ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Июль 2016 **Выпуск 86. С. 139-151**

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
Москва, Россия
shamolin@rambler.ru

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К СФЕРЕ

Во многих задачах многомерной динамики возникают системы, пространствами положений которых являются сферы конечной размерности. Соответственно, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к данным сферам. В работе для начала изучаются консервативные системы, а впоследствии предъявляются неконсервативные силовые поля, при наличии которых системы обладают полным набором первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций и являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями своих переменных. Библиография: 33 назв.

Ранее автором [**1, 2**] показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. В [**1, 2**] предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее плоская задача была обобщена автором [**3**]–[**12**] на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной работе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску (см. также [**13**]–[**22**]).

1. Более общая задача о движении со следящей силой

1.1. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного твердого тела с “передним торцом” ($(n-1)$-мерным диском, “взаимодействующим со средой, заполняющей n-мерное пространство”) в поле силы $\mathbf{S}$ сопротивления в условиях квазистационарности [**23, 24**].

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр $(n-1)$-мерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), Ω — тензор угловой скорости тела, $Dx_1 \ldots x_n$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, Dx_3, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, \ldots, I_n = I_2, m$ — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \ldots x_n$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, \ldots, 0\}, \quad \mathbf{v}_D = v\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{1.1}$$

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

есть единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$. При этом примем также разложение для функции воздействия среды на n-мерное тело: $\mathbf{S} = \{-S, 0, \ldots, 0\}$, т.е. в данном случае внешняя сила $\mathbf{F}$ удовлетворяет равенству $\mathbf{F} = \mathbf{S}$. Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbf{R}^n$, при этом касательные силы воздействия среды на $(n-1)$-мерный диск отсутствуют:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс, $\mathbf{F}$ — сумма сил, действующих на тело.

Далее, вспомогательная матрица для вычисления момента силы сопротивления (приложенной в точке N) примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$ (см. также [**25, 13**]):

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M_F, \tag{1.5}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{1.6}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + \ldots + I_n}{2}, \ldots,$$

$$\lambda_{n-1} = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-2} - I_{n-1} + I_n}{2}, \quad \lambda_n = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n}{2},$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, $[\ldots, \ldots]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(n)$.

Если обобщенные силы не зависят от положения тела в пространстве, то фазовое пространство совместной замкнутой системы (1.3), (1.5) в этом случае — это пространство $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^{n-1} \times \mathrm{so}(n)$.

1.2. Следствия динамической симметрии. Рассматриваемая система (1.3), (1.5), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \ldots = I_n, \tag{1.7}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega^0_{k_1} = \mathrm{const}, \ldots, \omega_{k_s} \equiv \omega^0_{k_s} = \mathrm{const}, \quad s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{1.8}$$

При этом $k_1 = 1, \ldots, k_s$ — некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$. Рассмотрим набор (1.8) первых интегралов на своих нулевых уровнях (см. также [**26**]–[**28**]):

$$\omega^0_{k_1} = \ldots = \omega^0_{k_s} = 0. \tag{1.9}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_p}$ тензора Ω осталось

$$p=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=n-1$$

штук (здесь $r_1,\ldots,r_p$ — оставшиеся p чисел из множества W_1, не равные $k_1,\ldots,k_s$).

1.3. Выбор следящей силы и новые квазискорости в системе. Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD=Dx_1$ и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [**2**])

$$\mathbf{V}_C\equiv\mathrm{const},\tag{1.10}$$

то в рассматриваемой системе (1.3), (1.5) вместо обобщенных сил $\mathbf{F}$ должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$(T-s(\alpha)v^2)\mathbf{e}_1\equiv 0.\tag{1.11}$$

Для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T=T_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega)=s(\alpha)v^2,\quad \mathbf{T}\equiv-\mathbf{S}.\tag{1.12}$$

Случай (1.12) выбора величины T является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка в рассматриваемой системе (1.3), (1.5) после некоторого преобразования.

Укажем на достаточное условие такого отделения. Пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$\begin{aligned}T=T_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega)&=\sum_{i,j=0,i\leqslant j}^{n-1}\tau_{i,j}\Big(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\Big)\omega_{r_i}\omega_{r_j}\\&=T_1\Big(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\Big)v^2,\omega_0=v.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Введем новые квазискорости. Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции следующих $(n-2)$-х поворотов:

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\cdots\\z_{n-1}\end{pmatrix}=T_{n-2,n-1}(-\beta_1)\circ\ldots\circ T_{1,2}(-\beta_{n-2})\begin{pmatrix}\omega_{r_1}\\\omega_{r_2}\\\cdots\\\omega_{r_{n-1}}\end{pmatrix},\tag{1.14}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta),k=1,\ldots,n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\ddots&0&0&0\\0&0&M_{k,k+1}&0&0\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\tag{1.15}$$

$$M_{k,k+1}=\begin{pmatrix}m_{k,k}&m_{k,k+1}\\m_{k+1,k}&m_{k+1,k+1}\end{pmatrix},\quad m_{k,k}=m_{k+1,k+1}=\cos\beta,m_{k+1,k}=-m_{k,k+1}=\sin\beta.$$

1.4. Редукции в системе и системы нормального вида. Динамическую часть уравнений движения в случаях (1.7)–(1.9), (1.13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&\dot v+\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\cos\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\Big(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\Big)\\&=\frac{T_1\big(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\big)v^2-s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha,\end{aligned}\tag{1.16}$$

$$\dot{\alpha}v + z_{n-1}v - \sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1} z_s^2\right)\sin\alpha - \frac{\sigma v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)$$
$$= \frac{s(\alpha)v^2 - T_1\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha, \tag{1.17}$$

$$\dot{\beta}_1\sin\alpha - z_{n-2}\cos\alpha - \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = 0. \tag{1.18}$$

$$\dot{\beta}_2\sin\alpha\sin\beta_1 + z_{n-3}\cos\alpha - \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.19}$$

. . . .

$$\dot{\beta}_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} + (-1)^n z_1\cos\alpha$$
$$- \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = 0, \tag{1.20}$$

$$\dot{\omega}_{r_1} = (-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{1.21}$$

$$\dot{\omega}_{r_2} = (-1)^{n+1}\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{(n-1)N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{1.22}$$

. . . .

$$\dot{\omega}_{r_{n-1}} = \frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha). \tag{1.23}$$

Здесь введены следующие функции:

$$\begin{gathered}
\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1 + \frac{\pi}{2}, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}\right)\right),\\
\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \beta_2 + \frac{\pi}{2}, \beta_3, \ldots, \beta_{n-2}\right)\right),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_{v,n-3}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, \beta_{n-3} + \frac{\pi}{2}, \beta_{n-2}\right)\right),\\
\Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, \beta_{n-2} + \frac{\pi}{2}\right)\right),
\end{gathered} \tag{1.24}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ представляется в виде

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}))$$
$$= 0\cdot\cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}). \tag{1.25}$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), s = 1, \ldots, n$, $(i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$.

Таким образом, по-прежнему

$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right), \tag{1.26}$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ определяется в (1.2).

Зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ по-прежнему понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1/v, \ldots, z_{n-1}/v)$ в силу (1.14).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad \langle\cdot\rangle = n_1 v \langle'\rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \mathrm{const}, \tag{1.27}$$

система (1.16)–(1.23) приведется к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned} \alpha' = &-Z_{n-1} + \sigma n_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \sin\alpha + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha) \cos\alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \\ &- \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin\alpha, \end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-1} = &\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2 \right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ &+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^s Z_{n-1-s} \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \right\} \\ &- Z_{n-1} \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-2} = &Z_{n-2} Z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2 \right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \\ &\times \left\{ Z_{n-1} \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) + \sum_{s=2}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-1-s} \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \right\} \\ &- \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - Z_{n-2} \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-3} = &Z_{n-3} Z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3} Z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2 \right) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} \\ &+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \Big\{ \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \Big[-Z_{n-1} + Z_{n-2} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \Big] \\ &+ \sum_{s=3}^{n-2} (-1)^s Z_{n-1-s} \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} \Big\} \\ &+ \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - Z_{n-3} \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \end{aligned} \tag{1.32}$$

. . . .

$$\begin{aligned} Z'_1 = &Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\} \\ &+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} (-1)^{n+1} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^s Z_{n+1-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\} \\ &+ (-1)^n \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\beta_1' = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z), \tag{1.34}$$

$$\beta_2' = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z), \tag{1.35}$$

. . . .

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1}Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}$$
$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}\Delta_{v,n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z), \tag{1.36}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha + \frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)$$
$$+ \frac{T_1(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) - s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \tag{1.37}$$

Видно, что в системе (1.28)–(1.36) порядка $2(n-1)+1$ может быть выделена независимая подсистема (1.29)–(1.36) порядка $2(n-1)$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $2(n-1)$-мерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$.

В частности, при выполнении условия (1.12) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ (и, далее, от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z_1,\ldots,n_1Z_{n-1})$) в силу (1.14) и (1.27).

1.4. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (1.29)–(1.36) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)$, $s=1,\ldots,n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, в уравнении (1.30) (с левой частью Z_{n-1}') функции (1.24) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1,2,3,4,\ldots,n-2. \tag{1.38}$$

А вот далее, в уравнения (1.31)– (1.33) появление набора функций (1.24) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для Z_{n-2}' по-прежнему входит набор функций (1.24) с индексами (1.38). А в уравнение для Z_{n-3}' входит уже набор с индексами

$$2,2,3,4,\ldots,n-2, \tag{1.39}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается таблицей 1.

Так минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n=3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (1.24) (при $s=1$). Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n=4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (1.24) (при $s=1,2$). Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (1.24)

Левая часть (1.29)– (1.36)	Распределение индексов s набора функций (1.24)					
Z'_{n-2}	1	2	3	4	$\dots$	$n-2$
Z'_{n-3}	2	2	3	4	$\dots$	$n-2$
Z'_{n-4}	3	3	3	4	$\dots$	$n-2$
Z'_{n-5}	4	4	4	4	$\dots$	$n-2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
Z'_1	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$\dots$	$n-2$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.29)–(1.36) функций (1.24) (при $s = 1, 2, 3$) и т.д.

2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

2.1. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [**23, 24**], пользуясь (1.2), (1.26) динамические функции s, $x_{2N}, \dots, x_{nN}$ примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{2.1}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе (1.3), (1.5) отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}$). При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1Z)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1Z)$, $s = 1, \dots, n-2$, входящие в систему (1.28)–(1.36), примут следующий вид:

$$\begin{gathered} \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1Z) = R(\alpha) = A\sin\alpha, \\ \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, n_1Z) \equiv 0, \quad s = 1, \dots, n-2. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Тогда благодаря условиям (1.10), (2.1) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.28)–(1.36)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, Z), \tag{2.3}$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\Big(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\Big)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{2.4}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - \Big(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\Big)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\Big(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\Big)\cos\alpha - bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-2} = {}& Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \Big(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\Big)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \\ & + bZ_{n-2}\Big(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\Big)\cos\alpha - bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} Z'_{n-3} = {}& Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \Big(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\Big)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} \\ & + bZ_{n-3}\Big(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\Big)\cos\alpha - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{aligned} \tag{2.7}$$

. . . .

$$Z_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}$$

$$+ bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.8}$$

$$\beta_1' = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{2.9}$$

$$\beta_2' = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{2.10}$$

. . . .

$$\beta_{n-3}' = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{2.11}$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{2.12}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -b\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad n_1 = n_0. \tag{2.13}$$

Итак, система (2.3)– (2.12) может быть рассмотрена на своем фазовом $2(n-1)+1$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1\{v\}\times T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1; 0\leqslant\alpha\leqslant\pi, 0\leqslant\beta_1\leqslant\pi,\ldots,$$
$$0\leqslant\beta_{n-3}\leqslant\pi, 0\leqslant\beta_{n-2}<2\pi\}, \tag{2.14}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$-мерной сфере.

Видно, что в системе (2.3)– (2.12) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (2.4)– (2.12) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (2.4)– (2.12) порядка $2(n-1)$ образовалась еще одна независимая система (2.4)– (2.11) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

Теорема 2.1. *Общая система динамических уравнений* (1.3), (1.5) *при условиях* (1.10), (1.8), (1.9) *редуцируется к динамической системе* (1.29)–(1.36) *на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$*-мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. *В частности, при условии* (2.1) *— выделяется система* (2.4)–(2.12).

2.2. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.10) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.16)–(1.23) (при условии (1.12)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1,\ldots,z_{n-1}) = v^2+\sigma^2(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2) - 2\sigma z_{n-1}v\sin\alpha = V_C^2 \tag{2.15}$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1,\ldots,z_{n-1}$ выбираются в силу (1.14)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v\neq 0$) у системы (2.3)–(2.12) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z_1,\ldots,Z_{n-1}) = v^2(1+b^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \tag{2.16}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (2.16) позволяет, не решая системы (2.3)– (2.12), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha}. \tag{2.17}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (2.3)– (2.12) существуют асимптотические предельные множества, равенство (2.16) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (2.3)– (2.12) во всем фазовом пространстве (ср. с [**25**] и [**29**]–[**33**]).

Таким образом, в силу отделения уравнения на величину v, а также наличия аналитического первого интеграла (2.16) система (2.4)–(2.12) может быть рассмотрена самостоятельно на своем фазовом пространстве.

2.3. Полный список первых интегралов при любом конечном n. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (2.4)–(2.12) порядка $2(n-1)$ (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (2.4)–(2.12) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{gathered} w_{n-1} = Z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \quad w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \quad \ldots, \\ w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}} \end{gathered} \tag{2.18}$$

система (2.4)–(2.12) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{2.19}$$

$$w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.20}$$

$$w_{n-2}' = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{2.21}$$

$$\begin{gathered} w_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\frac{1 + w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \quad s = 1, \ldots, n-3, \end{gathered} \tag{2.22}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{2.23}$$

где выполнены условия

$$\begin{gathered} d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = -Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = (-1)^{n+1}Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \end{gathered} \tag{2.24}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1), \quad k = 1, \ldots, n-2, \tag{2.25}$$

суть функции в силу замены (2.18).

Видно, что система (2.19)–(2.23) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (2.19)–(2.21) — третьего, а системы (2.22) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (2.19)–(2.23) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (2.19)–(2.21), по одному — для систем (2.22) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (2.23) (т.е. всего n).

Для начала сопоставим независимой подсистеме третьего порядка (2.19)–(2.21) неавтономную систему второго порядка, которую, используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем в алгебраическом виде

$$\begin{gathered}\frac{dw_{n-1}}{d\tau} = \frac{\tau + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-1}\tau^2 - w_{n-1}^2/\tau}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-1}^2 + w_{n-1}^2)},\\ \frac{dw_{n-1}}{d\tau} = \frac{bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-2}\tau^2 + w_{n-2}w_{n-1}/\tau}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)}.\end{gathered} \tag{2.26}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2} = u_1\tau, w_{n-1} = u_2\tau, \tag{2.27}$$

приводим систему (2.26) к следующему виду:

$$\begin{gathered}\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)},\end{gathered} \tag{2.28}$$

что эквивалентно

$$\begin{gathered}\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)},\\ \tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}.\end{gathered} \tag{2.29}$$

Сопоставим системе второго порядка (2.29) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{2.30}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\Big(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\Big) = 0. \tag{2.31}$$

Итак, уравнение (2.30) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{2.32}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \text{const}\,. \tag{2.33}$$

Далее, произведем поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (2.19)– (2.21). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (2.32) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\Big(u_2 - \frac{b}{2}\Big)^2 + \Big(u_1 - \frac{C_1}{2}\Big)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{2.34}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{2.35}$$

и фазовое пространство системы (2.19)– (2.21) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (2.34).

Таким образом, в силу соотношения (2.32) первое уравнение системы (2.29) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \tag{2.36}$$

где

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-bu_2+1)}\},\tag{2.37}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (2.35), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2}=\frac{(b-u_2)\tau-b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2)}{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)}.\tag{2.38}$$

Уравнение (2.38) (при помощи (2.37)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2}=\frac{2(u_2-b)p+2b(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2)}{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)},\quad p=\frac{1}{\tau^2}.\tag{2.39}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (2.39) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (2.39), даже в частном случае $b=C_1=2$ имеет следующее решение:

$$p=p_0(u_2)=C[\sqrt{1-(u_2-1)^2}\pm 1]\exp\left[\sqrt{\frac{1\mp\sqrt{1-(u_2-1)^2}}{1\pm\sqrt{1-(u_2-1)^2}}}\right],\quad C=\mathrm{const}.\tag{2.40}$$

Замечание 2.1. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (2.33).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1},w_{n-2};\alpha)=G\Big(\sin\alpha,\frac{w_{n-1}}{\sin\alpha},\frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\Big)=C_2=\mathrm{const}.\tag{2.41}$$

Итак, найдены два первых интеграла (2.33), (2.41) независимой системы третьего порядка (2.19)– (2.21). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (2.22) (их всего $n-3$), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (2.23).

Действительно, искомые первые интегралы имеют следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s)=\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s}=C''_{s+2}=\mathrm{const},\quad s=1,\ldots,n-3,\tag{2.42}$$

$$\Theta_n(w_{n-3},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=C''_n=\mathrm{const},\tag{2.43}$$

при этом в левую часть равенства (2.43) вместо C_{n-2},C_{n-1} необходимо подставить интегралы (2.42) при $s=n-4,n-3$.

Теорема 2.2. *Система* (2.19)–(2.23) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов* (2.33), (2.41), (2.42), (2.43).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.3), (1.5) при условии (2.1) имеет

$$1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n=\frac{n^2-n+4}{2},\quad n>2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.10), соответствующая аналитическому первому интегралу (2.15), циклические первые интегралы вида (1.8), (1.9), первый интеграл вида (2.33), также имеется первый интеграл (2.41), который может быть найден из уравнения (2.39), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (2.42), (2.43).

Теорема 2.3. *Система* (1.3), (1.5) *при условиях* (1.10), (2.1), (1.8), (1.9) *обладает* $(n^2-n+4)/2, n>2$, *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), n *из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

Литература

1. М. В. Шамолин, “К задаче о движении тела в среде с сопротивлением”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, мат. мех.* No. 1, 52–58 (1992).
2. М. В. Шамолин, *Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела*, Экзамен, М. (2007).
3. М. В. Шамолин, “Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой”, *Изв, РАН* No. 2, 65–68 (1997).
4. М. В. Шамолин, “Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой”, *Докл. РАН* **364**, No. 5, 627–629 (1999).
5. М. В. Шамолин, “Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости”, *Докл. РАН* **403**, No. 4, 482–485 (2005).
6. М. В. Шамолин, “Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании”, *Прикл. мат. мех.* **69**, No. 6, 1003–1010 (2005).
7. М. В. Шамолин, “Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы”, *Успехи мат. наук* **62**, No. 5, 169–170 (2007).
8. М. В. Шамолин, “Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения”, *Фундам. прикл. мат.* **14**, No. 3, 3–237 (2008).
9. М. В. Шамолин, “Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости”, *Прикл. мат. мех.* **72**, No. 2, 273–287 (2008).
10. М. В. Шамолин, “Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела”, *Докл. РАН* **431**, No. 3, 339–343 (2010).
11. М. В. Шамолин, “Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования”, *Докл. РАН* **442**, No. 4, 479–481 (2012).
12. М. В. Шамолин, “Полный список первых интегралов динамических уравнений движения твердого тела в сопротивляющейся среде при учете линейного демпфирования”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, мат. мех.* No. 4, 44–47 (2012).
13. В. В. Трофимов, М. В. Шамолин, “Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем”, *Фундам. прикл. мат.* **16**, No. 4, 3–229 (2010).
14. М. В. Шамолин, “Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде”, *Докл. РАН* **375**, No. 3, 343–346 (2000).
15. М. В. Шамолин, “Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbb{R}^4$”, *Успехи мат. наук* **60**, No. 6, 233–234 (2005).
16. М. В. Шамолин, “Классификация случаев полной интегрируемости в динамике симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле”, *Соврем. мат. прил.* **65**, 132–142 (2009).
17. М. В. Шамолин, “Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле”, *Докл. РАН* **425**, No. 3, 338–342 (2009).
18. М. В. Шамолин, “Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле”, *Успехи мат. наук* **65**, No. 1, 189–190 (2010).
19. М. В. Шамолин, “Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле”, *Докл. РАН* **437**, No. 2, 190–193 (2011).
20. М. В. Шамолин, “Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования”, *Докл. РАН* **440**, No. 2, 187–190 (2011).

21. М. В. Шамолин, “Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования”, *Докл. РАН* **444**, No. 5, 506–509 (2012).
22. М. В. Шамолин, “Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле”, *Соврем. мат. прил.* **76**, 84–99 (2012).
23. С. А. Чаплыгин, “О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости”, *Полн. собр. соч. Том 1*, с. 133–135, Изд–во АН СССР, Л. (1933).
24. С. А. Чаплыгин, *Избранные труды*, Наука, М. (1976).
25. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М. (1979).
26. Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин, “Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$”, *Докл. РАН* **380**, No. 1, 47–50 (2001).
27. Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин, “Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$”, *Докл. РАН* **383**, No. 5, 635–637 (2002).
28. Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин, “Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, мат. мех.* No. 5, 37–41 (2003).
29. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, ВИНИТИ, М. (1985).
30. Н. Бурбаки *Группы и алгебры Ли*, Мир, М. (1972).
31. В. В. Козлов, “Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике”, *Успехи мат. наук* **38**, No. 1, 3–67 (1983).
32. А. Пуанкаре, *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*, ОГИЗ, М.-Л. (1947).
33. М. В. Шамолин, “Об интегрируемости в трансцендентных функциях”, *Успехи мат. наук* **53**, No. 3, 209–210 (1998).

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2015 г.

ISSN 0132–6511 (принт)
ISSN 2409–5850 (онлайн)

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Июль 2016 **www.mathbooks.ru** **Выпуск 86**

Содержание