

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО ПРОБЛЕМАМ
МАШИНОВЕДЕНИЯ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОСТРОЕНИЯ РАН
– ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО НАУЧНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ТРУДЫ
X ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
им. Ю.И. Неймарка

Нижегород, 26 – 29 сентября 2016 года

Конференция проводится при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект 16-08-20664-г)

Нижегород
2016

ББК В161.6
УДК 517

Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 26–29 сентября 2012 г.) / Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И.С.Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. – 867 с.

ISBN 978-5-211-0628945

В трудах излагаются различные аспекты теории нелинейных колебаний и динамических управляемых систем и их приложения в различных областях науки и техники.

Основной тематикой конференции являются:

- моделирование динамических систем,
- аналитические, качественные и численные методы теории колебаний,
- теория бифуркаций,
- регулярные и хаотические колебания,
- волновая динамика машин и конструкций,
- управление колебаниями механических систем,
- прикладные задачи теории колебаний.

ISBN 978-5-211-0628945

ББК В161.6

© Авторы, 2016
© ИД «Наш дом» – издание, 2016

Научные конференции «Нелинейные колебания механических систем» традиционно проводятся в Нижнем Новгороде, начиная с 1987 г. Нынешняя конференция – уже десятая. Работа конференции проходит в трех основных направлениях:

– модели и методы теории колебаний (математическое моделирование динамических систем, аналитические, качественные и численные методы теории колебаний, теория бифуркаций);

– колебания в динамических и управляемых системах (регулярные и хаотические колебания, управление колебаниями механических систем, прикладные задачи теории колебаний);

– волновая динамика машин и конструкций (волны в стержнях, пластинах и оболочках, волны в твердых и жидких средах, волновая техника и технологии, акустическая диагностика и неразрушающий контроль).

Среди участников конференции – представители 18 городов Российской Федерации (Москва, Санкт-Петербург, Нижний Новгород, Казань, Уфа, Пермь, Саратов, Севастополь, Волгоград, Ульяновск, Тверь, Орел, Ярославль, Тюмень, Томск, Петропавловск-Камчатский, Саров, Сызрань), а также представители Армении, Белоруссии, Казахстана, Узбекистана и Украины.

Нынешняя конференция проходит под знаком двух юбилеев, отмечаемых ее организаторами: в 2016 году празднует 100-летие Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, а Институт проблем машиностроения РАН – свое 30-летие.

Программный комитет конференции: Акуленко Л.Д., д.ф.-м.н., профессор (Москва); Асташев В.К., д.т.н., профессор (Москва); Баландин Д.В., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород) — сопредседатель; Белых В.Н., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Блехман И.И., д.ф.-м.н., профессор (Санкт-Петербург); Болотник Н.Н., член-корр. РАН (Москва); Ганиев Р.Ф., академик РАН (Москва); Герасимов С.И., д.ф.-м.н. (Саров); Губайдуллин Д.А., член-корр. РАН (Казань); Дерендяев Н.В., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Ерофеев В.И., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород) — сопредседатель; Журавлёв В.Ф., академик РАН (Москва); Игумнов Л.А., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Индейцев Д.А., член-корр. РАН (Санкт-Петербург); Казанцев В.Б., д.ф.-м.н. (Нижний Новгород); Карапетян А.В., д.ф.-м.н., профессор (Москва); Митенков Ф.М., академик РАН (Нижний Новгород); Некоркин В.И., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Новиков В.В., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Павлов И.С., д.ф.-м.н. (Нижний Новгород) – ученый секретарь; Перевезенцев В.Н., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Пономаренко В.П., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Поляк Б.Т., д.т.н., профессор (Москва); Сергеев А.М., член-корр. РАН (Нижний Новгород); Смирнов Л.В., д.т.н., профессор (Нижний Новгород); Стронгин Р.Г., д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород); Тарлаковский Д.В., д.ф.-м.н., профессор (Москва); Трубецков Д.И., член-корр. РАН (Саратов); Черноусько Ф.Л., академик РАН (Москва).

Организационный комитет: Павлов И.С., д.ф.-м.н. (председатель); Грезина А.В., к.ф.-м.н.; Мальханов А.О., к.ф.-м.н.; Мотова Е.А., к.т.н.; Никитина Е.А., к.т.н.; Панасенко А.Г., к.ф.-м.н.; Пономаренко В.П., д.ф.-м.н., профессор; Пономаренко С.В.; Стребуляев С.Н., к.т.н.; Эгамов А.И., к.ф.-м.н.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

М.В. Шамолин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Институт механики.

119192 Москва, Мичуринский пр., 1, e-mail: shamolin@rambler.ru

Автор возвращается к построению нелинейной математической модели плоскопараллельного воздействия среды на твердое тело, учитывающая зависимость плеча силы от приведенной угловой скорости тела. Проводится сравнение фазовых портретов, полученных при исследовании нелинейной модели воздействия среды, и реальными вихревыми дорожками, полученными Карманом.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, фазовый портрет, гидродинамическая аналогия

1. Более общая задача о движении со следящей силой. В работе [1] рассматривалась модель взаимодействия твердого тела со средой через передний плоский участок. Рассмотрим плоскопараллельное движение симметричного твердого тела с передним плоским торцом (пластиной) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [2, 3]. Если (v, α) – полярные координаты вектора скорости точки D (центра пластины), Ω – значение его угловой скорости, I, m – инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на пластину отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} v \dot{\alpha} \cos \alpha - \alpha \dot{v} \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= F_x / m, \\ v \dot{\alpha} \sin \alpha + \alpha \dot{v} \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \Omega \dot{\alpha} &= 0, \\ I \dot{\Omega} &= y_N(\alpha, \Omega / v) s(\alpha) v^2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $F_x = -S$, $S = s(\alpha)v^2$.

Первые два уравнения (1.1) описывают движение центра масс на двумерной евклидовой плоскости E^2 в проекциях на систему координат Dx_1x_2 , связанную с телом. При этом Dx_1 – срединный перпендикуляр к пластине, проходящий через центр масс C симметричного тела, а Dx_2 – ось, выбранная вдоль пластины. Третье же уравнение (1.1) получено из теоремы об изменении кинетического момента тела.

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы T , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (V_C – скорость центра масс, см. также [4, 5])

$$V_C \equiv \text{const}, \quad (1.2)$$

то в системе (1.1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$, $\sigma = DC$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad T \equiv -S. \quad (1.3)$$

Случай (1.3) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы второго порядка после некоторого преобразования системы третьего порядка (1.1). Действительно, пусть выполнено следующее условие:

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = \tau_1(\alpha, \Omega / v)v^2 + \tau_2(\alpha, \Omega / v)\Omega v + \tau_3(\alpha, \Omega / v)\Omega^2 = T_1(\alpha, \Omega / v)v^2.$$

Систему (1.1) можно переписать в виде

$$v \dot{\alpha} + \sigma \Omega^2 \cos \alpha - \sigma \sin \alpha [y_N(\alpha, \Omega / v) s(\alpha) v^2 / I] = [T_1(\alpha, \Omega / v) v^2 - s(\alpha) v^2] \cos \alpha / m,$$

$$\alpha \cdot v + \Omega v - \sigma \cos \alpha [y_N(\alpha, \Omega/v) s(\alpha) v^2 / I] - \sigma \Omega^2 \sin \alpha = [-T_1(\alpha, \Omega/v) v^2 + s(\alpha) v^2] \sin \alpha / m, \quad (1.4)$$

$$I \Omega \cdot = y_N(\alpha, \Omega/v) s(\alpha) v^2.$$

Вводя далее новые безразмерные фазовую переменную и дифференцирование по формулам $\Omega = n_1 v \omega$, $\langle \cdot \rangle = n_1 v \langle \cdot \rangle$, $n_1 v > 0$, $n_1 v = \text{const}$, система (1.4) приведет к следующему виду:

$$v' = v \square(\alpha, \omega), \quad (1.5)$$

$$\alpha' = -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha + [\sigma y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) / I n_1] \cos \alpha - [T_1(\alpha, n_1 \omega) v^2 - s(\alpha) v^2] \sin \alpha / m n_1,$$

$$\omega' = y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) / I n_1^2 - \omega [\sigma y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) / I n_1] \sin \alpha + \quad (1.6)$$

$$+ \sigma n_1 \omega^3 \cos \alpha - \omega [T_1(\alpha, n_1 \omega) v^2 - s(\alpha) v^2] \cos \alpha / m n_1,$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha + [\sigma y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) / I n_1] \sin \alpha + [T_1(\alpha, n_1 \omega) v^2 - s(\alpha) v^2] \cos \alpha / m n_1.$$

Видно, что в системе третьего порядка (1.5), (1.6) может быть выделена независимая подсистема второго порядка (1.6), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем двумерном фазовом цилиндре. В частности, при выполнении условия (1.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы второго порядка также возможен.

2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N})$ – координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на пластину, $Q = (Q_1, Q_2)$ – компоненты координат точки N приложения силы S воздействия среды, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}) = (x_N, y_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори, как уже указывалось выше, не очевидно [6]. Примем следующую зависимость: $x = Q + R$, где $R = (R_1, R_2)$ – вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости – гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь (h_1, h_2) – некоторые положительные параметры (ср. с [5, 7]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то $x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \Omega / v$.

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [7]

$$Q_2 = A \sin \alpha, \quad A > 0, \quad (2.1)$$

динамические функции s и y_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad y_N(\alpha, \Omega/v) = A \sin \alpha - h \Omega / v, \quad A, B, h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \quad (2.2)$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Тогда, благодаря условиям (1.2), (2.1), (2.2) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.5), (1.6)) примет вид аналитической системы

$$v' = v \square(\alpha, \omega), \quad (2.3)$$

$$\alpha' = -\omega + b \omega^2 \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - b H_1 \omega \cos^2 \alpha, \quad (2.4)$$

$$\omega' = \sin \alpha \cos \alpha - b \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b \omega^3 \cos \alpha + b H_1 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 \omega \cos \alpha,$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -b \omega^2 \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - b H_1 \omega \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерные параметры b , H_1 и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB / I$, $H_1 = Bh / I n_0$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (2.3), (2.4) может быть рассмотрена на своем фазовом трехмерном цилиндре

$$W_1 = \mathbf{R}^1_{+}\{v\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}. \quad (2.5)$$

3. Строение фазовых портретов на фазовом цилиндре. Для анализа фазовых портретов исследуемой системы (2.4) рассмотрим вспомогательную систему второго порядка на фазовом цилиндре, получающуюся из системы (2.4) формальным приравнением $H_1 = 0$:

$$\alpha' = -\omega + b\omega^2 \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad \omega' = \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha. \quad (3.1)$$

Три типа фазовых портретов системы (3.1) известны (рис. 1-3, $\alpha \rightarrow -\alpha$) [4, 5]. Более точно, справедливо

Предложение 1. Существует величина $b = b^* < 2$ такая, что при $b < b^*$ фазовый портрет системы (3.1) ($\alpha \rightarrow -\alpha$) изображен на рис. 1; при $b = b^*$ фазовый портрет системы (3.1) ($\alpha \rightarrow -\alpha$) изображен на рис. 2; при $b > b^*$ фазовый портрет системы (3.1) ($\alpha \rightarrow -\alpha$) изображен на рис. 3.

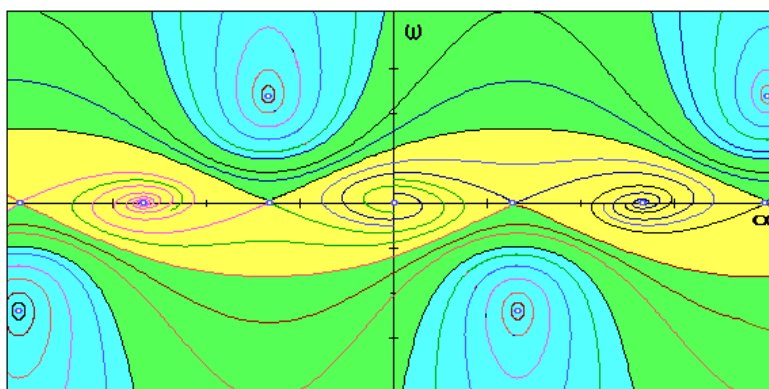


Рис. 1

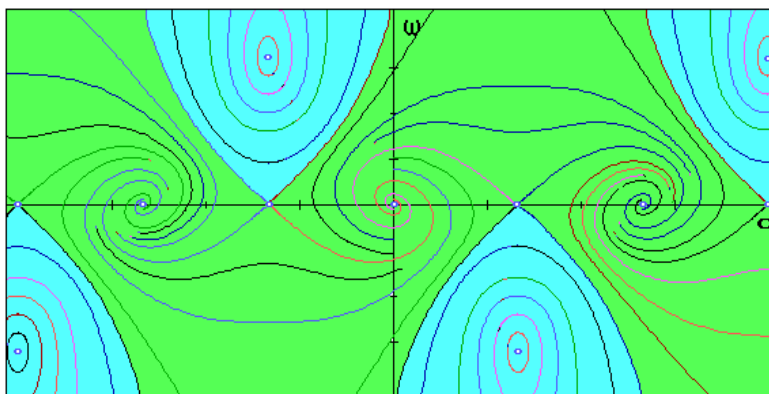


Рис. 2

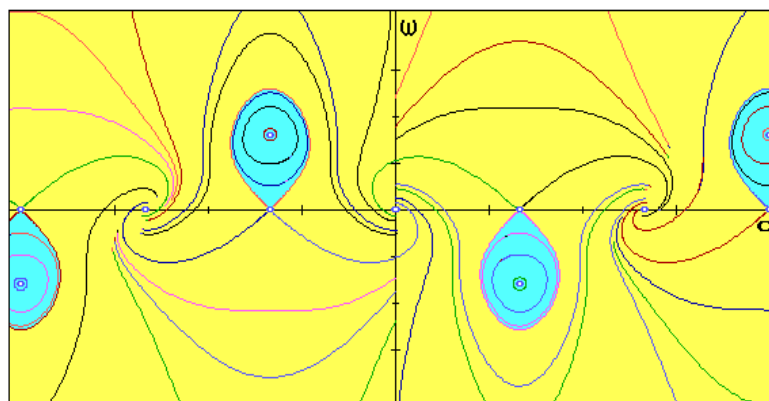


Рис. 3

3.1. Симметрии в исследуемой системе и ее положения равновесия. Для начала напомним, что характеристической функцией двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений на евклидовой поверхности, задаваемых векторными полями $X = \{X_1, X_2\}$ и $Y = \{Y_1, Y_2\}$, называется кососимметрическая функция

$$\chi = \chi(X, Y) = -\chi(Y, X) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = X_1 Y_2 - X_2 Y_1,$$

которая «отвечает» за синус угла между рассматриваемыми полями. В частности, функция χ равна нулю там, где поля касаются (в том числе, в точках покоя одной из систем) [8]. Исследование положений равновесия системы (2.4) поможет провести

Предложение 2. *Характеристическая функция систем (3.1), (2.4) имеет вид*

$$\chi = \chi((3.76), (3.52)) = H_1 \omega^2 \cos \alpha \{ (b\omega - \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha \}.$$

Видно, что положения равновесия системы (2.4) могут лежать лишь в объединении $W_2 = \{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2: \omega \sin \alpha \cos \alpha = 0\}$, т.е. совпадают с положениями равновесия системы (3.1). Действительно, система (2.4) имеет лишь следующие положения равновесия (точки покоя):

1. $(0, 0);$ (3.2)

2. $(\pi, 0);$ (3.3)

3. $(\pm\pi/2, 0);$ (3.4)

4. $(\pm\pi/2, \pm 1/b).$ (3.5)

Проведем их классификацию. Характеристические уравнения около точек (3.2)–(3.5) имеют, соответственно, вид:

$$\lambda^2 + (H_1 - b)\lambda + 1 = 0, \quad \lambda^2 + (b - H_1)\lambda + 1 = 0, \quad \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda^2 + 1/b^2 = 0.$$

Положения равновесия (3.2) при $H_1 > b$ ($H_1 < b$) являются притягивающими (отталкивающими), а положения равновесия (3.3) – наоборот (при $H_1 > b$ ($H_1 < b$) являются отталкивающими (притягивающими)). Так, в частности, на фазовых портретах системы (3.1) ($\alpha \rightarrow -\alpha$) (при $H_1 = 0$, рис. 1–3) начало координат – отталкивающая точка, точка $(\pi, 0)$ – притягивающая. Положения равновесия (3.4) (как и на рис. 1–3, $\alpha \rightarrow -\alpha$) являются седлами, а возле положений равновесия (3.5) возникает, вообще говоря, проблема центра и фокуса, которая решается в пользу центра благодаря наличию в системе следующих симметрий:

центральной симметрией. Такая симметрия возле точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbf{Z}$, возникает по причине того, что векторное поле системы (2.4) в координатах (α, ω) меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -\omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ \omega \end{pmatrix};$$

некоторой зеркальной симметрией (НЗС). Такая симметрия относительно прямых $\Lambda_i = \{(\alpha, \omega) : \alpha = \pi/2 + \pi i\}$, $i \in \mathbf{Z}$, возникает по причине того, что α -составляющая векторного поля системы в координатах (α, ω) сохраняется при замене

$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i - \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i + \alpha \\ \omega \end{pmatrix}, \omega\text{-составляющая меняет знак.}$$

Важную роль в построении глобальных фазовых портретов системы вида (2.4) играют предьявленные симметрии. Действительно, как нетрудно видеть, симметрия НЗС «оставляет» положения равновесия (3.5) центрами и в нелинейном случае. К тому же центрально симметричные положения равновесия $(\pi/2, 0)$ и $(-\pi/2, 0)$, а также $(\pi/2, 1/b)$ и $(-\pi/2, -1/b)$ объединены вместе (соответственно, в случаи (3.4) и (3.5)) по причине наличия центральной симметрии. Более того, положения равновесия (3.2), (3.3) меняют характер устойчивости при изменении знака величины $H_1 - b$ как раз из-за наличия симметрии НЗС.

3.2. Эволюция фазовых портретов при изменении параметров. Получим еще следствия из предложения 2. Будем изменять параметр H_1 , увеличивая его вдоль объединения интервалов $(0, b) \cup (b, +\infty)$. У рассматриваемой системы не существует простых и сложных предельных циклов, а поэтому при $H_1 \in (0, b)$ она допускает фазовые портреты, показанные на рис. 1–3 (в зависимости от величины $|b - H_1|$, $\alpha \rightarrow -\alpha$, при этом предложение 1 и определяет три возможных случая фазового портрета).

Далее, при увеличении значения $H_1 \in (b, +\infty)$ положение равновесия $(0, 0)$ становится притягивающим, а положение равновесия $(\pi, 0)$ – отталкивающим. Тогда фазовые портреты для этого случая можно получить из рис. 1–3 (в зависимости от величины $|b - H_1|$, $\alpha \rightarrow \alpha + \pi$, при этом предложение 1 по-прежнему определяет три возможных случая фазового портрета).

Следствие 1. При $b = H_1$ положения равновесия $(\pi i, 0)$, $i \in \mathbf{Z}$, являются центрами.

Действительно, если бы данные положения равновесия являлись бы слабыми фокусами (устойчивыми или неустойчивыми), то при достаточно малом значении параметра $\delta = |b - H_1| > 0$ в окрестности данных положений равновесия существовал бы, по крайней мере, один предельный цикл, родившийся в силу бифуркации рождения цикла из слабого фокуса (бифуркация Пуанкаре–Андронов–Хопфа), что противоречит следствию 1.

Следствие 2. При $b = H_1$ у системы (2.4) в полосах

$$\Pi = \left\{ (\alpha, \omega) : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right\} \text{ или } \Pi' = \left\{ (\alpha, \omega) : \frac{\pi}{2} < \alpha < 3\frac{\pi}{2} \right\}$$

реализуется гетероклиническая ситуация (рис. 4).

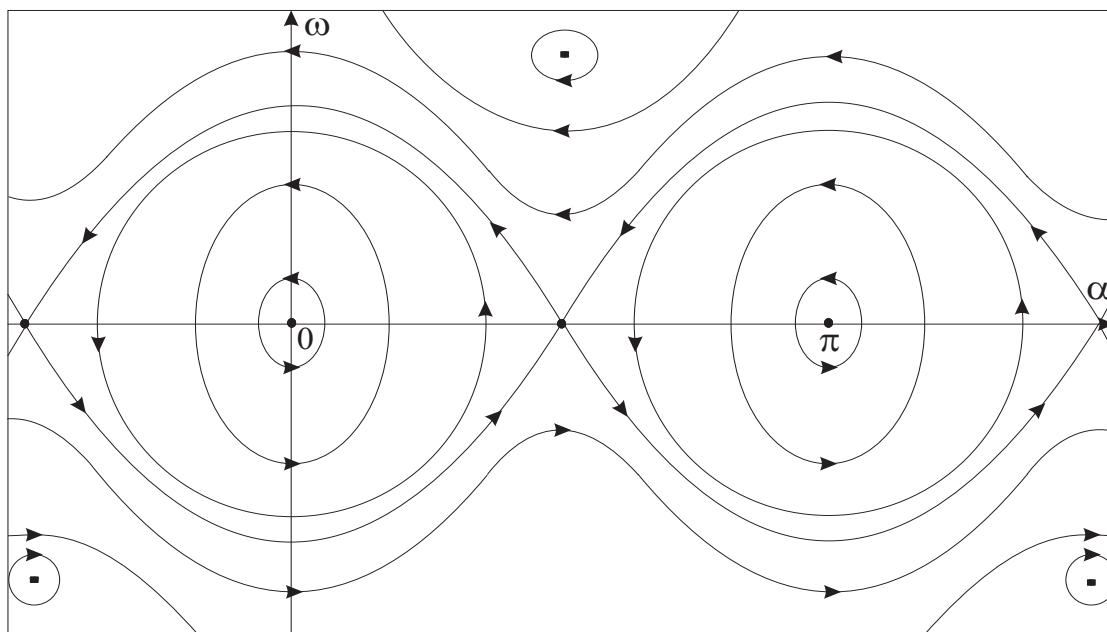


Рис. 4

4. Замечания о возможных автоколебаниях в системе. Достаточно обстоятельно был разобран случай, когда функции воздействия среды представлялись в виде (2.2), т.е. были аналитическими функциями. Но вот только при моделировании воздействия среды на тело функции $s(\alpha)$ и $y_N(\alpha, \Omega/\nu) = y(\alpha) - h\Omega/\nu$, вообще говоря, не представляются в таком аналитическом виде. Более того, для каждой конкретной передней пластины, через которую происходит взаимодействие тела со средой, явный вид пары функций $s(\alpha)$ и $y(\alpha)$ не известен, а имеется лишь качественная информация о таких функциях [1, 2, 5].

Опорным для нас выше уже является результат С. А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного струйного обтекания пластины бесконечной длины получил функции необходимые функции в аналитическом виде (2.2). Этот результат помогает построить функциональные классы $\{y\}$, $\{s\}$ [1, 2, 5]. Они состоят из функций достаточно гладких, 2π -периодических ($y(\alpha)$ – нечетная, а $s(\alpha)$ – четная), удовлетворяющих следующим условиям: $y(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $y'(0) > 0$, $y'(\pi) < 0$ (класс функций $\{y\} = Y$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\} = \Sigma$). Как y , так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. Таким образом,

$$y \in Y, s \in \Sigma. \quad (4.1)$$

Из вышеперечисленных условий следует, что $F = ys$ – достаточно гладкая нечетная π -периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{F\} = \Phi$). Таким образом,

$$F \in \Phi. \quad (4.2)$$

Тогда преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.5), (1.6)) примет вид аналитической системы

$$v' = v \square(\alpha, \omega), \quad (4.3)$$

$$\alpha' = -\omega + \mu_2 \omega^2 \sin \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \cos \alpha - \frac{\mu_2}{In_0} H \omega s(\alpha) \cos \alpha, \quad (4.4)$$

$$\omega' = \frac{F(\alpha)}{In_0^2} - \frac{\mu_2}{In_0^2} \omega F(\alpha) \sin \alpha + \mu_2 \omega^3 \cos \alpha + \frac{\mu_2}{In_0} H \omega^2 s(\alpha) \sin \alpha - \frac{H}{In_0} \omega s(\alpha),$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\mu_2 \omega^2 \cos \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{\mu_2}{In_0} H \omega s(\alpha) \sin \alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерные параметры $b = \mu_2$, $H_1 = \mu_3$ и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I$, $H_1 = BH/In_0$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (4.3), (4.4) может быть рассмотрена на своем фазовом трехмерном цилиндре (2.5). Для начала исследуем устойчивость ее тривиального решения, соответствующего невозмущенному движению, для чего выпишем соответствующее характеристическое уравнение возле начала координат: $\lambda^2 + \lambda[\mu_3 - \mu_2] + 1 = 0$. Очевидно

Предложение 3. При $\mu_3 > \mu_2$ ($\mu_3 < \mu_2$) тривиальное решение системы (4.4) асимптотически устойчиво (является отталкивающим).

Для возможного рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (4.4) при критическом соотношении параметров

$$\mu_3 = \mu_2. \quad (4.5)$$

Для этого сделаем следующую замену фазовых переменных $(\alpha, \omega) \rightarrow (a, w)$ в системе

$$(4.4): \alpha = a, \omega = \frac{|\omega_0|}{1 + \mu_2^2} (\mu_2 a - w), \omega_0 = 1, \text{ переводящую ее в систему следующую:}$$

$$a' = |\omega_0| w + B_1 a^3 + B_2 a^2 w + B_3 a w^2 + \bar{o}_1((a^2 + w^2)^{3/2}), \quad (4.6)$$

$$w' = -|\omega_0| a + B_4 a^3 + B_5 a^2 w + B_6 a w^2 + B_7 w^3 + \bar{o}_2((a^2 + w^2)^{3/2}),$$

$$B_1 = \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} - \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2^2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{(1 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2}{2(1 + \mu_2^2)}, B_2 = \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} - \frac{2\mu_2^2}{(1 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2^2}{2(1 + \mu_2^2)},$$

$$B_3 = \frac{\mu_2}{(1 + \mu_2^2)^2}, B_4 = -\frac{f_3}{6In_0^2} + \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2(1 + \mu_2^2)}, B_6 = -\frac{\mu_2^2(3 + \mu_2^2)}{(1 + \mu_2^2)^2},$$

$$B_5 = -\frac{Hs_2}{2In_0} \frac{1}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{2(1 + \mu_2^2)} - \frac{\mu_2}{(1 + \mu_2^2)^2}, B_7 = \frac{\mu_2}{(1 + \mu_2^2)^2}, s_2 = s''(0), f_3 = F'''(0).$$

Введем следующий вспомогательный индекс [5, 9]:

$$Ind = |\omega_0| \{Y_{111}^1 + Y_{122}^1 + Y_{112}^2 + Y_{222}^2\} + (Y_{11}^1 Y_{11}^2 + Y_{11}^1 Y_{12}^1 + Y_{11}^2 Y_{12}^2 + Y_{22}^2 Y_{12}^2 - Y_{22}^1 Y_{12}^1 - Y_{22}^1 Y_{22}^2),$$

где $\begin{pmatrix} Y_1(a, w) \\ Y_2(a, w) \end{pmatrix}$ – правая часть системы (4.6).

Более конкретно, для системы (4.6) построенный индекс будет иметь вид:

$$Ind = 6B_1 + 2B_3 + 2B_5 + 6B_7 = \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} - \frac{Hs_2}{In_0} \frac{1 + 3\mu_2^2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} (3 + \mu_2^2).$$

Поскольку для данной системы $Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0,0) = 0$ (по причине нечетности ее

правой части от фазовых переменных) для любых индексов i, j, k , то следующее предложение дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при $Ind \neq 0$.

Предложение 4. Если $Ind < 0$ ($Ind > 0$) и при этом выполнено неравенство

$$|\mu_3 - \mu_2| < 2, \quad (4.7)$$

то начало координат фазовой плоскости $\mathbf{R}^2\{a, w\}$ системы (4.6) при критическом соотношении параметров (4.5) является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.

Условие (4.7) является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости $\mathbf{R}^2\{a, w\}$ является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом. Следствием теоремы Пуанкаре–Андронов–Хопфа [10] является

Теорема. Пусть для системы (4.4) выполнено неравенство (4.7). Тогда:

1) Если $Ind < 0$, то для любого фиксированного μ_2 найдутся такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что при $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$ начало координат является сильным устойчивым фокусом; при $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$ начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением μ_3 от μ_2 до $\mu_2 - \delta_2$ как $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$.

2) Если $Ind > 0$, то для любого фиксированного μ_2 найдутся такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что при $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$ начало координат является сильным неустойчивым фокусом; при $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$ начало координат является сильным устойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом μ_3 от μ_2 до $\mu_2 + \delta_2$ как $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$.

Проверить выполнение условия $\mu_3 > \mu_2$ ($\mu_3 < \mu_2$) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды $(y_{N,s})$, или от их значений. А вот проверка условия $Ind < 0$ ($Ind > 0$) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды $(y_{N,s})$ неизвестны.

Итак, если функции воздействия среды не удовлетворяют условию (2.2), то полосе Π (или Π') при некоторых естественных условиях возможно возникновение предельных циклов, говорящее о том, что фазовые портреты более общей допустимой системы (4.4) не совпадают, вообще говоря, с показанными фазовыми портретами. Последнее говорит нам об относительной негрубости систем вида (4.4) при допустимых деформациях ее правых частей в классах функций (4.1) ((4.2)).

5. Из гидродинамической теории сопротивления жидкости. Теперь приведем некоторые размышления, известные еще по классическим работам, при этом отметим наглядные и топологические аналогии.

Как известно, если тело движется равномерно в жидкости, лишенной трения и простирающейся во все стороны до бесконечности, то при обычном потенциальном обтекании тела не возникает ни сопротивления движению, ни подъемной силы, перпендикулярной к направлению движения, какова бы ни была форма тела. Этот результат нетрудно объяснить [11]. Исследование также показывает, что добавочные скорости, а также разности давлений, вызванные движением тела, очень быстро уменьшаются по всем направлениям по мере удаления от тела — по крайней мере, пропорционально третьей степени расстояния.

С другой стороны, наблюдение показывает, что пластина, установленная в набегающем потоке под углом к его направлению, поворачивается так, что, в конце концов, устанавливается перпендикулярно к потоку, а значит, набегающий поток сообщает ей определенный вращающий момент. При ускоренном движении тела в жидкости без трения сопротивление возникает, однако это сопротивление такого рода, как если бы масса тела увеличилась на величину массы жидкости, увлекаемой телом при своем движении. Для шара подсчитано [3, 12], что величина такой при-

соединенной равна половине массы жидкости, вытесняемой шаром. Так как при возникновении движения из состояния покоя вначале образуется всегда течение, похожее на потенциальное, то понятие о присоединенной массе вполне имеет значение и для реальных жидкостей.

Равенство нулю сопротивления тела, равномерно движущегося без трения в жидкости, можно вывести также из энергетических соображений. Действительно, при отсутствии трения работа, необходимая для преодоления сопротивления, может накапливаться в жидкости только в виде кинетической энергии. Между тем при потенциальном течении, когда жидкость позади равномерно движущегося тела так же смыкается, как расступается впереди него, за телом не остается никакого возмущения течения, в котором могла бы накапливаться кинетическая энергия. Следовательно, при таком движении не может быть и сопротивления.

Однако могут быть и такие случаи движения в жидкости без трения, когда позади тела в жидкости остается кинетическая энергия и, следовательно, возникает сопротивление. Одним из таких случаев является движение крыла самолета [11]. Возникновение подъемной силы без продолжающегося накопления кинетической энергии в жидкости не противоречит закону сохранения энергии, поскольку подъемная сила перпендикулярна к пути тела в жидкости и поэтому при установившемся движении для ее сохранения затраты работы равны нулю.

Возникновение сопротивления при ускоренном движении также легко понять и с точки зрения закона сохранения энергии. В самом деле, если бы сопротивление при таком движении не возникало и, таким образом, не требовалось бы силы для преодоления этого сопротивления, то наша присоединенная масса не могла бы накапливать и кинетическую энергию.

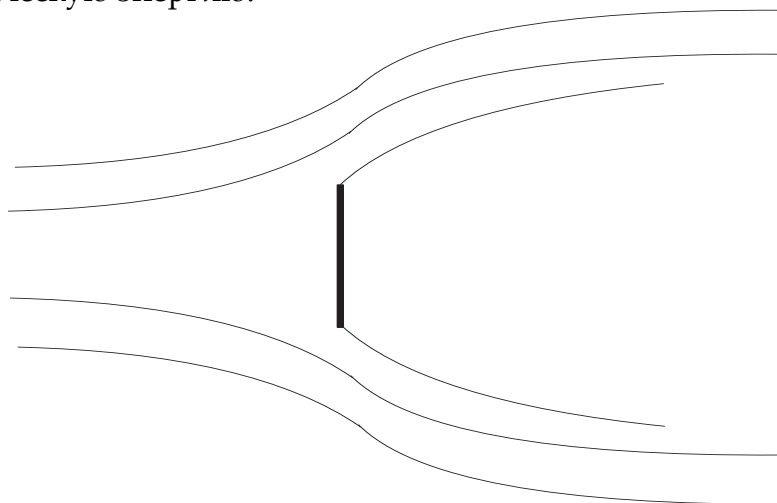


Рис. 5. Обтекание плоской пластины с образованием поверхности раздела

В действительности же полное сопротивление почти всех тел значительно больше всегда неизбежного сопротивления трения [11]. Как известно, причина этого в том, что при движении таких тел образуются поверхности раздела и вихри, которые и являются основной причиной сопротивления. Они препятствуют смыканию потока позади обтекаемого тела и объясняют несимметричное распределение давления на поверхности тела; кроме того, для их образования требуются затраты энергии.

Чтобы определить сопротивление тел, движущихся в идеальной жидкости, остановимся на двух типичных, предпринятые Кирхгофом [13] и Карманом [14].

Кирхгоф исследовал обтекание плоской пластины, поставленной перпендикулярно к потоку (рис. 5). Перед пластиной поток разделяется и затем слетает с ее кра-

ев, образуя поверхности раздела. Позади пластины пространство между поверхностями раздела заполнено покоящейся жидкостью. Поскольку давление в этом пространстве, если пренебрегать силой тяжести, везде одинаковое, то должно быть одинаковым также давление во всех точках поверхностей раздела, поэтому, на основании теоремы Бернулли, должна быть одинаковой и скорость. Если все это довести до вычислений, то возможны только такие решения задачи, при которых поверхности раздела простираются до бесконечности, а скорость на поверхностях раздела равна скорости невозмущенного потока, т.е. скорости жидкости в бесконечности. Что касается распределения давления, то перед пластиной в ее центре мы имеем динамическое давление $\rho v^2 / 2$ (ρ – плотность жидкости). По мере приближения к краям пластины давление уменьшается и на краях совпадает с давлением в невозмущенном потоке. На задней же стороне пластины имеет место постоянное давление, равное давлению в невозмущенном потоке. Поэтому сопротивление пластины пропорционально ее площади и динамическому давлению, и поэтому коэффициент сопротивления c должен иметь постоянное значение. Согласно вычислениям Кирхгофа, это значение равно $c = 2\pi / (4 + \pi) \approx 0,88$ [13].

Но на самом деле, как известно, поверхности раздела неустойчивы и быстро распадаются, образуя различные вихри. Поэтому давление позади пластины намного ниже, чем в невозмущенном потоке. Таким образом, задняя поверхность пластины оказывает как бы отрицательное действие, и сопротивление получается больше, чем у Кирхгофа. Так, для бесконечно широкой пластины измерения дают $c = 2,0$. При обтекании же прямоугольных пластин с конечным отношением сторон жидкость обгибает узкие стороны и значительно уменьшает разрежение [13].

Расчет Кирхгофа относится к бесконечно длинной пластине и он плохо согласуется с результатом опыта. Но хорошее совпадение расчета с экспериментом получается в том случае, когда при обтекании водой пластины пространство позади пластины заполняется, например, воздухом. В этом случае поверхности раздела почти не распадаются, и поэтому условия хорошо удовлетворяются [13].

При обтекании узких пластин, когда поток жидкости перед телом не разделяется на две части (как это было в рассмотренном случае) иногда образуется позади тела довольно правильная последовательность вихрей, попеременно срывающихся то с одного, то с другого края тела (вихревая дорожка).

Наблюдения над вихревыми дорожками побудили Кармана [14, 15] исследовать устойчивость различных систем параллельных и прямолинейных вихревых нитей. Вычисления показали, что все такие системы (кроме одной) почти всегда неустойчивы. А устойчивая система изображена на рис. 6. Для нее отношение расстояния h между обоими рядами вихрей к расстоянию l между вихрями в каждом ряду равно 0,283 [14, 15]. Но вихревые дорожки, наблюдающиеся в реальности, обладают структурой, очень близкой к этой. Но, по некоторым причинам расстояние между вихрями увеличивается.

Образование за обтекаемым телом новых вихрей означает, что тело испытывает сопротивление, поскольку иначе не соблюдался бы закон сохранения энергии. Можно использовать и другой способ вычисления сопротивления, основанный на теореме о количестве движения. Данное исследование было выполнено Карманом.

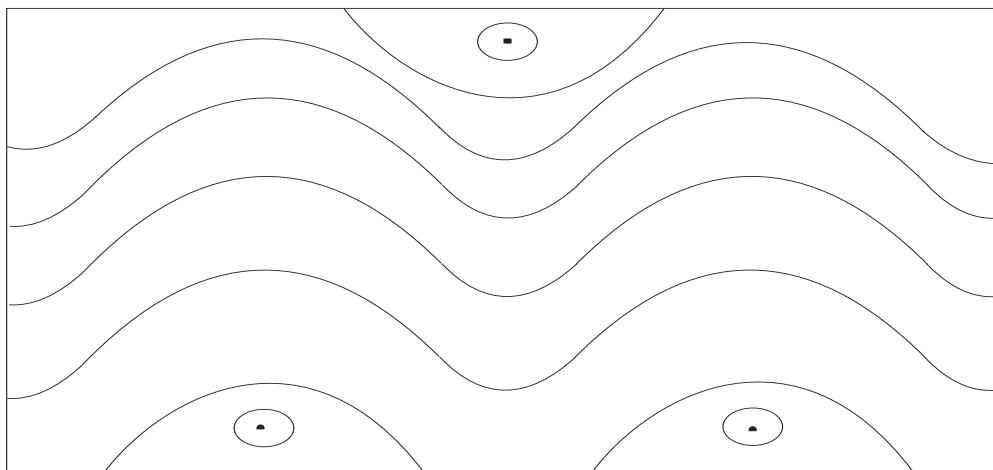


Рис. 6. Линии тока в вихревой дорожке

Главное же в данных рассуждениях заключается в том, что линии тока, определяемые полем направлений среды (рис. 6), имеют топологическую картину, поразительно похожую на фазовую картину разбиения на траектории динамической системы (2.4), показанной на рис. 1.

Работа поддержана грантом РФФИ (грант № 15-01-00848-а).

Список литературы

1. Шамолин М.В. Движение твердого тела в сопротивляющейся среде // Матем. моделирование. – 2011. – Т. 23. – № 12. – С. 79–104.
2. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1989. – № 3. – С. 51–54, 105.
3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. – 322 с.
4. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1992. – № 1. – С. 52–58, 112.
5. Шамолин М.В. [Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Издательство «Экзамен», 2007. – 352 с.](#)
6. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
7. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. – С. 133–135.
8. Шамолин М.В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1993, № 2, с. 66–70, 113.
9. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
10. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
11. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: Изд-во Иностранной лит-ры, 1949. – 520 с.
12. Чаплыгин С.А. Избранные труды. – М.: Наука, 1976. – 495 с.
13. Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Crelle's Journ., т. 70, 1869.
14. Karman und Rubach, Phys. Zeitschr., т. 13, 1912.
15. Кочин Н.Е. О неустойчивости вихревых цепочек // Доклады АН СССР, т. XXIV, 1939.