.  $3\pi/4 < \varphi < \pi$ . При  $\varphi = 3\pi/4$  цикл  $C^-$  сжимается в точку  $O$ , происходит жесткая потеря ее устойчивости, точка  $O^+$  превращается в неустойчивую  $O^-$ . После этого все фазовые траектории уходят в бесконечность (рис. 37).

5.2. Случай  $\pi/4 < \psi < \pi/2$ . А.  $0 < \varphi < \pi/4$ . Сосуществуют два аттрактора. Закрашена область притяжения точки  $O$ . Не закрашена область притяжения точки  $P$  (рис. 38).

В.  $\pi/4 < \varphi < \varphi_1^*$ . При  $\varphi = \pi/4$  точка  $P^+$  теряет устойчивость, с нее «снимается» устойчивый цикл  $C^+$  (мягкая потеря устойчивости точки  $PO$ ). Происходит бифуркация Андронова–Хопфа (рис. 39).

С.  $\varphi = \varphi_1^*$ . Этот цикл растет с увеличением  $\varphi$  и при  $\varphi = \varphi_1^*$  вокруг неустойчивой точки  $P^-$  образуется петля сепаратрис. Вся плоскость, кроме внутренности указанной петли и сепаратрис, является областью притяжения точки (рис. 40).

Д.  $\varphi_1^* < \varphi < \pi/2$ . Петля распадается, и вся плоскость, кроме входящих в точку  $Q$  сепаратрис, является областью притяжения точки  $O$  (рис. 41).

Е.  $\pi/2 < \varphi < \varphi_2^*$ . Из бесконечности спускается неустойчивый цикл  $R^-$ . Отталкивающая бесконечность  $\infty^-$  становится притягивающей  $\infty^+$ . Область притяжения точки  $O$  — между двумя  $R^-$  (рис. 42).

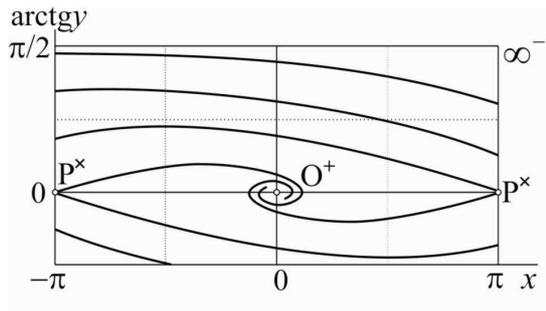


Рис. 33

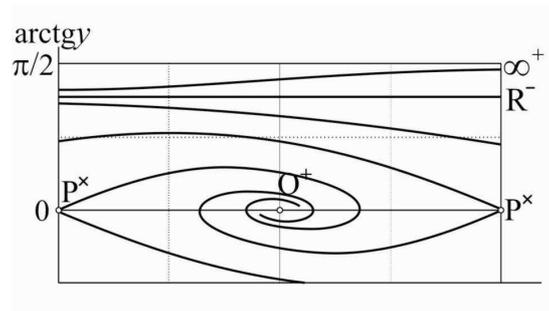


Рис. 34

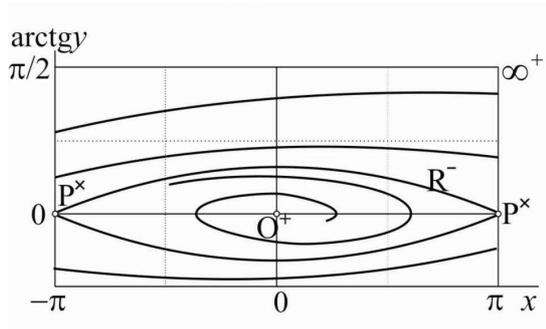


Рис. 35

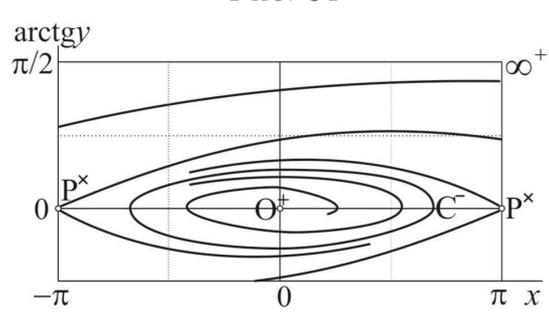


Рис. 36

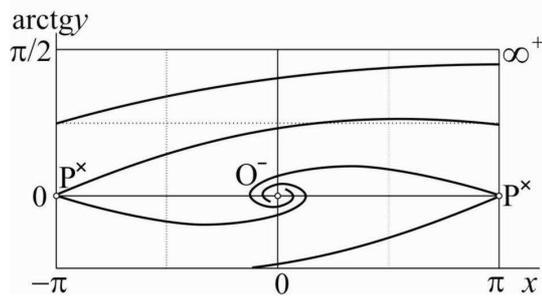


Рис. 37

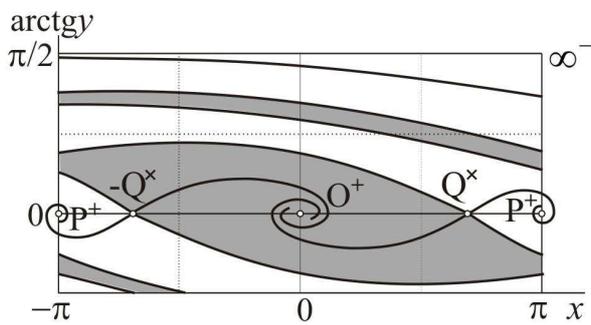


Рис. 38

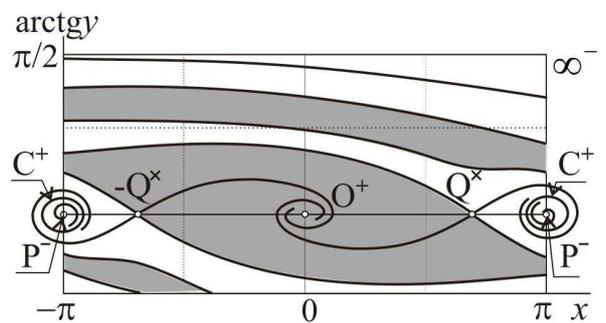


Рис. 39

Ф.  $\varphi = \varphi_2^*$ . Цикл  $R^-$ , опускаясь, «садится» на сепаратрисы точек  $Q$ , образовав петлю, охватывающую фазовый цилиндр. Область притяжения точки  $O$  закрашена (рис. 43).

Г.  $\varphi_2^* < \varphi < \varphi_3^*$ . Цикл  $R^-$  исчезает. Вокруг точек  $P$  образуются спиральные «хвосты» области притяжения точек  $O$  (рис. 44).

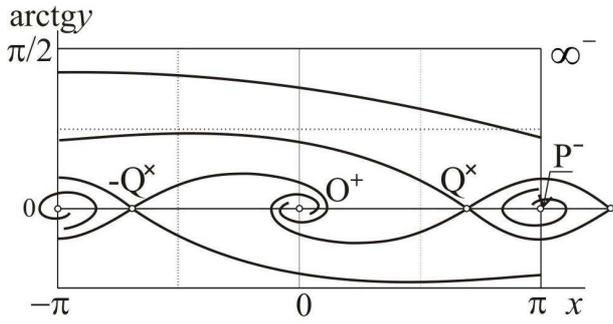


Рис. 40

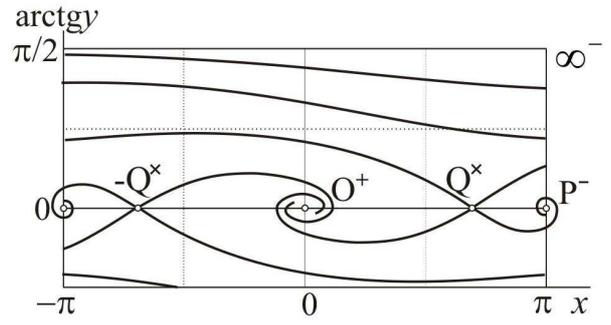


Рис. 41

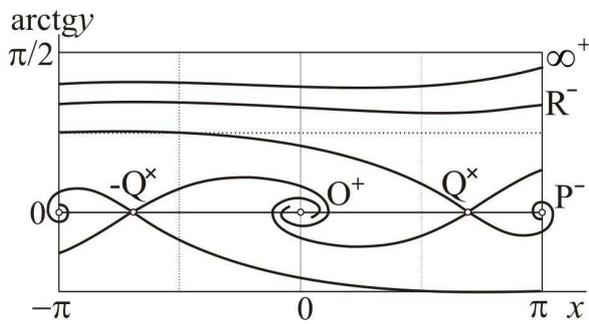


Рис. 42

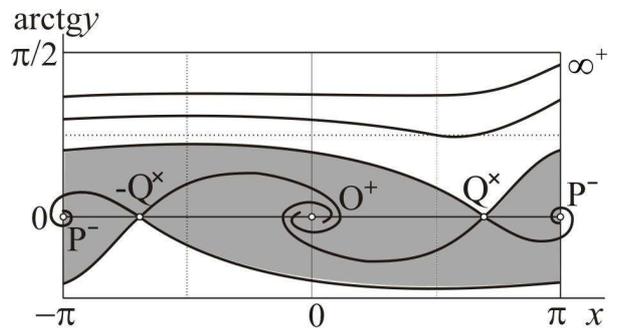


Рис. 43

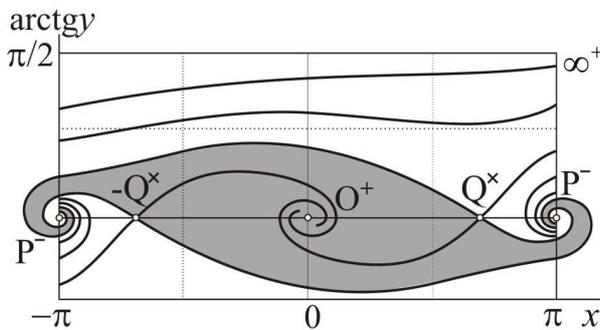


Рис. 44

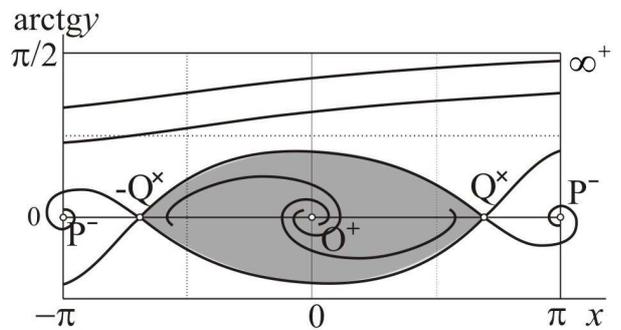


Рис. 45

Н.  $\varphi = \varphi_3^*$ . С ростом  $\varphi$  эти хвостики истончаются, и при  $\varphi = \varphi_3^*$  исчезают вовсе. При этом образуется петля сепаратрис вокруг точки  $O$ , между точками  $Q$  (рис. 45).

И.  $\varphi_3^* < \varphi < 3\pi/4$ . Эта петля при увеличении  $\varphi$  порождает неустойчивый цикл  $C^-$ , который при дальнейшем увеличении  $\varphi$  сжимается (рис. 46).

Ж.  $3\pi/4 < \varphi < \pi$ . При  $\varphi = 3\pi/4$  происходит жесткая потеря устойчивости точки  $O$ . После этого все фазовые траектории уходят в бесконечность (рис. 47).

**5.3. Случай  $3\pi/4 \leq |\psi| < \pi$ .** А.  $0 < \varphi < \pi/4$ . Единственный аттрактор — точка  $P$ . Все фазовые траектории стягиваются к этой точке. С ростом  $\varphi$  сходимость к этой точке замедляется (рис. 48).

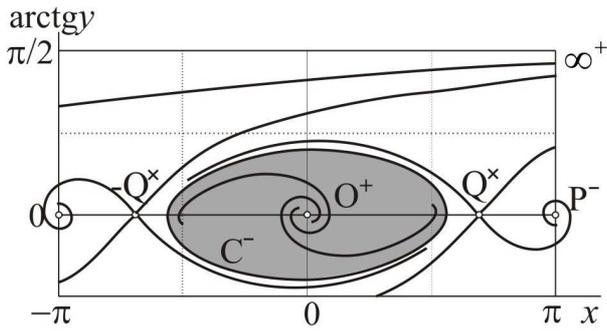


Рис. 46

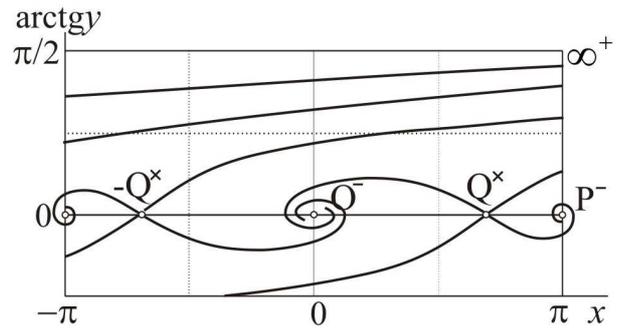


Рис. 47

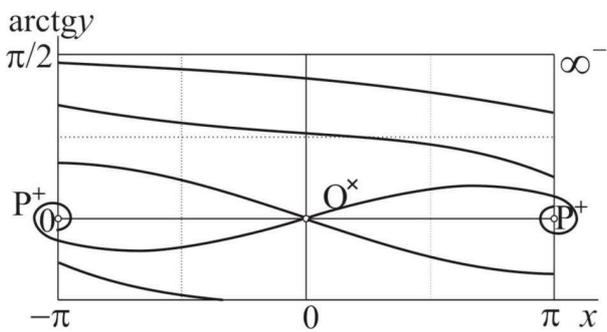


Рис. 48

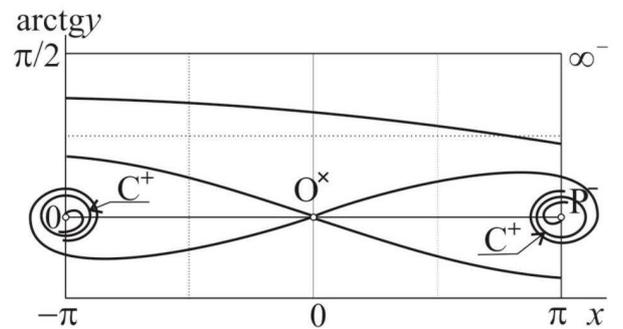


Рис. 49

В.  $\pi/4 < \varphi < \varphi^*$ . При  $\varphi = \pi/4$  происходит бифуркация Хопфа: с устойчивой точки  $P^+$  снимается устойчивый цикл  $C^+$ , а точка  $P$  становится неустойчивой. Все фазовые траектории стягиваются к этому циклу (рис. 49).

С.  $\varphi = \varphi^*$ . С увеличением  $\varphi$  цикл расширяется, и при  $\varphi = \varphi^*$  он садится на сепаратрисы седловой точки  $O$ , образуя притягивающие петли, охватывающие фазовый цилиндр (рис. 50).

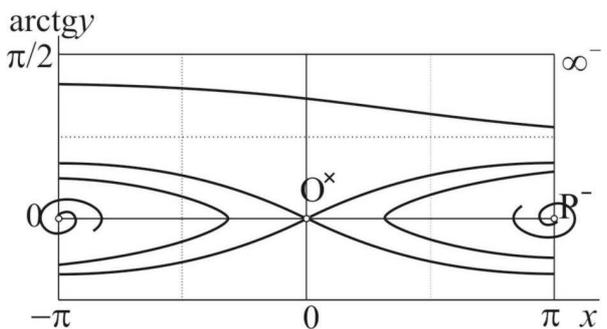


Рис. 50

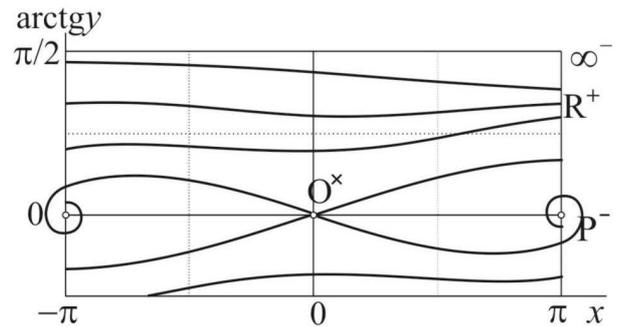


Рис. 51

Д.  $\varphi^* < \varphi < \pi/2$ . При дальнейшем увеличении  $\varphi$  с этих петель снимаются два симметричных устойчивых цикла  $R^+$  (показан только один), которые раздвигаются с ростом  $\varphi$ . Почти все фазовые траектории стягиваются к одному из циклов  $R^+$  (рис. 51).

Е.  $\pi/2 < \varphi < \pi$ . При  $\varphi = \pi/2$  эти циклы уходят в бесконечность, так что она превращается в притягивающую  $\infty^+$ . С увеличением  $\varphi$  все фазовые траектории уходят в бесконечность (рис. 52).

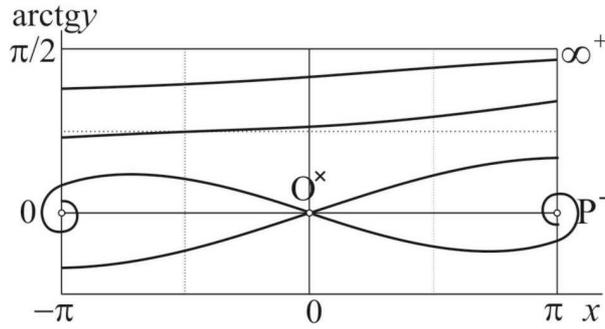


Рис. 52

6. ПОЛНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С ПОЗИЦИОННО-ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ И ЧЕТЫРЬМА ПАРАМЕТРАМИ (КЛАССИФИКАЦИЯ ПОРТРЕТОВ). ПРОДОЛЖЕНИЕ

В данной главе продолжается классификация фазовых портретов при изменении параметров системы.

**6.1. Случай**  $-\pi/2 \leq |\psi| < -\pi/4$ . А.  $0 < \varphi < \pi/2$ . Две устойчивых точки, область притяжения одной из них закрашена. Все фазовые траектории стягиваются к одной или другой (рис. 53).

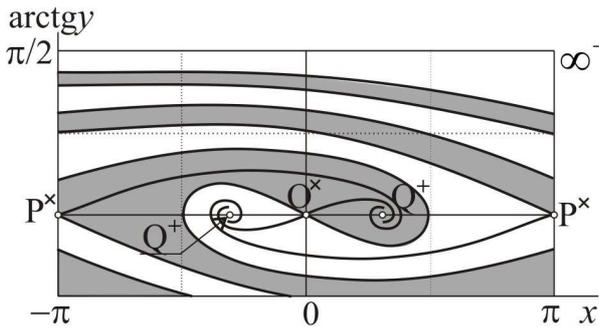


Рис. 53

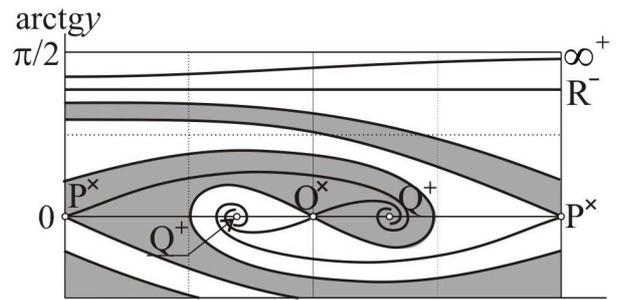


Рис. 54

В.  $\pi/4 < \varphi < \varphi_1^*$ . Из «спускается» цикл  $R^-$ , и отталкивающая бесконечность  $\infty^-$  превращается в притягивающую  $\infty^+$ . Ситуация аналогична разделу 5.1 главы 5 (рис. 54).

С.  $\varphi = \varphi_1^*$ . Цикл  $R^-$ , опускаясь, ложится, в конце концов, при  $\varphi = \varphi_1^*$  на сепаратрисы седловых точек  $P$ , образуя петлю, охватывающую фазовый цилиндр (рис. 55).

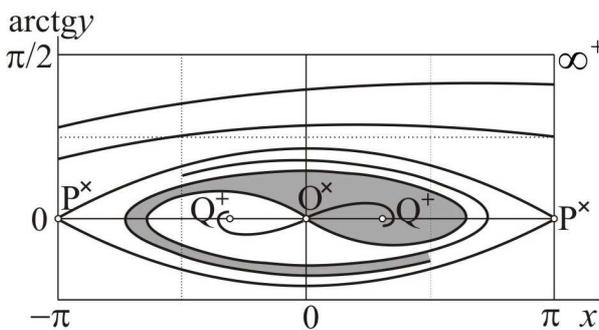


Рис. 55

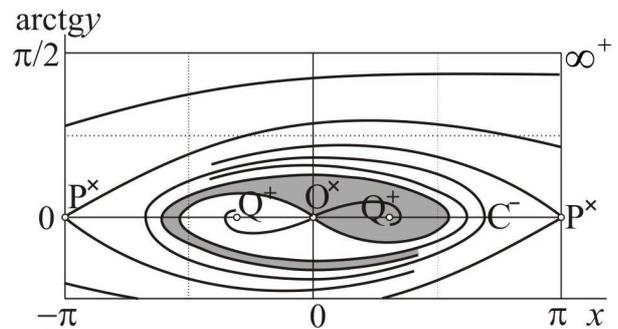


Рис. 56

Д.  $\varphi_1^* < \varphi < \pi + \psi$ . С петли снимается неустойчивый цикл  $C^-$ , который с ростом параметра  $\varphi$  сжимается. Фазовые траектории, лежащие снаружи этого цикла, уходят в бесконечность (рис. 56).

Е.  $\pi + \psi < \varphi < \varphi_2^*$ . При  $\psi = \pi + \psi$  устойчивые точки  $Q^+$  порождают устойчивые циклы  $C^+$  и превращаются в неустойчивые точки  $Q^-$  (бифуркация Хопфа). С ростом  $\varphi$  циклы  $C^+$  растут, а цикл  $C^-$  сжимается (рис. 57).

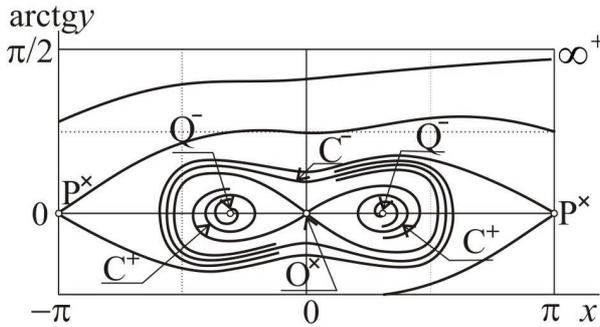


Рис. 57

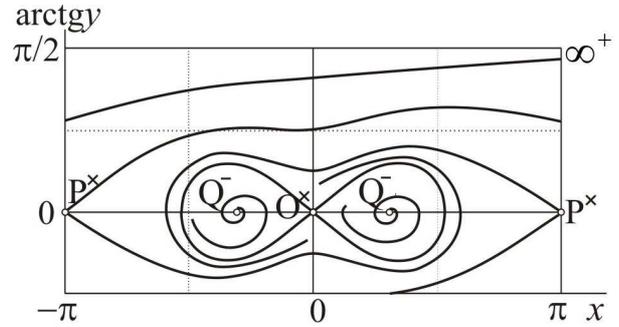


Рис. 58

Ф.  $\varphi = \varphi_2^*$ . В случае необщего положения при некотором  $\varphi = \varphi_2^*$  эти циклы совпадают с сепаратрисами, как на рисунке<sup>1</sup> (рис. 58).

Г.  $\varphi_2^* < \varphi < \pi$ . Циклы исчезли, и все траектории стали уходить в бесконечность (рис. 59).

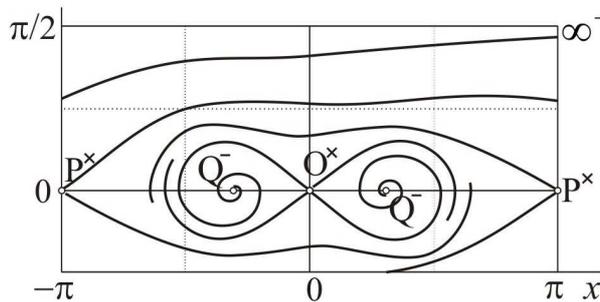


Рис. 59

**6.2. Случай  $-3\pi/4 \leq \psi < -\pi/2$ .** А.  $0 < \varphi < \varphi_1^*$ . Имеются две устойчивые точки покоя. Область притяжения одной из них закрашена. Все фазовые траектории стягиваются к этим точкам (рис. 60).

В.  $\varphi = \varphi_1^*$ . С ростом  $\varphi$  «хвосты» областей притяжения истончаются, и при  $\varphi = \varphi_1^* < \pi/2$  каждая область притяжения (обе закрашены) превращаются во внутренность петли, образованной сепаратрисами точки  $O$  (рис. 61).

С.  $\varphi_1^* < \varphi < \pi + \psi$ . При увеличении  $\varphi$  в случае необщего положения эти петли распадаются на расширяющийся устойчивый цикл  $C^+$  и пару сжимающихся неустойчивых циклов  $C^-$ . См. примечание в разделе 6.1 главы 6 (рис. 62).

Д.  $\pi + \psi < \varphi < \varphi_2^*$ . При  $\varphi = \pi + \psi$  циклы  $C^-$  сжимаются в точки  $Q$ , которые становятся неустойчивыми (бифуркация Хопфа). Все фазовые траектории стягиваются к единственному аттрактору — устойчивому циклу  $C^+$  (рис. 63).

Е.  $\varphi = \varphi_2^*$ . С ростом  $\varphi$  этот цикл расширяется и при некотором  $\varphi = \varphi_2^*$  сливается с сепаратрисами точек  $P$ , образуя петли, охватывающие фазовый цилиндр (рис. 64).

<sup>1</sup>В общем случае совпадение происходит поэтапно: сначала циклы  $C^+$  с сепаратрисами, затем с циклом  $C^-$  или наоборот. Фазовые траектории снаружи  $C^-$  уходят в бесконечность.

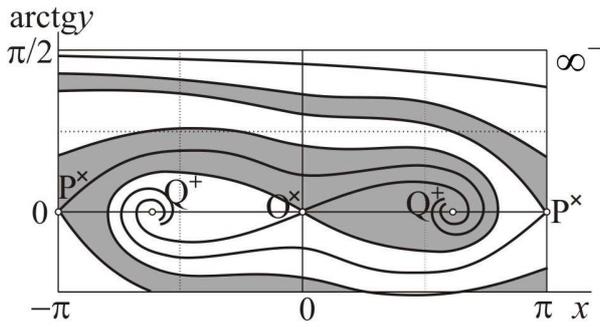


Рис. 60

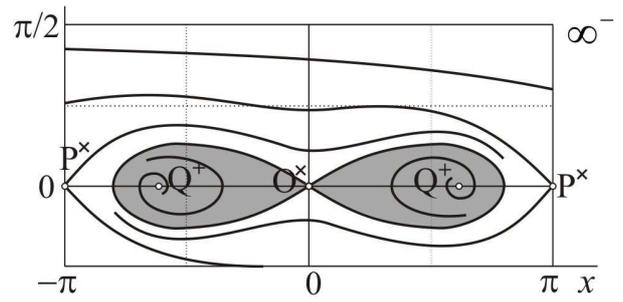


Рис. 61

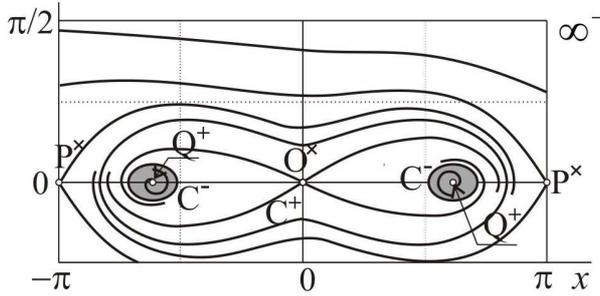


Рис. 62

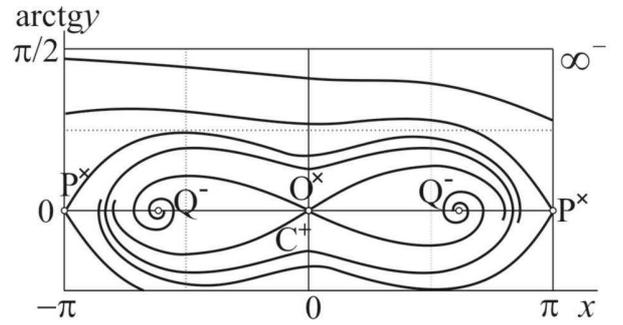


Рис. 63

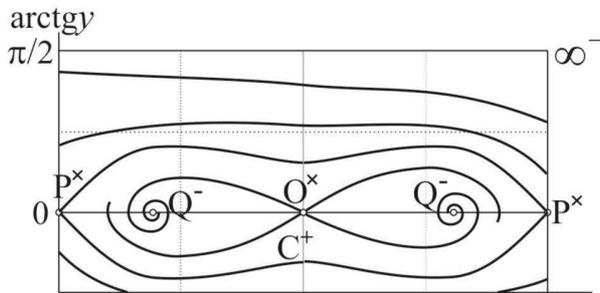


Рис. 64

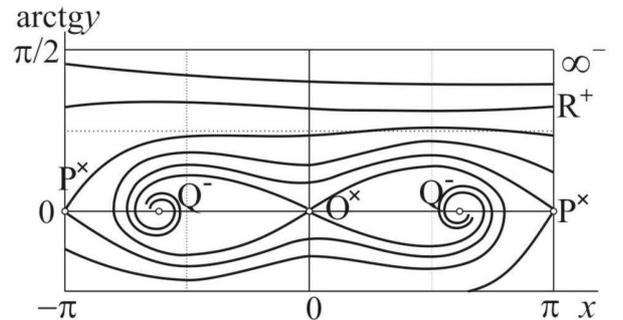


Рис. 65

Ф.  $\varphi_2^* < \varphi < \pi/2$ . При дальнейшем увеличении  $\varphi$  с этой петли снимается устойчивый цикл  $R^+$ , который с ростом  $\varphi$  поднимается и уходит в бесконечность при  $\varphi = \pi/2$  (рис. 65).

Г.  $\pi/2 < \varphi < \pi$ . При  $\varphi > \pi/2$  все фазовые траектории уходят в бесконечность (положительную или отрицательную) (рис. 66).

Раздел 5.3 главы 5 при  $3\pi/4 \leq |\psi| < \pi$  в некотором смысле является антиподом разделу 5.1 главы 5 при  $0 < |\psi| < \pi/4$ : меняются точки  $O$  и  $P$  местами, изменяется на противоположный характер устойчивости циклов. Иначе обстоит дело для значений  $|\psi|$  около  $\pi/2$  (см. разделы 5.2 главы 5 и 6.2 главы 6).

В приведенных разделах отсутствует диапазон  $\pi/2 < \psi < 3\pi/4$ . Дело в том, что при этих значениях  $\psi$  картина эволюции фазовых портретов аналогична той, которая представлена в разделе 5.2 главы 5 для  $\pi/4 < \psi < \pi/2$ , некоторые несущественные изменения в достаточной степени наглядности отражены на рис. 30.

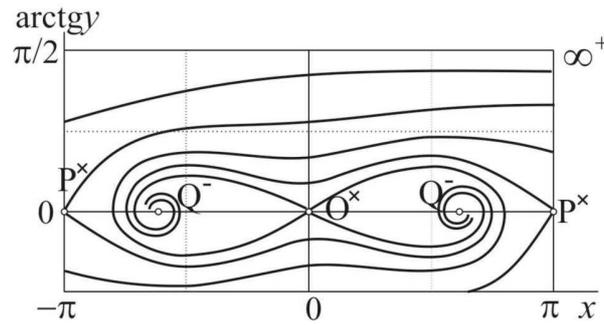


Рис. 66

**6.3. Замкнутые траектории.** Как уже упоминалось выше, существенный интерес вызывают замкнутые фазовые траектории, как типа  $C$  (циклы, расположенные на развертке фазового цилиндра), так и типа  $R$  (циклы, охватывающие фазовый цилиндр). Из рис. 30 видно, что при смене свойства притяжения/отталкивания бесконечности (смене знака коэффициента  $a$  в уравнении (4.1)) или, что то же самое, при переходе через значение  $|\psi| = \pi/2$  возникает цикл типа  $R$ . В полосах  $|\psi| < \pi/4$  и  $3\pi/4 < |\psi| < \pi$  при изменении  $\varphi$  вдоль прямых  $\psi = \text{const}$  наблюдается переход от цикла  $R$  к циклу  $C$ . Он происходит одним и тем же способом: через образование петли сепаратрис седловых точек вокруг точки покоя. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Ниже будет показано, что при некоторых значениях параметров удастся найти аналитическое выражение для уравнения фазовой траектории, отвечающей указанному переходу.

Искомая фазовая траектория, отвечающая переходу от цикла  $R$  к циклу  $C$  (или наоборот), качественно представлена в разделе 5.3 главы 5 (при  $\varphi = \varphi^*$ ), разделе 6.1 главы 6 (при  $\varphi = \varphi_1^*$ ), разделе 6.2 главы 6 (при  $\varphi = \varphi_2^*$ ). В соответствии с этими представлениями будем искать уравнение «переходной» фазовой траектории в виде

$$y_R(x) = A \cos \frac{x}{2} - B \sin x. \quad (6.1)$$

При этом, очевидно,  $y_R(-\pi) = y_R(\pi) = 0$ , и функция (6.1) образует петлю вокруг точки  $O$ . Кроме того, эта функция должна удовлетворять дополнительным требованиям  $y'_R(-\pi) > 0$ ,  $y'_R(\pi) < 0$ , откуда следует одно из необходимых условий на искомые параметры  $A$  и  $B$ :

$$A > 2|B|.$$

Из системы (4.1) следует уравнение

$$yy' + (a + b \cos x)y + (c + d \cos x) \sin x = 0.$$

Подставляя выражение (6.1) в это уравнение и приравнявая нулю полученные коэффициенты при четырех тригонометрических функциях ( $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos 3x/2$ ,  $\sin 2x$ , других функций там нет), получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} B - 4a - 2b = 0, \\ A^2 + 4aB - 4c = 0, \\ 3B - 2b = 0, \\ B^2 - bB + d = 0. \end{cases}$$

Она содержит два искомых коэффициента  $A, B$  и параметры самого уравнения (4.1). Из этих уравнений с учетом требования  $A > 2|B|$  удастся выразить в явной форме два искомых коэффициента  $A, B$  и два соотношения между параметрами уравнения через параметры  $a$  и  $c$ :

$$A = 2\sqrt{c + 2a^2}, \quad B = -a, \quad b = -3a, \quad d = 2a^2 \quad (6.2)$$

при единственном условии  $c > -2a|a|$ .

Таким образом, уравнение искомой фазовой траектории, описывающей переход между циклами  $R$  и  $C$ , при выполнении условий  $c > -2a|a|$ ,  $b = -3a$ ,  $d = 2a^2$  имеет вид

$$y_R(x) = 2\sqrt{c + 2a^2} \cos \frac{x}{2} + 2a \sin x. \quad (6.3)$$

Аналогичным образом может быть найдено и уравнение фазовой траектории, описывающей переход между циклами  $R$  и  $C$  в полосе  $-3\pi/4 < \psi < -\pi/4$ .

Дополнительные примеры

В предыдущих разделах были рассмотрены некоторые системы, которые являются частными случаями системы (4.1). В этом разделе отметим еще две подобные системы.

**6.4. Колебания тела с плоским торцом.** В [22] рассматривалась задача о колебаниях тела с плоским торцом в условиях струйного обтекания. При определенных условиях задача сводилась к уравнениям (здесь введены несколько иные обозначения, чем в цитируемой работе)

$$\begin{cases} \dot{x} = y - b \sin x, \\ \dot{y} = -ay - d \sin x \cos x, \end{cases} \quad (6.4)$$

где  $x$  — угол атаки (угол между скоростью набегающего потока и нормалью к плоскости торца),  $y$  — угловая скорость тела. Заметим, что в этих уравнениях имеется всего три параметра, а не четыре, как в общем случае.

Уравнения (6.4) легко приводятся к системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{z} = -(a + b \cos x)z - (ab + d \cos x) \sin x, \end{cases}$$

где введено обозначение  $z = y - b \sin x$ , которая имеет вид системы (4.1), если там положить

$$c = ab.$$

Это условие в параметрах предыдущего раздела имеет вид

$$\cos \psi = \frac{r^2}{\rho} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (6.5)$$

Выше уже отмечалась роль параметра  $r^2/\rho$ , обозначим его буквой  $p$ . Он может принимать, вообще говоря, любые неотрицательные значения.

На рис. 67 представлены кривые, описываемые уравнением (6.5) в плоскости  $\varphi, \psi$  (точнее, в области  $\{0 \leq \varphi \leq \pi, -\pi \leq \psi \leq \pi\}$ ) при различных значениях  $p$ . Сопоставляя этот рисунок с рис. 32, видим, что циклы типа  $R$  при условии (6.5) вообще не существуют ни при каких значениях  $p$ . А вот циклы типа  $C$  могут существовать: в области  $\{\pi/4 < \varphi < \varphi_1^*, \pi/4 < \psi < \pi/2\}$  — цикл  $C^+$ , где система диссипативна в большом, и в области  $\{\varphi_1^* < \varphi < 3\pi/4, \pi/2 < \psi < 3\pi/4\}$  — цикл  $C^-$ , система в большом антидиссипативна, а значения  $\varphi_1^*$  соответствуют диапазонам изменения  $\psi$  (см. разделы выше).

Таким образом, проведенный анализ показал, что авторотационных режимов в исходной системе (6.4) не существует, а автоколебательные могут существовать в сравнительно узком диапазоне значений параметров.

Нетрудно определить и диапазон значений параметра  $p$ , при которых могут существовать автоколебательные режимы. Максимально возможное значение  $p$ , учитывая рис. 32 и 67, очевидно, определяется точкой  $\varphi = \pi/4, \psi = \pi/4$ . Следовательно, автоколебательные режимы могут существовать только для значений  $p$ , принадлежащих интервалу  $p \in (0, \sqrt{2})$ .

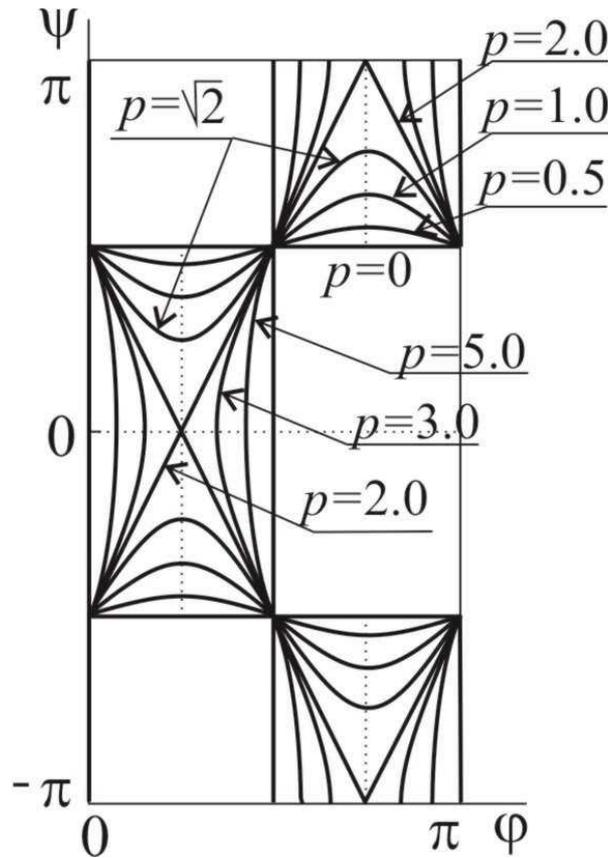


Рис. 67

**6.5. Детальный анализ.** При создании математической модели аэродинамического маятника с пластинкой вдоль державки использовались гипотеза квазистационарности обтекания и концепция мгновенного угла атаки [13, 10, 12]. Характерной особенностью этой модели является наличие множителя вида  $a + b \cos x$  в аналитической записи момента  $f(x, y)$  в (2.1). Отобразим эту особенность в рассматриваемой модели (4.1).

Учитывая представления (4.4), будем считать, что имеют место равенства

$$\cos \varphi = \cos \psi, \sin \varphi = \sin \psi.$$

Отсюда получаем множество точек в квадрате  $-\pi \leq \varphi \leq \pi, -\pi \leq \psi \leq \pi$ , которые удовлетворяют этим равенствам; оно состоит из отрезка прямой

$$\psi = \varphi, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad (6.6)$$

и двух точек

$$\psi = -\varphi = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (6.7)$$

При этом система уравнений (4.3) при подходящей замене времени примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -(\cos \varphi + \sin \varphi \cos x)(sy + \sin x), \end{cases} \quad (6.8)$$

где положительный параметр  $s = r/\sqrt{\rho}$  не влияет на существование точек покоя и характер их устойчивости (очевидно соотношение  $s = \sqrt{\rho}$ ). Поэтому сосредоточимся на влиянии параметра  $\varphi$ .

Рассмотрим сначала точки  $|\psi| = |\varphi| = \pi/2$ . Во всех этих четырех точках уравнения (6.8) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \pm \cos x (sy + k \sin x), \end{cases} \quad (6.9)$$

где  $k$  может принимать значения  $\pm 1$  независимо от знака перед скобкой. По структуре все четыре уравнения (6.9) совпадают с рассмотренным выше уравнением (2.3). В силу свойств этого уравнения фазовые траектории системы (6.9) симметричны относительно прямой  $x = \pi/2$ , и поэтому никаких циклов в рассматриваемом случае ( $|\psi| = |\varphi| = \pi/2$ ) нет.

Перейдем теперь к рассмотрению точек отрезка (6.6). Из рис. 32 видно, что и для этих точек циклы на фазовом портрете отсутствуют. Причем для отрезков

$$\psi = \varphi, \quad \varphi \in (-\pi, -3\pi/4) \cup (-\pi/4, \pi)$$

из рис. 32 ясен и характер устойчивости точек покоя. Не ясен характер устойчивости точек покоя для отрезка

$$\psi = \varphi, \quad \varphi \in (-3\pi/4, -\pi/4)$$

(слева от этого отрезка точки  $Q$  неустойчивы, а справа — устойчивы). Таким образом, вдоль отрезка

$$\psi = \varphi, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

имеем распределение точек покоя и характера их устойчивости, показанное на рис. 68.

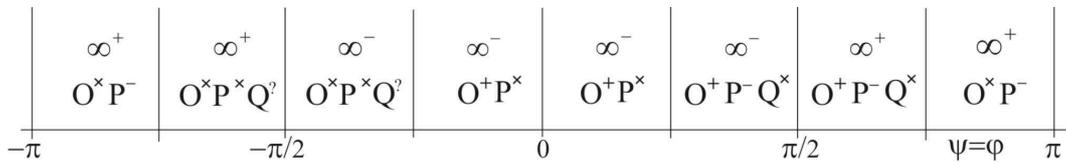


Рис. 68

Здесь через  $Q^?$  обозначена точка  $Q$  с неизвестным характером устойчивости. Оказывается, в первом приближении точка  $Q$  является центром, так что для определения характера ее устойчивости необходимо привлекать, по крайней мере, уравнения, содержащие второй порядок отклонений от точки  $Q$ . Можно показать, применяя методику Малкина (см. [14]) к уравнениям второго приближения (опуская выкладки из-за их громоздкости), что точка  $Q$  в рассматриваемом случае является неустойчивым фокусом.

**6.6. Некоторые обобщения: системы, зависящие от функциональных классов.** Выше, а также в [23], проведено полное исследование динамической системы (2.4) на фазовом цилиндре. Система (2.4) определена с помощью пространства функций  $\Phi$  и имеет фазовый портрет, не меняющий своего топологического типа при варьировании функции  $F$  вдоль всего класса  $\Phi$  (рис. 15).

Напомним также, что система вида (2.4) может быть получена из системы динамических уравнений третьего порядка для свободного твердого тела путем редукции к системе второго порядка на фазовом цилиндре, при этом  $\varepsilon = 1$ , переменная  $x$  имеет смысл угла атаки при движении свободного тела, а переменная  $y$  — угловой скорости.

Также система вида (2.4) может быть получена из уравнения второго порядка для закрепленного твердого тела, при этом  $\varepsilon = -1$ , переменная  $x$  имеет смысл угла отклонения при движении закрепленного тела, а переменная  $y$  — угловой скорости [10, 12, 21, 22].

6.6.1. *Несохранение топологических особенностей фазовых портретов общей системы.* Будем рассматривать более общую систему, чем система (2.4), а именно,

$$\begin{cases} \dot{x} = y + A_1 \frac{F(x)}{\cos x}, \\ \dot{y} = A_2 F(x) - hy, \quad A_1 > 0, \quad A_2 < 0, \end{cases} \quad (6.10)$$

на фазовом цилиндре

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \bmod 2\pi\},$$

в правую часть которой входит функция  $F(x)$ , пробегающая функциональный класс  $\Phi$  (см. раздел 2.5.3 главы 2). Система (6.10) была изучена в задаче о плоскопараллельном движении твердого тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы и дополнительного демпфирования со стороны среды (см. [2, 4, 7]).

Итак, в данном случае нам опять приходится исследовать динамическую систему, определенную с помощью функции, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

Система (6.10) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = A_2 F(x) + u \frac{d}{dx} g(x) - h(u - g(x)), \end{cases} \quad (6.11)$$

где по-прежнему

$$g(x) = A_1 \frac{F(x)}{\cos x} \quad (6.12)$$

— гладкая функция.

В частности, при выполнении условий (2.6) ( $F(x) = AB \sin x \cos x$  — функция типа функций Чаплыгина [20, 19]) система (6.11) примет вид аналитической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = -AB \sin x \cos x + ABu \cos x - hu + hAB \sin x, \end{cases} \quad (6.13)$$

и при  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = -1$ ,  $a = h$ ,  $b = -AB$ ,  $c = -hAB$ ,  $d = AB$ ,  $u \leftrightarrow y$  совпадает с системой (4.1).

Система частного вида (2.9) сохраняет все топологические особенности строения фазового портрета общей системы (2.7). А вот система (6.13) не обладает таким свойством по отношению к системе (6.10) [21, 23] по следующей причине. Пространство векторных полей систем вида (6.10) делится, по крайней мере, на два класса, в каждом из которых соответствующий фазовый портрет имеет определенный тип. По мере исследования системы (6.10) будет указано, для каких функций  $F \in \Phi$  проводится качественный анализ.

6.6.2. *Точки покоя системы.* Проведем качественный анализ динамической системы (6.10) на фазовом цилиндре.

Множество точек покоя системы (6.10) разбивается на следующие части.

Введем семейство полос на плоскости

$$\Pi_{(x_1, x_2)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < x < x_2\},$$

при этом

$$\Pi_{(-\pi/2, \pi/2)} = \Pi, \quad \Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi'.$$

В полосе  $\Pi$  (или  $\Pi'$ ) существуют изолированные точки покоя, которые находятся из системы

$$\{x = 0 \bmod \pi, \quad y = 0\}.$$

У системы (6.10) также существуют точки покоя

$$\left( \pm \arccos \left( \frac{-A_1 h}{A_2} \right), \pm \frac{A_2}{h} F \left( \arccos \left( \frac{-A_1 h}{A_2} \right) \right) \right) \quad (6.14)$$

если и только если

$$0 < h < -\frac{A_2}{A_1}.$$

При выполнении последнего условия они появляются лишь в полосе  $\Pi$ .

Если и только если

$$\frac{A_2}{A_1} < h < 0,$$

то, в свою очередь, точки покоя (6.14) появляются в полосе  $\Pi'$  (и только в ней).

*6.6.3. Симметрии векторного поля системы на фазовом цилиндре квазискоростей.* Векторное поле системы (6.10) обладает следующими видами симметрий:

- 1) центральной симметрией; такая симметрия возле точек  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , возникает по причине того, что векторное поле системы в координатах  $(x, y)$  меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k - x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi k + x \\ y \end{pmatrix};$$

- 2) некоторой расширенной зеркальной симметрией; такая симметрия в пространстве  $\mathbb{S}^1\{x \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^2\{y, h\}$  относительно плоскостей

$$\{(x, y, h) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{\pi}{2} + \pi i, i \in \mathbb{Z}\}$$

возникает по причине того, что  $x$ -составляющая векторного поля системы в координатах  $(x, y)$  сохраняется при замене

$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i - x \\ y \\ -h \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i + x \\ y \\ h \end{pmatrix},$$

а  $y$ -составляющая меняет знак.

Следствием некоторой расширенной зеркальной симметрией является некоторая зеркальная симметрия некоторая зеркальная симметрия векторного поля системы (2.4) на фазовом цилиндре квазискоростей, если и только если в системе (6.10) положить  $h = 0$ .

*6.6.4. Замечания об интегрируемости системы.* У рассматриваемой системы при некоторых условиях существуют притягивающие и отталкивающие не только точки покоя, но и предельные циклы. Таким образом (см. также [21, 23]), у системы (6.10) если и существует первый интеграл на всем фазовом цилиндре, то он является разрывной функцией не только в отталкивающих и притягивающих точках, но и на целых замкнутых кривых.

В данной работе вопросы интегрируемости систем через конечную комбинацию элементарных функций подробно не рассматриваются.

**6.7. Топологическое строение типичных фазовых портретов.** Как указывалось выше, в отличие от системы (2.4), система (6.10) при фиксированном значении  $h \neq 0$  при разных функциях  $F \in \Phi$  может иметь различный топологический тип своего фазового портрета. Различия в топологических типах портретов на цилиндре могут появляться при условии, если

$$F_1'''(0) + 3F_1'(0) > 0$$

для портрета системы (6.10) с одной функцией  $F = F_1(x) \in \Phi$  (рождается неустойчивый цикл при  $h > A_1 F'(0)$ ) и если

$$F_2'''(0) + 3F_2'(0) < 0$$

для портрета системы (6.10) с другой функцией  $F = F_2(x) \in \Phi$  (рождается устойчивый цикл при  $h < A_1 F'(0)$ ). В данном случае необходимо конкретно выделять тот подкласс функций из класса  $\Phi$ , для которого исследуется топологический тип фазовых портретов систем, определяемых с помощью такого подкласса.

*6.7.1. Топологическая классификация точек покоя системы.* Проведем типичную топологическую классификацию особых точек  $(0, 0)$  и  $(\pi, 0)$  системы (6.10) для функции типа функций Чаплыгина (2.6) на цилиндре, поскольку полученные далее соотношения на постоянные  $A_1$  и  $A_2$  для нее отличаются от аналогичных соотношений для системы (6.10) заменой  $A_1$  на  $A_1 F'(0)$  и  $A_2$  на  $A_2 F'(0)$ .

Характеристические корни системы (6.10) при условии (2.6), линеаризованной возле точки  $(0, 0)$ , имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(A_1 - h \pm [(h_1 + A_1)^2 + 4A_2]^{1/2}),$$

а бифуркационное множество состоит из следующих постоянных:

$$\left\{ A_1, -\frac{A_2}{A_1}, -A_1 + 2\sqrt{-A_2}, -A_1 - 2\sqrt{-A_2} \right\}.$$

Для точки  $(\pi, 0)$  имеем аналогичные выражения при замене  $A_1$  на  $-A_1$ .

Точки покоя (6.14) являются седлами для любого

$$h \in \left( \frac{A_2}{A_1}, -\frac{A_2}{A_1} \right).$$

Как уже отмечалось, аналогичные соотношения для системы (6.10) общего вида отличаются от предыдущих ненулевой мультипликативной постоянной (т.е.  $A_{1,2} \mapsto A_{1,2} F'(0)$ ).

Для дальнейшего изложения удобно ввести следующие обозначения и аббревиатуры:

$$\xi = \frac{A_2}{A_1}, \quad \eta_+^\pm = A_1 \pm 2\sqrt{-A_2}, \quad \eta_-^\pm = -A_1 \pm 2\sqrt{-A_2},$$

при этом, как и в других местах работы, С — седло, УУ — устойчивый узел, НУ — неустойчивый узел, УФ — устойчивый фокус, НФ — неустойчивый фокус, УЦ — устойчивый предельный цикл, НЦ — неустойчивый предельный цикл, ФП — фазовый портрет.

Классификация точек покоя  $(0, 0)$  и  $(\pi, 0)$  приведена в таблицах 1–4 и соответствует следующим четырем случаям:

**Случай 1** (табл. 1):

$$\xi < \eta_-^- < \eta_+^- < -A_1 < 0 < A_1 < \eta_-^+ < \eta_+^+ < -\xi.$$

**Случай 2** (табл. 2):

$$\eta_-^- < \xi < \eta_+^- < -A_1 < 0 < A_1 < \eta_-^+ < -\xi < \eta_+^+.$$

**Случай 3** (табл. 3):

$$\eta_-^- < -A_1 < \xi < \eta_+^- < 0 < \eta_-^+ < -\xi < A_1 < \eta_+^+.$$

**Случай 4** (табл. 4):

$$\eta_-^- < -A_1 < \eta_-^+ < \xi < 0 < -\xi < \eta_+^- < A_1 < \eta_+^+.$$

На рис. 69–76 на фазовых портретах вместо символов  $\alpha, \Omega$  следует понимать переменные  $x, y$  соответственно. Кроме того, на этих рисунках положения равновесия, лежащие на оси абсцисс, имеют координаты  $(\pm\pi, 0)$ .

*6.7.2. О траекториях, уходящих на бесконечность на фазовой плоскости.* У системы вида (6.10) при любом  $h \in \mathbb{R}$  не существует фазовой траектории, имеющей горизонтальную или вертикальную асимптоты на фазовой плоскости в окрестности бесконечно удаленной точки [21, 23].

**Лемма 6.1.** У системы (6.10) для любого  $h \neq 0$  существуют траектории, уходящие на бесконечность и стремящиеся к некоторым прямым семейства, задаваемого линейной дифференциальной формой

$$dy + hdx = 0.$$

ТАБЛИЦА 1

Случай	Интервал изменения $h$	$(0,0)$	$(\pi, 0)$	Номер фигуры
1	$(-\infty, \xi)$	НУ	С	69
2	$(0, \eta_-^-)$	НУ	НУ	76*
3	$(\eta_-^-, \eta_+^-)$	НФ	НУ	76*
4	$(\eta_+^-, -A_1)$	НФ	НФ	76
5	$(-A_1, 0)$	НФ	УФ	НЦ-72, 74
6	$(0, A_1)$	НФ	УФ	УЦ-71, 73
7	$(A_1, \eta_+^+)$	УФ	УФ	75
8	$(\eta_-^+, \eta_+^+)$	УУ	УФ	75*
9	$(\eta_+^+, -\xi)$	УУ	УУ	75*
10	$(-\xi, +\infty)$	С	УУ	70

ТАБЛИЦА 2

Случай	Интервал изменения $h$	$(0,0)$	$(\pi, 0)$	Номер фигуры
1	$(-\infty, \eta_-^-)$	НУ	С	69
2	$(\eta_-^-, \xi)$	НФ	С	69*
3	$(\xi, \eta_+^-)$	НФ	НУ	76*
4	$(\eta_+^-, -A_1)$	НФ	НФ	76
5	$(-A_1, 0)$	НФ	УФ	НЦ-72, 74
6	$(0, A_1)$	НФ	УФ	УЦ-71, 73
7	$(A_1, \eta_+^+)$	УФ	УФ	75
8	$(\eta_-^+, -\xi)$	УУ	УФ	75*
9	$(-\xi, \eta_+^+)$	С	УФ	70*
10	$(\eta_+^+, +\infty)$	С	УУ	70

ТАБЛИЦА 3

Случай	Интервал изменения $h$	$(0,0)$	$(\pi, 0)$	Номер фигуры
1	$(-\infty, \eta_-^-)$	НУ	С	69
2	$(\eta_-^-, -A_1)$	НФ	С	69*
3	$(-A_1, \xi)$	НФ	С	69*
4	$(\xi, \eta_+^-)$	НФ	УУ	74*
5	$(\eta_+^-, 0)$	НФ	УФ	74
6	$(0, \eta_+^+)$	НФ	УФ	69
7	$(\eta_+^+, -\xi)$	НУ	УФ	73*
8	$(-\xi, A_1)$	С	УФ	70*
9	$(A_1, \eta_+^+)$	С	УФ	70*
10	$(\eta_+^+, +\infty)$	С	УУ	70

ТАБЛИЦА 4

Случай	Интервал изменения $h$	$(0,0)$	$(\pi, 0)$	Номер фигуры
1	$(-\infty, \eta_-^-)$	НУ	С	69
2	$(\eta_-^-, -A_1)$	НФ	С	69*
3	$(-A_1, \eta_-^+)$	НФ	С	69*
4	$(\eta_-^+, \xi)$	НУ	С	69
5	$(\xi, 0)$	НУ	УУ	74*
6	$(0, -\xi)$	НУ	УУ	73*
7	$(-\xi, \eta_+^-)$	С	УУ	70
8	$(\eta_+^-, A_1)$	С	УФ	70*
9	$(A_1, \eta_+^+)$	С	УФ	70*
10	$(\eta_+^+, +\infty)$	С	УУ	70

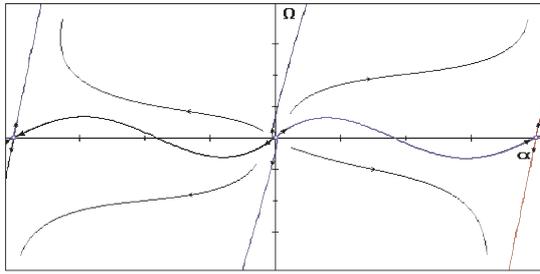


Рис. 69

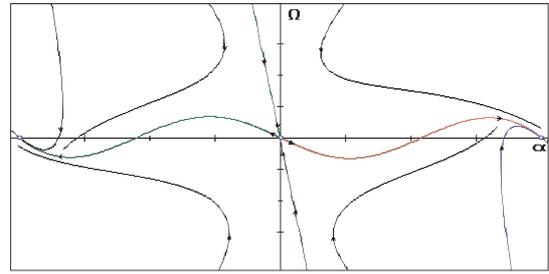


Рис. 70

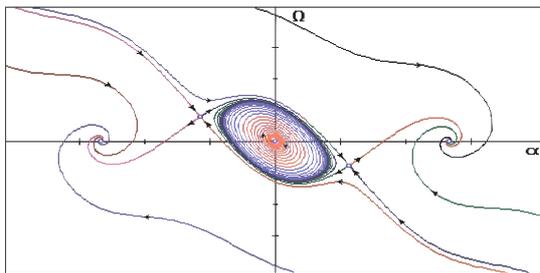


Рис. 71

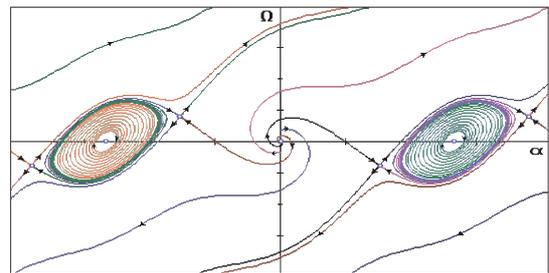


Рис. 72

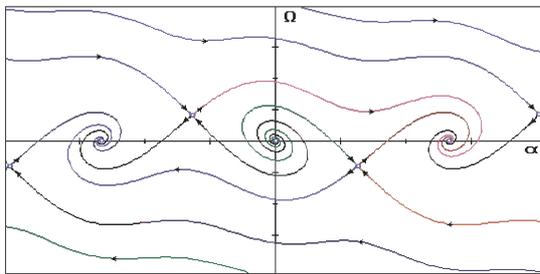


Рис. 73

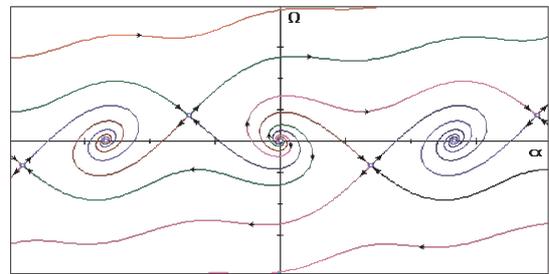


Рис. 74

При этом в любой малой окрестности любой такой траектории другие траектории стремятся к ней.

На фазовом цилиндре существует одна прямая (с точностью до центральной симметрии), являющаяся асимптотой для траекторий, уходящих на бесконечность.

**Лемма 6.2.** *Бесконечно удаленная точка является притягивающим (при  $h > 0$ ) и отталкивающим (при  $h < 0$ ) сложным узлом [21, 23].*

6.7.3. *О замкнутых траекториях различного типа на фазовом цилиндре.* Рассмотрим вопрос о существовании замкнутых траекторий различного типа на фазовом цилиндре для систем вида (6.10). Для начала исследуем наличие траекторий, не стягиваемых по фазовому цилиндру в точку, т.е. траекторий, охватывающих фазовый цилиндр.

**Лемма 6.3.** *При  $h \neq 0$  не существует замкнутой кривой, охватывающей фазовый цилиндр системы вида (6.10), и состоящей из фазовых траекторий системы.*

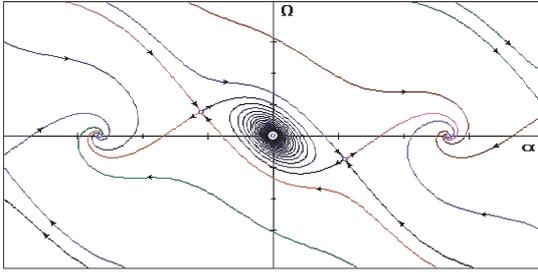


Рис. 75

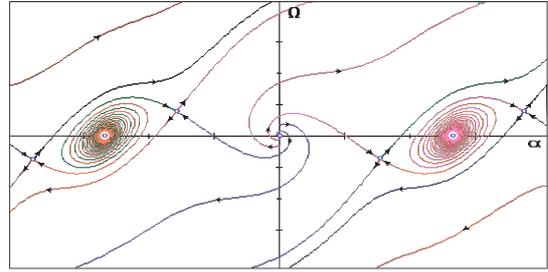


Рис. 76

*Доказательство.* Системе (6.10) поставим в соответствие систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= A_2 F(x) + A_1 u \frac{dF(x)}{dx \cos x} - h \left( u - A_1 \frac{F(x)}{\cos x} \right), \end{aligned} \quad (6.15)$$

полученную неособым преобразованием, заданным в виде

$$u = y + A_1 \frac{F(x)}{\cos x},$$

переводящим искомые фазовые траектории системы (6.10) в аналогичные траектории системы (6.15).

Систему (6.15) при  $h = 0$  обозначим через (6.15').

Характеристической функцией  $\chi(x, y)$  упорядоченной пары автономных систем

$$x' = X_1(x, y), \quad y' = Y_1(x, y) \quad \text{и} \quad x' = X_2(x, y), \quad y' = Y_2(x, y)$$

на плоскости называется функция

$$\chi(x, y) = X_1(x, y)Y_2(x, y) - X_2(x, y)Y_1(x, y),$$

которая отвечает за знак синуса угла от векторного поля первой системы до векторного поля второй системы. Подробнее об этом см. [21, 22, 23].

Характеристическая функция для систем (6.15) и (6.15') имеет вид

$$hu \left( u - A_1 \frac{F(x)}{\cos x} \right). \quad (6.16)$$

Она обращается в нуль в верхней полуплоскости  $\{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$  лишь на кривой

$$\left\{ (x, u) \in \mathbb{R}^2 : u = A_1 \frac{F(x)}{\cos x} \right\}.$$

Фазовый портрет системы (6.15') изображен на рис. 15. У системы (6.15') существует траектория, охватывающая фазовый цилиндр и проходящая через точку  $(-\pi/2, \varepsilon)$ , при любом  $\varepsilon > 0$ . Существует также ключевая сепаратриса (см. также [21, 23]), выходящая из точки  $(-\pi/2, 0)$  и входящая в точку  $(3\pi/2, 0)$ . Докажем, что ключевые сепаратрисы ограничивают область (см. рис. 15), содержащую кривую контактов векторных полей систем (6.15) и (6.15').

Действительно, ключевая сепаратриса пересечет прямую

$$\{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

в верхней полуплоскости в точке  $(0, u^*)$ , где

$$u^* = \int_{-\pi/2}^0 \frac{A_2 F(x) + A_1 U(x) \frac{d}{dx} \frac{F(x)}{\cos x}}{U(x)} dx, \quad (6.17)$$

и  $u = U(x)$  — уравнение ключевой сепаратрисы, заданной в виде графика в верхней полуплоскости.

Правая часть (6.17) строго больше  $W_1$ , где

$$W_1 = A_1 \int_{-\pi/2}^0 \frac{d}{dx} \frac{F(x)}{\cos x} dx = -A_1 F' \left( \frac{\pi}{2} \right).$$

Выполнено неравенство

$$\int_{-\pi/2}^x \frac{A_2 F(x)}{U(x)} dx \geq 0 \quad \forall x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right),$$

поскольку  $U(x) \geq u_1(x)$ , где  $u = u_1(x)$  — уравнение сепаратрисы системы (6.15') при  $A_1 = 0$ , выходящей из точки  $(-\pi/2, 0)$  и входящей в точку  $(\pi/2, 0)$ . Тогда

$$-A_1 F' \left( \frac{\pi}{2} \right) + \int_{-\pi/2}^x \frac{A_2 F(x)}{U(x)} dx + A_1 \frac{F(x)}{\cos x} > A_1 \frac{F(x)}{\cos x} \quad \forall x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right),$$

и при таких  $x$

$$U(x) = \int_{-\pi/2}^x \frac{A_2 F(x) + A_1 U(x) \frac{d}{dx} \frac{F(x)}{\cos x}}{U(x)} dx > A_1 \frac{F(x)}{\cos x}.$$

В полосе же  $\Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)}$  кривая контактов лежит лишь в замыкании нижней полуплоскости, что и доказывает лемму, поскольку искомая замкнутая траектория, охватывающая фазовый цилиндр, вынуждена лежать выше ключевой сепаратрисы в верхней полуплоскости.  $\square$

Дальнейшую часть этого раздела посвятим исследованию траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку, в частности, изучению возможных предельных циклов на плоскости.

Заметим, что у систем вида (6.10) при некоторых условиях существуют единственные предельные циклы либо в полосе  $\Pi$ , либо в  $\Pi'$  (см. [21, 23]).

Пространство  $\Phi$  разбивается, по крайней мере, на две части (каждая из которой положительной меры), отвечающие рождению циклов с разными характерами устойчивости. Первая часть

$$\Xi_1 = \{F \in \Phi : F(x) < F'(0)|x| \cos x, x \in (-\varepsilon, \varepsilon), x \neq 0\}$$

соответствует рождению устойчивого цикла слева от значения  $A_1 F'(0)$ , а вторая часть

$$\Xi_2 = \{F \in \Phi : F(x) > F'(0)|x| \cos x, x \in (-\varepsilon, \varepsilon), x \neq 0\}$$

— рождению неустойчивого цикла справа от  $A_1 F'(0)$  ( $\varepsilon > 0$  достаточно мало).

Рассмотрим, к примеру, подкласс  $\Xi_1$  функций класса  $\Phi$ . Очевидно, что функция типа функций Чаплыгина  $F_0(x) = AB \sin x \cos x \in \Xi_1$  ( $A, B > 0$ ).

**Лемма 6.4.** *Если  $F \in \Xi_1$ , то в достаточно малой окрестности начала координат у систем вида (6.10) на фазовой плоскости при  $h > A_1 F'(0)$  не существует замкнутой фазовой характеристики.*

Аналогичная лемма справедлива для системы (6.10) при условии  $h < A_1 F'(0)$ , когда  $F \in \Xi_2$ .

**Следствие 6.1.** Если  $F'(0)$  — глобальный максимум функции

$$\frac{d F(x)}{dx \cos x}$$

при  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , то замкнутых кривых, составленных из траекторий систем вида (6.10), на фазовой плоскости не существует при любом  $h > A_1 F'(0)$ .

**Следствие 6.2.** Находясь в условиях следствия 6.1, можно утверждать, что существует  $\underline{h} > 0$  такое, что единственный устойчивый предельный цикл у систем вида (6.10) в полосе  $\Pi$  существует тогда и только тогда, когда  $h \in (\underline{h}, A_1 F'(0))$ .

**Следствие 6.3.** В силу последнего следствия, а также некоторой расширенной зеркальной симметрии, существует такое  $\bar{h} < 0$ , что единственный неустойчивый предельный цикл у систем вида (6.10) в полосе  $\Pi'$  существует тогда и только тогда, когда  $h \in (-A_1 F'(0), \bar{h})$ .

6.7.4. Классификация фазовых портретов системы для некоторого подмножества допустимых функций. Для завершения классификации типичных фазовых портретов системы (6.10) необходимо исследовать поведение сепаратрис имеющих гиперболических седел. Для краткости изложения опустим данное исследование и приведем сводку окончательных результатов по устройству фазового цилиндра системы (6.10) для области функций  $\Xi_1$ .

Составной номер случая  $i.j$  обозначает:  $i$  — номер таблицы, а  $j$  — номер случая в самой таблице.

Для случаев 1.1, 1.10, 2.1, 2.2, 2.9, 2.10, 3.1, 3.2, 3.3, 3.8, 3.9, 3.10, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 и только для них положения равновесия (6.14) отсутствуют (см. [21, 23]). В таблицах 1–4 звездочкой помечены портреты, которые различаются лишь топологическим типом некоторых положений равновесия (например, вместо узла имеется фокус той же устойчивости, и наоборот), но являются (абсолютно) грубыми.

Проведенная классификация грубых фазовых портретов для некоторой подобласти пространства параметров позволяет сделать вывод о многообразии различных неэквивалентных топологических типов портретов системы (6.10) при  $h \neq 0$ .

## 7. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ПЛАСТИНКОЙ ВДОЛЬ ДЕРЖАВКИ

В предыдущих разделах рассматривались примеры маятниковых систем, в которых позиционная и скоростная составляющие силового воздействия входили аддитивно, даже в случаях, когда скоростная часть воздействия зависела и от координаты. Отметим также, что это воздействие было линейным по скорости. Представляет интерес рассмотреть задачу, в которой нарушаются оба эти условия. Известно, что прикладная аэродинамика поставляет множество задач, удовлетворяющих этому требованию: там силы воздействия среды описываются квадратичной зависимостью от скорости движения и их разделение на позиционную и скоростную составляющие затруднено. Достаточно простым и содержательным примером таких задач является задача о движении аэродинамического маятника [13].

**7.1. О модели воздействия среды.** Такой маятник представляет собой тонкую плоскую пластинку, жестко закрепленную вдоль державки, другой конец державки закреплен на неподвижном цилиндрическом шарнире (ось качания маятника). Вся эта конструкция находится в стационарном воздушном потоке, скорость которого равна  $V$ . Считается, что характерный размер пластинки в поперечном сечении (ширина пластинки) в направлении «вдоль державки» много больше ее размера в направлении «поперек державки». На рис. 77 представлено поперечное сечение такого аэродинамического маятника плоскостью качания. Пластинка  $AB$  шириной  $2b$  жестко закреплена своим геометрическим центром  $G$  на державке  $OG$  и может вращаться вместе с державкой как одно целое вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку  $O$ . Пренебрежем взаимодействием державки с потоком и трением в оси качания и будем учитывать лишь аэродинамическое воздействие, оказываемое потоком среды на пластинку.

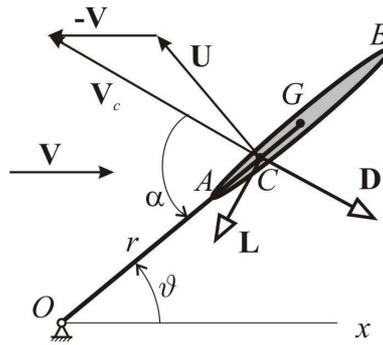


Рис. 77

В прикладной аэродинамике хорошо известно, что в рамках квазистатической теории обтекания подобных тел аэродинамическое воздействие сводится к силе  $\mathbf{D}$  лобового сопротивления и боковой силе  $\mathbf{L}$ . Точку  $C$  пересечения линии действия равнодействующей  $\mathbf{R}=\mathbf{D}+\mathbf{L}$  с пластинкой называют центром давления. Величины  $D$  и  $L$  сил аэродинамического воздействия примем, как обычно, в следующей форме:

$$D = \frac{1}{2}C_d(\alpha)\rho SV_C^2, \quad L = \frac{1}{2}C_l(\alpha)\rho SV_C^2,$$

где  $C_d(\alpha)$  и  $C_l(\alpha)$  — аэродинамические коэффициенты,  $S$  — площадь пластинки.

Будем считать, что в каждый момент времени сила  $\mathbf{R}$  воздействия среды полностью определяется вектором  $\mathbf{V}_C$  скорости центра давления относительно среды, т.е. мгновенными значениями величины  $V_C$  этой скорости и угла  $\alpha$  (эффективного угла атаки) между вектором  $\mathbf{V}_C$  и державкой. Вектор  $\mathbf{U}$  абсолютной скорости движения центра давления равен  $\mathbf{U}=\mathbf{V}+\mathbf{V}_C$ , причем

$$|\mathbf{U}| = U = (r - \varepsilon(\alpha))\dot{\vartheta},$$

где  $r$  — длина державки  $OG$ ,  $\vartheta$  — угол поворота державки,  $\varepsilon(\alpha)$  — сдвиг центра давления  $C$ , отсчитываемый от геометрического центра  $G$ , при этом функция  $\varepsilon(\alpha)$  считается положительной, если центр давления сдвигается в сторону к оси вращения и отрицательной — в противоположном случае. Здесь величины  $\vartheta$ ,  $\dot{\vartheta}$  имеют тот же смысл, что и  $x$ ,  $y$  в предыдущих разделах.

**7.2. Аэродинамические функции.** Поведение рассматриваемого маятника можно описать следующими уравнениями [13, 14, 11]:

$$\vartheta' = \omega, \quad \omega' = -q(\alpha)(l - e(\alpha))u^2, \quad (7.1)$$

$$u \sin \alpha = \sin \vartheta + (l - e(\alpha))\omega, \quad u \cos \alpha = \cos \vartheta. \quad (7.2)$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры и переменные:

$$l = \frac{r}{b}, \quad a = \frac{b^3 \rho S}{2J}, \quad e(\alpha) = \frac{\varepsilon(\alpha)}{b}, \quad q(\alpha) = a C_n(\alpha), \quad \tau = \frac{Vt}{b}, \quad u = \frac{V_C}{V}, \quad \omega = \frac{b\dot{\vartheta}}{V}, \quad (7.3)$$

где  $J$  — момент инерции всей конструкции относительно точки  $O$ , точкой обозначена производная по времени  $\tau$ ,  $C_n(\alpha) = C_l(\alpha) \cos \alpha + C_d(\alpha) \sin \alpha$  — коэффициент нормальной аэродинамической силы.

Зависимости  $q(\alpha)$  и  $e(\alpha)$ , в соответствии с квазистатической моделью обтекания, определяются из статических экспериментов в аэродинамических трубах и считаются известными. Например, в работе [18] представлены графики таких зависимостей для плоских прямоугольных пластинок различного удлинения  $\lambda$ .

Таким образом, модель (7.1), (7.2) движения маятника содержит две функции от угла атаки,  $q(\alpha)$  и  $e(\alpha)$ , определяемые только формой маятника, и два конструктивных параметра: безразмерную длину державки  $l$ , и безразмерную величину  $a$ , обратно пропорциональную моменту инерции конструкции.

Отметим, что модель аэродинамического момента [13, 10, 12], введенная в правую часть уравнений (7.1), содержит неявным образом зависимость от угловой скорости  $\omega$ . Ясно, что зависимость «силы»  $q(\alpha)(l - e(\alpha))u^2$  от фазовых переменных  $\vartheta, \omega$ , определяемых уравнениями (7.2), носит нелинейный и неаддитивный характер. Тем не менее, систему (7.1), (7.2) в области относительно малых значений  $\omega$  можно представить в виде, например, (3.2). Обычно в прикладной аэродинамике подобная зависимость вводится через так называемые вращательные производные, носит линейный характер и имеет довольно ограниченную область применимости.

Будем считать, что функции  $q(\alpha)$  и  $e(\alpha)$  определены, непрерывны, трижды дифференцируемы на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и обладают следующими свойствами (штрихом здесь обозначена производная по углу  $\alpha$ ):

(а) функция  $q(\alpha)$  — нечетная относительно  $\alpha = 0$ , четная относительно  $\alpha = \pi/2$ ,  $q(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi)$ ,  $q(0) = 0$ ,  $q'(0) > 0$ ,  $q'(\pi/2) = 0$ ,  $q''(\pi/2) < 0$ ;

(б) функция  $e(\alpha)$  — четная относительно  $\alpha = 0$ , нечетная относительно  $\alpha = \pi/2$ ,  $e(\alpha) > 0$  и  $e'(\alpha) < 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ,  $e(\pi/2) = 0$ ,  $e(0) = \max_{\alpha} e(\alpha) = e_m$ ,  $e'(0) = 0$ ,  $e''(0) < 0$ .

Как и следует ожидать, при сделанных предположениях относительно симметрии обтекания маятника система обладает свойством динамической симметрии, т.е. наряду с решением  $(\vartheta, \omega, \alpha, u)$  имеется также и решение  $(-\vartheta, -\omega, -\alpha, u)$ . Поэтому в дальнейшем достаточно рассматривать лишь полулобус

$$Q = \{(\vartheta, \omega) : \vartheta \in [-\pi, \pi], \omega \geq 0\}$$

как развертку части фазового цилиндра.

**7.3. О многозначности.** Разрешая кинематические уравнения (7.2) относительно  $\alpha$  и  $u$  и подставляя полученные зависимости  $\alpha = \alpha(\vartheta, \omega)$  и  $u = u(\vartheta, \omega)$  в уравнения (7.1), можно было бы приступить к исследованию поведения маятника при разных значениях параметров и начальных данных. Однако при  $e \neq 0$  уравнения (7.2) могут иметь неединственное решение. Можно строго показать [12], что на интервале

$$h = \left\{ (\vartheta, \omega) : \vartheta = -\frac{\pi}{2}, \omega \in \left( \frac{1}{l + e_m}, \frac{1}{l - e_m} \right) \right\} \quad (7.4)$$

имеются ровно три решения этих уравнений:

$$\alpha_1 = \operatorname{sgn}(l\omega - 1) \frac{\pi}{2}, \quad u_1 = |l\omega - 1|, \quad (7.5)$$

существующее при всех значениях  $\omega$ , и два симметричных решения

$$\alpha_2 = \tilde{\alpha}, \quad u_2 = 0, \quad \alpha_3 = -\tilde{\alpha}, \quad u_3 = 0, \quad (7.6)$$

существующие при  $\omega \in (1/(l + e_m), 1/(l - e_m))$ , где  $\tilde{\alpha}(\omega)$  — единственное положительное решение уравнения

$$e(\alpha) = 1 - \frac{1}{\omega}.$$

Отметим, что  $\tilde{\alpha} \in (0, \pi/2)$  при  $\omega \in (1/l, 1/(l - e_m))$ ;  $\tilde{\alpha} \in (\pi/2, \pi)$  при  $\omega \in (1/(l + e_m), 1/l)$ .

Вне интервала  $h$  на прямой  $\vartheta = -\pi/2$  уравнения (7.2) имеют только одно решение (7.5).

Рассматривая поведение найденных решений при малых отклонениях  $\Delta\vartheta$  и  $\Delta\omega$  от интервала (7.4), можно установить, что для промежутка  $\omega \in (1/l, 1/(l - e_m))$  первое решение  $\alpha_1, u_1$  определено на фазовой плоскости слева и справа по  $\vartheta$  от рассматриваемого интервала, а второе и третье решения  $\alpha_2, u_2$  и  $\alpha_3, u_3$  определены только в некоторой области  $H_1 \subset Q$ , примыкающей к интервалу (7.4) справа. Аналогичная ситуация имеет место и для промежутка  $\vartheta = -\pi/2; ; \omega \in (1/(l + e_m), 1/l)$ : первое решение существует слева и справа от интервала (7.4), а второе и третье — только в некоторой области  $H_2 \subset Q$ , примыкающей к этому интервалу слева.

Таким образом, к интервалу (7.4) примыкают две области  $H_1$  и  $H_2$  трехзначности функции  $\alpha(\vartheta, \omega)$  (для удобства будем считать, что  $\alpha(-\pi/2, 1/l) = \pm\pi/2$ ). Эти области являются проекциями на плоскость  $(\vartheta, \omega)$  двух складок поверхности  $\alpha(\vartheta, \omega)$  с одной общей точкой  $\vartheta = -\pi/2, \omega = 1/l$ .

Граница области  $H_1$  состоит из трех кусков: части интервала (7.4) (отрезка  $\vartheta = -\pi/2, \omega \in (1/l, 1/(l - e_m))$ ), на котором  $\alpha$  имеет три значения:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , и двух огибающих, уравнения которых задаются в следующей неявной форме:

$$\begin{cases} \sin(\vartheta - \alpha) + \omega(l - e(\alpha)) \cos \alpha = 0, \\ \cos(\vartheta - \alpha) + \omega(l - e(\alpha)) \sin \alpha + \omega e'(\alpha) \cos \alpha = 0, \end{cases} \quad (7.7)$$

где  $|\vartheta| < \pi/2$ , а параметр  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . На одной огибающей совпадают решения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , на другой —  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$ . В точке  $(\vartheta^*, \omega^*)$  пересечения огибающих (точке возврата) совпадают все три решения:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha^*$ . Значение  $\alpha^*$  единственным образом определяется из уравнения

$$2e'(\alpha) \sin \alpha - e''(\alpha) \cos \alpha = 0. \quad (7.8)$$

Подставляя значение  $\alpha^*$  в уравнения (7.7), находим и  $\vartheta^*, \omega^*$ .

Аналогичным образом задается и граница области  $H_2$ , но в уравнениях (7.7) следует принять  $-\pi < \vartheta < -\pi/2, \alpha \in (\pi/2, \pi)$ . В точке возврата на этой границе имеем  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi - \alpha^*$ , что следует из уравнения (7.8).

Рассмотрим для примера частный случай. Пусть

$$e(\alpha) = e_m \cos \alpha, \quad l = 2, \quad e_m = 0,64 \quad (\lambda = 8).$$

Тогда из уравнения (7.8) получаем  $\cos^2 \alpha^* = 2/3$ , так что в точках возврата имеем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \arccos \sqrt{2/3} \approx 0,61$$

в области  $H_1$ ;

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi - \arccos \sqrt{2/3} \approx 2,53$$

в области  $H_2$ .

Из уравнений (7.7) находим значения координат точек возврата:

$$\vartheta^* \cong -1,43, \quad \omega^* \cong 0,69$$

в области  $H_1$ ;

$$\vartheta^* \cong -1,64, \quad \omega^* \cong 0,39$$

в области  $H_2$ .

Для иллюстрации на фазовой плоскости при  $\omega \geq 0$  (рис. 78) изображены геометрические места точек, являющихся решениями кинематических уравнений (7.2) при  $\alpha = \text{const}$  (на рис. 79 — увеличенный фрагмент).

В общем случае при  $l > e_m$  форма областей  $H_1$  и  $H_2$  аналогична изображенной, хотя размеры их несколько изменяются. При  $l < e_m$  с уменьшением  $l$  «средняя» точка  $\vartheta = -\pi/2, \omega = 1/l$  области неоднозначности поднимается вверх и при  $l \rightarrow 0$  уходит в бесконечность. Эволюция областей  $H_1$  и  $H_2$  для рассматриваемого примера представлена на рис. 80 при разных значениях  $l$ . Жирной линией выделена граница области при  $l = e_m$ .

Поскольку в реальном движении маятника характер обтекания и силового воздействия со стороны среды меняются скорее непрерывно, чем скачками, то в дальнейшем будем считать, что при прохождении области неоднозначности значения угла  $\alpha$  следует выбирать, сохраняя, по возможности, непрерывность его изменения в процессе движения.

Изображающая точка при  $\omega > 0$  в области  $Q$  перемещается слева направо, так что при входе в области  $H_1$  и  $H_2$  и при движении внутри их заведомо существует непрерывная ветвь  $\alpha(\vartheta, \omega)$ , а скачок с одной ветви на другую может произойти только при выходе из этих областей.

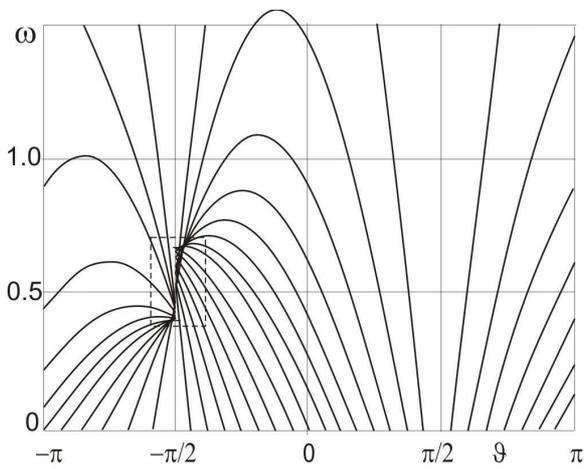


Рис. 78

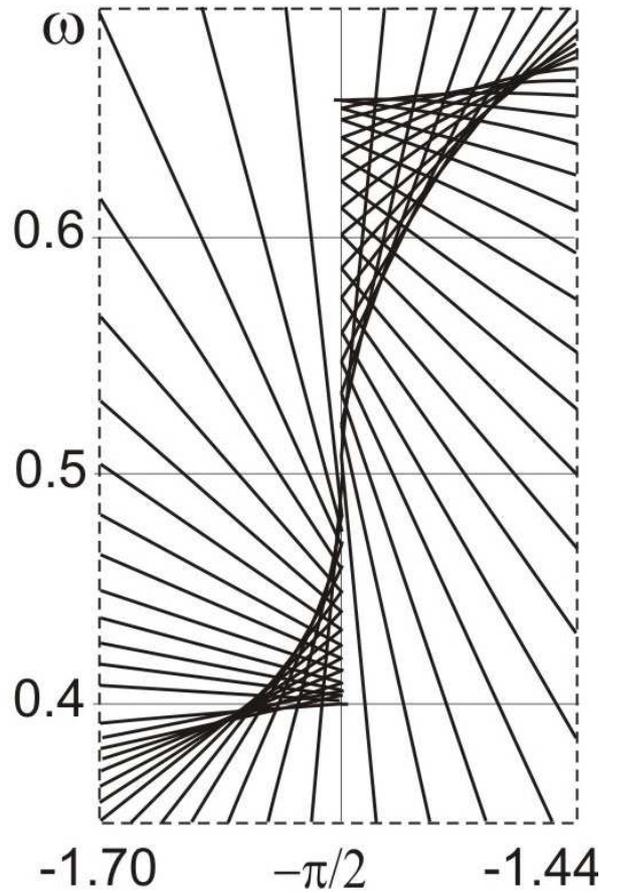


Рис. 79

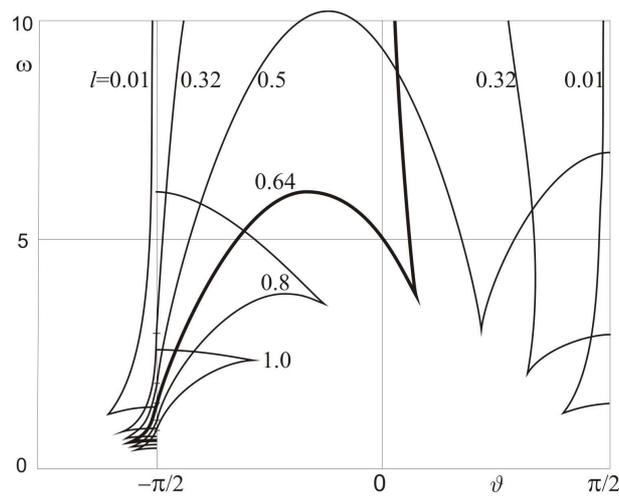


Рис. 80

**7.4. Качественный анализ.** Из уравнений (7.1), (7.2) следует, что во всех положениях  $\vartheta(\tau) = \bar{\vartheta}$ ,  $\omega(\tau) = \bar{\omega}$  равновесия маятника справедливы равенства  $\bar{\omega} = 0$ ,  $\bar{\alpha} = \bar{\vartheta}$ ,  $\bar{u} = 1$ .

На фазовой плоскости переменных  $(\vartheta, \omega)$  в области  $Q$  заведомо существуют три точки покоя:  $M_1 = (0, 0)$ ,  $M_2 = (\pi, 0)$ ,  $M_3 = (-\pi, 0)$ , которым соответствуют значения  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ ,  $\alpha_3 = -\pi$

(точки  $O$  и  $P$  в прежних обозначениях). Первой точке покоя отвечает положение маятника «по потоку». Точкам  $M_2$  и  $M_3$  отвечает перевернутое положение маятника («против потока»). При  $l > e_m$  для рассматриваемого маятника других положений равновесия нет.

При  $l < e_m$  существует еще пара точек покоя:  $M_4 = (\bar{\vartheta}, 0)$  и  $M_5 = (-\bar{\vartheta}, 0)$  (точка  $Q$  — в прежних обозначениях), где  $\bar{\vartheta} = \alpha_r$  — единственный положительный корень уравнения  $e(\alpha) = l$ . Этим точкам отвечают два симметричных отклоненных положения маятника, при которых центр давления (точка  $C$ ) совпадает с точкой  $O$  крепления. В частности, при  $l = 0$  имеются два симметричных положения маятника, когда пластинка ортогональна набегающему потоку.

В дальнейшем через  $\bar{\vartheta}$  и  $\bar{\alpha}$  ( $\bar{\vartheta} = \bar{\alpha}$  при  $\omega = 0$ ) будем обозначать любые из стационарных значений  $\vartheta$  и  $\alpha$ , соответствующих одной из указанных точек. Для каждой из точек  $M_k = (\bar{\vartheta}_k, 0)$  обозначим через  $x, y, z, v$  малые отклонения от соответствующего решения  $\bar{\vartheta}, \bar{\omega}, \bar{\alpha}, \bar{u}$ , так что

$$\vartheta = \bar{\vartheta} + x, \quad \omega = \bar{\omega} + y, \quad \alpha = \bar{\alpha} + z, \quad u = \bar{u} + v.$$

Проведем анализ устойчивости каждой из точек покоя в зависимости от значения параметра  $l$ .

**7.4.1. Точка  $M_1$ .** Точка  $M_1 = (0, 0)$ . Учитывая, что  $z = x + (l - e_m)y, v = 0$ , уравнения малых отклонений можно представить в следующей форме:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -q'_0(l - e_m)[x + (l - e_m)y].$$

Здесь и далее  $q'_0 = q'(0), e''_0 = e''(0), \dots$

Так как  $q'_0 > 0$ , то при  $l > e_m$  точка  $M_1 = (0, 0)$  устойчива, а при  $l < e_m$  — неустойчива (седловая). При  $l = e_m$  характеристическое уравнение имеет двойной нулевой корень, и судить об устойчивости по первому приближению нельзя. Уравнения в отклонениях в таком случае с точностью до членов третьего порядка можно представить в виде:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = e''_0 q'_0 \frac{x^3}{2}. \tag{7.9}$$

Эти уравнения имеют первый интеграл

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} - e''_0 q'_0 \frac{x^4}{8},$$

причем  $V(x, y) \geq 0$  в силу неравенств  $e''_0 < 0$  и  $q'_0 > 0$ . Следовательно, в этом случае точка  $M_1 = (0, 0)$  с точностью до членов третьего порядка малости является центром. Ограничимся этим утверждением для случая  $l = e_m$ , поскольку привлечение производных более высокого порядка от экспериментально определенных функций  $q(\alpha)$  и  $e(\alpha)$  лишено смысла.

**7.4.2. Точки  $M_2$  и  $M_3$ .** Точка  $M_2 = (\pi, 0)$  (или  $M_3 = (-\pi, 0)$ ). Учитывая равенства

$$-z = -x + (l + e_m)y, \quad q(\alpha) = q(\pi - \alpha),$$

заключаем, что второе уравнение системы (7.9) имеет вид

$$\dot{y} = q'_0(l + e_m)(x - (l + e_m)y).$$

Видно, что точки  $M_2 = (\pi, 0)$  и  $M_3 = (-\pi, 0)$  — седла.

**7.4.3. Точки  $M_4$  и  $M_5$ .** Точка  $M_4 = (\alpha_r, 0)$  (или  $M_5 = (-\alpha_r, 0)$ ). Из кинематических уравнений следует, что  $v = 0, z = x$ , поэтому второе уравнение в системе (7.9) приводится к виду

$$\dot{y} = q(\alpha_r)e'(\alpha_r)x.$$

Поскольку  $e'(\alpha_r) < 0$ , сделать заключение об устойчивости на основании уравнений первого приближения нельзя. Учитывая члены второго порядка малости, выразим  $z = x(1 - ye'(\alpha_r)\cos\alpha_r)$  и выпишем уравнения в отклонениях с помощью подходящей замены переменных запишем уравнения в отклонениях в следующей форме:

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -z_1(1 + az_1 + bz_2), \tag{7.10}$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные числа. Величина  $b$ , пропорциональная коэффициенту при произведении  $xy$ , заведомо положительна, а величина  $a$ , пропорциональная коэффициенту при  $x^2$ , может быть любого знака.

Перейдем в системе (7.10) к полярной системе координат, полагая

$$z = \rho \cos \varphi, \quad z_2 = \rho \sin \varphi.$$

Тогда при достаточно малых значениях  $\rho$  имеем

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho^2 R_2(\varphi) + \rho^3 R_3(\varphi) + \dots,$$

где введены обозначения

$$\begin{cases} R_2(\varphi) = a \cos^2 \varphi \sin \varphi + b \sin^2 \varphi \cos \varphi, \\ R_3(\varphi) = -a^2 \cos^5 \varphi \sin \varphi - b^2 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \tilde{R}_3(\varphi), \\ \tilde{R}_3(\varphi) = -2ab \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

Видно, что «средний» вклад в изменение величины  $\rho$  вносит только слагаемое  $\tilde{R}_3(\varphi)$ . Поскольку при достаточно малых  $\rho$  функция  $\varphi(\tau)$  — убывающая ( $\dot{\varphi}(\tau) = -1 + \bar{o}(\tau)$ ), то при  $ab > 0$  тривиальное решение системы (7.10) неустойчиво, а если  $ab < 0$ , то оно асимптотически (но не экспоненциально) устойчиво.

Возвращаясь к исходным переменным и обозначениям, получим: при  $l \in (0, e_m)$  точки  $M_4 = (\alpha_r, 0)$  и  $M_5 = (-\alpha_r, 0)$  — устойчивые (неустойчивые) фокусы, если выполнено (не выполнено) неравенство

$$2e'(\alpha_r)q'(\alpha_r) + e''(\alpha_r)q(\alpha_r) > 0. \quad (7.11)$$

Подчеркнем, что для этих точек линейная часть «позиционной» силы носит характер «восстанавливающей» силы, и их устойчивость или неустойчивость определяется знаком коэффициента нелинейной части позиционной силы (знаком коэффициента  $a$  в системе (7.10)).

Результаты качественного анализа устойчивости точек  $M_4 = (\alpha_r, 0)$ ,  $M_5 = (-\alpha_r, 0)$  полностью подтверждаются результатами исследования устойчивости с помощью известного строгого метода [14].

Особый интерес при анализе устойчивости точек  $M_4 = (\alpha_r, 0)$ ,  $M_5 = (-\alpha_r, 0)$  представляет случай  $l = 0$  (пластинка закреплена в центре масс), которому отвечает положение пластинки поперек потока ( $\bar{\nu} = \alpha_r = \pi/2$ ). В этом случае приходится учитывать члены третьего порядка малости. В результате соответствующих выкладок из уравнений (7.1), (7.2) имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= e'_1 z(1 - 2e'_1 yz) + [e'''_1 q_1 + 3e'_1 q''_1] z^3, & x &= z, \\ e'_1 &= e'(\pi/2), & q_1 &= q(\pi/2), \dots \end{aligned}$$

И вновь полученные уравнения с помощью замены переменных могут быть приведены к виду (коэффициент  $\tilde{a}$  — любого знака,  $\tilde{b} > 0$ ):

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -z_1(1 + \tilde{a}z_1^2 + \tilde{b}z_1 z_2).$$

Тривиальное решение этой системы асимптотически устойчиво, что следует из теоремы Ляпунова. Действительно, положительно определенная в некоторой окрестности начала координат функция

$$V(z_1, z_2) = 2z_1^2 + \tilde{a}z_1^4 + 2\tilde{b}z_2^2$$

имеет в силу построенной системы уравнений отрицательно определенную производную  $\dot{V} = -\tilde{b}z_1^2 z_2^2$ . Таким образом, при  $l = 0$  точки  $M_4 = (\pi/2, 0)$  и  $M_5 = (-\pi/2, 0)$  асимптотически устойчивы.

Итак, при  $l > e_m$  положение «по потоку» асимптотически устойчиво, при  $l = e_m$  оно устойчиво не асимптотически, а положение «против потока» неустойчиво. Других положений равновесия нет. При  $0 < l < e_m$  положения «по потоку» и «против потока» неустойчивы, точки  $M_1 = (0, 0)$ ,

$M_2 = (\pi, 0)$  и  $M_3 = (-\pi, 0)$  — седла. Существует пара симметричных отклоненных (устойчивых или неустойчивых) положений равновесия. Поскольку система (7.1), (7.2) в целом диссипативна, то при значениях  $l$ , при которых устойчивые состояния равновесия отсутствуют, следует ожидать рождения устойчивого цикла, охватывающего одну или несколько точек покоя, и, возможно, одной или нескольких пар из устойчивого и неустойчивого циклов (под циклом подразумевается любая замкнутая фазовая траектория, как охватывающая фазовый цилиндр, так и лежащая в полосе  $|\vartheta| < \pi$ ). При  $l = 0$  положения «по потоку» и «против потока» также остаются неустойчивыми, но положение маятника «поперек потока» асимптотически устойчиво (точки  $M_4 = (\pi/2, 0)$  и  $M_5 = (-\pi/2, 0)$  — устойчивые фокусы).

**7.5. Поведение маятника.** Проведенный качественный анализ дает определенное представление о поведении маятника вблизи положений равновесия и о соответствующих фазовых траекториях в окрестности точек покоя, т.е. при  $|\omega| \ll 1$ . Известно, что при  $|\omega| \gg 1$  воздействие среды носит диссипативный характер, т.е. обеспечивает тенденцию к уменьшению энергии. Однако в некоторых ограниченных областях фазового пространства может проявляться антидиссипативный характер [22, 10] воздействия среды. В рассматриваемой задаче определение интегрального характера воздействия среды при «средних» значениях  $\omega$  осложняется отмеченной выше неоднозначностью решения кинематических уравнений. Это вынуждает обратиться к численному моделированию как к способу исследования поведения маятника при разных значениях конструктивного параметра — длины державки.

Для расчетов была выбрана пластинка с удлинением 8. Значение безразмерного параметра  $a$  принято равным 0,001, а безразмерная длина  $l$  державки варьировалась в промежутке от 0 до 3.

В результате численного эксперимента установлено, что характер движений маятника «в большом» существенно зависит от значений  $l$ ; выделяются несколько критических значений  $l$ , при переходе через которые происходит коренная перестройка фазового портрета системы. На рис. 81 представлены условно (не в масштабе, но с указанием некоторых числовых значений) зависимости максимальных по углу  $\vartheta$  значений  $\omega_{\max}$  угловой скорости на характерных фазовых траекториях в зависимости от длины державки. Через  $l_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) обозначены критические значения длины державки, при этом  $l_1 = e_m$ ,  $S^+$  и  $S^-$  — значения  $\omega_{\max}$  на сепаратрисе, входящей в седловую точку  $M_2 = (\pi, 0)$  и выходящей из седловой точки  $M_3 = (-\pi, 0)$ , ближайшие к этим точкам,  $C^+$  — значения  $\omega_{\max}$  на устойчивом цикле, не охватывающем фазовый цилиндр,  $R^+$  и  $R^-$  — значения  $\omega_{\max}$  на устойчивом (знак +) и неустойчивом (знак -) циклах, охватывающих фазовый цилиндр (кривые  $R^-$  выделены пунктиром). Циклам  $C^+$  отвечают автоколебательные режимы движения маятника, а циклам  $R^+$  и  $R^-$  — авторотационные.

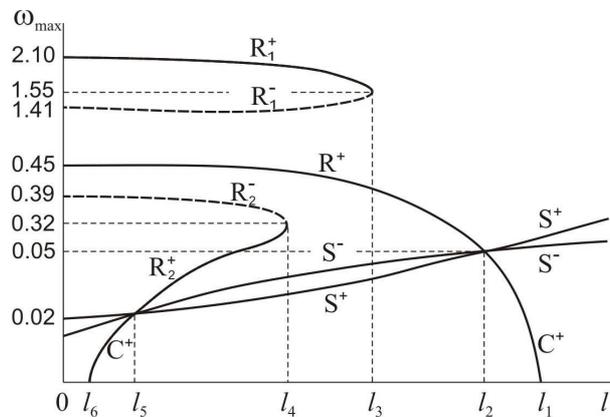


Рис. 81

Проиллюстрируем вкратце представленные результаты с помощью фазовых портретов. Поскольку значения «амплитуд» фазовых траекторий указаны на рис. 81, то на фазовом портрете

(рис. 82–85) ограничимся лишь качественным изображением этих траекторий, выделяя жирными линиями наиболее характерные из них: сепаратрисы и циклы.

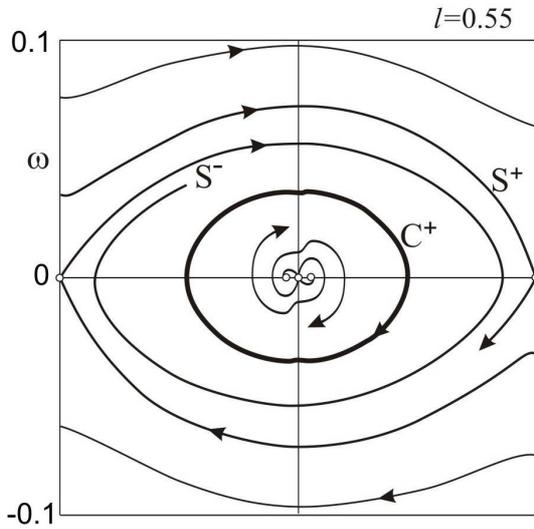


Рис. 82

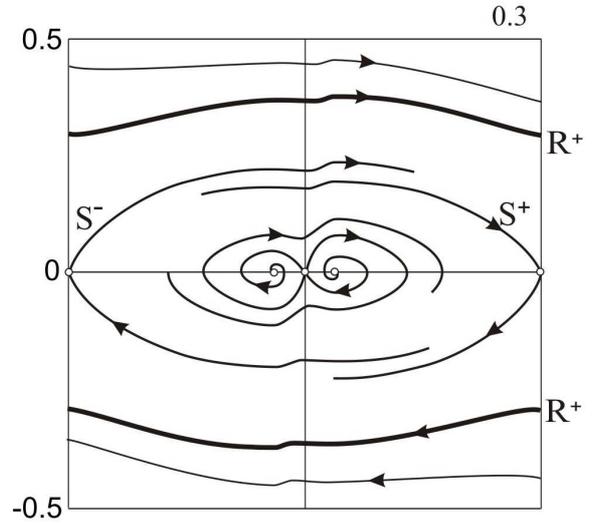


Рис. 83

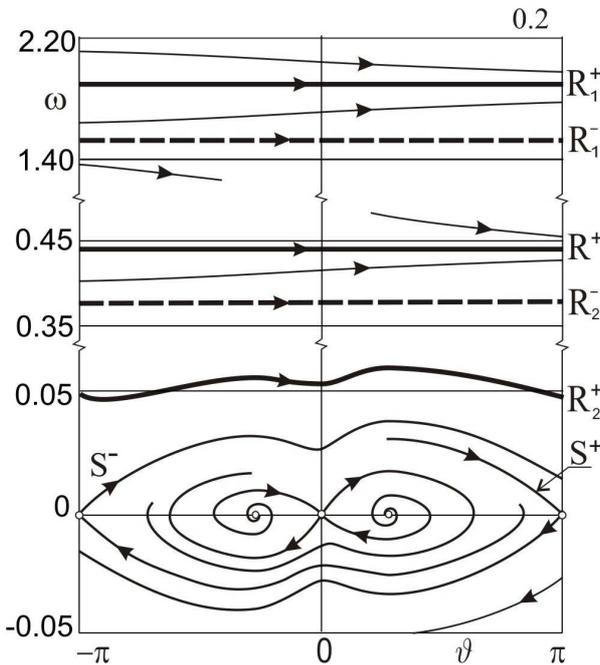


Рис. 84

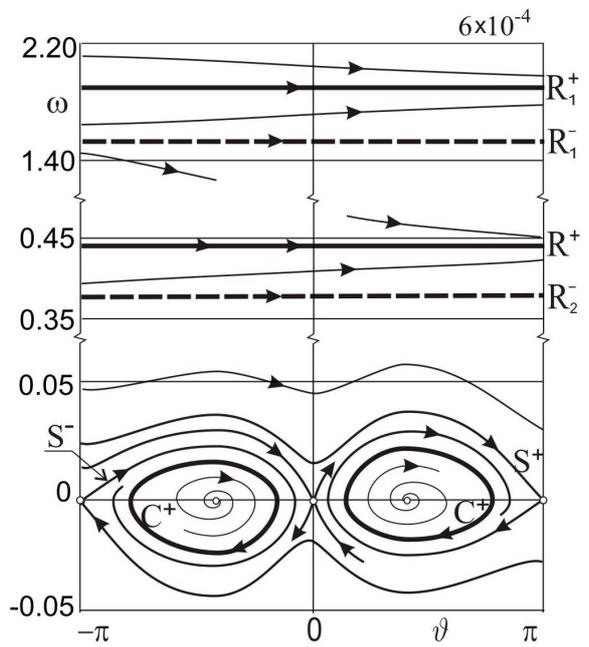


Рис. 85

При  $l > l_1 = e_m$  согласно рис. 81 выходящая из седловой точки  $M_3 = (-\pi, 0)$  сепаратриса  $S^-$  расположена ниже входящей в седловую точку  $M_2 = (\pi, 0)$  сепаратрисы  $S^+$ . Все остальные фазовые траектории стягиваются в начало координат — точку  $M_1 = (0, 0)$  — единственный аттрактор, которому отвечает устойчивое положение равновесия маятника «по потоку». При уменьшении длины державки (при  $l > e_m$ ) обе сепаратрисы  $S^-$  и  $S^+$  подходят ближе к оси  $\vartheta$ . Первое критическое значение длины державки  $l = l_1 = e_m$ . В этом случае точка  $M_1 = (0, 0)$  с точностью до

членов третьего порядка малости является центром. В остальном характер фазового портрета не изменяется. На рис. 82–85 он не иллюстрируется.

Как только длина державки станет меньше первого критического значения, характер фазового портрета качественно меняется. Точка  $M_1 = (0, 0)$  перестает быть устойчивой (становится седловой) и порождает пару неустойчивых фокусов  $M_4 = (\alpha_r, 0)$  и  $M_5 = (-\alpha_r, 0)$ . Таким образом, все эти три точки неустойчивы, также неустойчивы и седловые точки  $M_2 = (\pi, 0)$  и  $M_3 = (-\pi, 0)$ .

В силу диссипативности системы в целом сепаратрисы, выходящие из точки  $M_1 = (0, 0)$ , не могут уйти в бесконечность, вследствие чего необходимо возникают замкнутые траектории. Сначала одна замкнутая траектория  $C^+$ , как это представлено на рис. 82 ( $l = 0, 55$ ), охватывающая все три точки  $M_1 = (0, 0)$ ,  $M_4 = (\alpha_r, 0)$  и  $M_5 = (-\alpha_r, 0)$ . Такой цикл как бы наследует свойства единственного аттрактора, который был при  $l > e_m$ . Эта необычная бифуркация (типа бифуркации Андронова–Хопфа) обусловлена наличием динамической симметрии в рассматриваемой системе и характером нелинейности позиционной силы. Траектория  $C^+$  является единственным аттрактором, к которому стягиваются все (кроме  $S^+$ ) фазовые траектории, как изнутри цикла, так и снаружи.

При дальнейшем уменьшении значения  $l$  цикл  $C^+$  расширяется, сепаратрисы  $S^-$  и  $S^+$  опускаются, и при некотором новом критическом значении длины державки  $l = l_2 < l_1$  (расчеты показали, что  $l_2 \cong 0, 4245$ ) обе сепаратрисы совпадают, образуя петлю сепаратрис. На эту же петлю садится и расширившийся до предела (от  $\varphi = -\pi$  до  $\varphi = \pi$ ) цикл  $C^+$ . Раскручивающимися фазовым траекториям, лежащим внутри указанной петли, отвечают все более размашистые колебания маятника, не совершающего ни одного полного оборота, причем каждое последующее колебание происходит с увеличением интервала времени между последовательными остановками маятника. Фазовым траекториям, расположенным вне этой петли, отвечает вращение маятника в одну и ту же сторону, причем время каждого оборота монотонно растет до бесконечности.

При  $l < l_2$  из петли образуются сепаратрисы  $S^-$  и  $S^+$  (теперь  $S^-$  выше, чем  $S^+$ ) и замкнутая устойчивая траектория  $R^+$  (рис. 83,  $l = 0, 3$ ), охватывающая фазовый цилиндр (при этом образуется и вторая траектория  $R^+$  в области  $\omega < 0$ ). Траектории  $R^+$  отвечает устойчивый ротационный режим вращения маятника. По мере уменьшения длины державки в интервале  $0 < l < l_2$  сепаратрисы продолжают «опускаться», а траектории  $R^+$  раздвигаются, так что угловая скорость маятника в ротационном режиме возрастает.

При следующем критическом значении  $l = l_3$  ( $l_3 \cong 0, 267 < l_2$ ) в области достаточно больших значений  $\omega$  возникает новая периодическая траектория, причем полуустойчивая: все фазовые траектории расположенные выше нее, стягиваются к ней, а траектории расположенные ниже нее, отталкиваются от нее и спускаются к устойчивой траектории  $R^+$ .

При дальнейшем уменьшении длины державки эта полуустойчивая траектория раздваивается на пару периодических: неустойчивую  $R_1^-$  и расположенную выше нее устойчивую  $R_1^+$ , которые постепенно удаляются друг от друга с уменьшением значения  $l$ . Траектория  $R_1^-$  разделяет области притяжения устойчивых траекторий  $R^+$  и  $R_1^+$ . При этом область притяжения траектории  $R^+$  остается достаточно обширной. Из любого неподвижного начального положения, кроме положений равновесия, маятник «самостоятельно» выходит на авторотационный режим, отвечающий траектории  $R^+$ . Наличие неустойчивой траектории  $R_1^-$  означает, в частности, что маятник «самостоятельно» не может выйти на режим авторотации, отвечающий траектории  $R_1^+$ , для выхода на него необходима предварительная раскрутка.

С последующим уменьшением длины державки при некотором значении  $l = l_4$  ( $l_4 \cong 0, 24 < l_3 \cong 0, 267$  для рассматриваемой конкретной пластинки) рождается еще один полуустойчивый цикл, который при дальнейшем уменьшении  $l$  распадается на пару периодических траекторий: устойчивую  $R_2^+$  и выше нее — неустойчивую  $R_2^-$ , но обе расположенные ниже траектории  $R^+$ . Соответствующий фазовый портрет качественно представлен на рис. 84 ( $l = 0, 2$ ), на котором

режимы  $R_2^-$  и  $R_1^-$  выделены жирным пунктиром. Видно очередное разбиение фазового пространства на области притяжения устойчивых ротационных режимов. Теперь маятник самостоятельно выходит именно на авторотационный режим  $R_2^+$ , а не на  $R^+$ , как было раньше.

С уменьшением  $l$  траектория  $R_2^+$  опускается, приближаясь к сепаратрисам  $S^-$  и  $S^+$ , и при критическом значении  $l = l_5 \cong 0,00085$  траектория  $R_2^+$  совпадает с сепаратрисами  $S^-$  и  $S^+$ , при этом все они проходят через точку  $M_1 = (0, 0)$ , совпадая еще и с сепаратрисами точки  $M_1 = (0, 0)$  и образуя две петли. Внутри петель точки  $M_4 = (\alpha_r, 0)$  и  $M_5 = (-\alpha_r, 0)$  — неустойчивые фокусы.

При дальнейшем уменьшении значения параметра  $l$  с этих петель снимаются орбитально устойчивые циклы  $C_1^+$  и  $C_2^+$ , охватывающие точки  $M_4 = (\alpha_r, 0)$  и  $M_5 = (-\alpha_r, 0)$  соответственно, как это иллюстрируется фазовым портретом на рис. 85 ( $l = 6 \times 10^4$ ). Точки  $M_4 = (\alpha_r, 0)$  и  $M_5 = (-\alpha_r, 0)$  все еще остаются неустойчивыми фокусами, выходящие из них траектории наматываются на циклы  $C_1^+$  и  $C_2^+$  изнутри. Все остальные траектории, расположенные ниже  $R_2^-$ , наматываются на эти же циклы снаружи. Этим траекториям отвечают колебательные движения маятника, переходящие (после конечного числа полных оборотов) в один из двух устойчивых автоколебательных режимов.

С уменьшением  $l$  указанные циклы сжимаются, и, наконец, при  $l = l_6 \cong 0,00045$  каждый из них схлопывается в устойчивую точку ( $M_4 = (\alpha_r, 0)$  или  $M_5 = (-\alpha_r, 0)$ ). Для всех  $l$  из интервала  $l \in [0, l_6)$  эти точки — асимптотически устойчивые фокусы (хотя не экспоненциально, так что затухание очень медленное). Теперь траекториям, расположенным ниже  $R_2^+$ , отвечают затухающие колебания маятника около равновесного положения, близкого к положению «поперек потока».

В заключение остановимся на случае  $l = 0$ . Задача о поведении такого маятника (флюгера) исследовалась еще Н. Е. Жуковским [6], им было отмечено следующее: «Если такой флюгер поставить против ветра, то он становится перпендикулярно к направлению ветра и имеет в этом положении хорошую устойчивость. Но если мы сообщим флюгеру вращательное движение в том или другом направлении, то он будет продолжать вращаться в заданном направлении», причем в режиме самовращения «опыт дает приблизительно  $\omega \cong 0,5$ ».

Любопытно, что даже в рамках рассмотренной здесь динамической системы второго порядка, основанной на квазистатической модели аэродинамического воздействия на пластинку, эти свойства получили свое не только качественное подтверждение, но и количественное ( $\omega \cong 0,45$ , см. рис. 81). Более того, из этого же рисунка видна оценка той начальной угловой скорости ( $\omega \cong 0,39$ ), преодоление которой необходимо для выхода в область притяжения авторотационного режима  $R^+$ .

Высокоскоростные режимы авторотации  $R_1^+$  и  $R_1^-$  ранее не обсуждались, возможно, из-за трудности их практической реализации или из-за особенностей конкретного профиля, использованного в расчетах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. — М.: Наука, 1969.
2. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988.
3. Вульфсон И. И. Учет нелинейных диссипативных сил при ограниченной исходной информации// Теор. мех. машин. — 2003. — № 1. — С. 70–77.
4. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
5. Досаев М. З., Кобрин А. И., Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. Конструктивная теория МВЭУ. Ч. II. — М.: Изд-во МГУ. — 2007.
6. Жуковский Н. Е. О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси// В кн.: Жуковский Н. Е. Собрание сочинений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 4. — С. 41–68.
7. Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947.
8. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. 2. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1955.

9. Локшин Б. Я., Окунев Ю. М. О движении неоднородного шара в воздушной среде// Сб. науч.-метод. стат. «Теоретическая механика». — М.: Изд-во МГУ, 2006. — № 6. — С. 79–86.
10. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
11. Локшин Б. Я., Самсонов В. А. Авторотационные и автоколебательные режимы движения аэродинамического маятника// Прикл. мат. мех. — 2013. — 77, № 4. — С. 501–513.
12. Локшин Б. Я., Самсонов В. А. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. Качественный анализ. — М.: Изд-во МГУ, 2012.
13. Локшин Б. Я., Самсонов В. А. Расчетно-аналитическое исследование поведения аэродинамического маятника// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — № 6. — С. 50–55.
14. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1966.
15. Садовничий В. А., Локшин Б. Я., Окунев Ю. М., Самсонов В. А. К вопросу о моделировании полета болидов// 6 Междунар. аэрокосмический конгресс IAC'09. Пленарные и избранные доклады. — М., 2010. — С. 135–148.
16. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
17. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1983; т. 2. — М.: Наука, 1984.
18. Табачников В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки// Тр. ЦАГИ. — 1974. — 1621. — С. 79–93.
19. Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
20. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// В кн.: Чаплыгин С. А. Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
21. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
22. Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
23. Shamolin M. V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body// J. Math. Sci. — 2004. — 122, No. 1. — С. 2841–2915.

Б. Я. Локшин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: lokshin@imec.msu.ru

В. А. Самсонов

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: samson@imec.msu.ru

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru