



Общероссийский математический портал

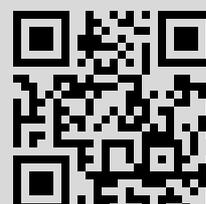
М. В. Шамолин, К задаче о свободном торможении твердого тела с передним конусом в сопротивляющейся среде, *Матем. моделирование*, 2016, том 28, номер 9, 3–23

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.60.208

29 августа 2016 г., 14:00:22



К ЗАДАЧЕ О СВОБОДНОМ ТОРМОЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПЕРЕДНИМ КОНУСОМ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

© 2016 г. *М.В. Шамолин*

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

Автор строит нелинейную математическую модель плоскопараллельного воздействия среды на твердое тело, имеющее переднюю часть своей внешней поверхности в виде кругового конуса. Проводится многопараметрический анализ динамических уравнений движения. Получено новое семейство фазовых портретов на фазовом цилиндре квазискоростей. Данное семейство состоит из бесчисленного множества топологически неэквивалентных фазовых портретов. Получены достаточные условия устойчивости важного режима движения – прямолинейного поступательного торможения, а также условия наличия в системе автоколебательных режимов.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, фазовый портрет.

ON THE PROBLEM OF FREE DECELERATION OF A RIGID BODY WITH THE CONE FRONT PART IN A RESISTING MEDIUM

M.V. Shamolin

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University

The author constructs the nonlinear mathematical model of the planar interaction of a medium to the rigid body having the circular convex as the front part of its external shape. We make the multi-parametric analysis of dynamic equations of the body motion. We obtain new family of the phase patterns on the phase cylinder of quasi-velocities. This family consists of the infinite set of topologically nonequivalent phase patterns. We also obtain the sufficient conditions of important regime stability, i.e. the rectilinear translational deceleration, and also the conditions of existence of auto-oscillations in the system considered.

Key words: rigid body, resisting medium, phase pattern.

Введение

В работе изучается движение твердого тела, имеющего круговой конус в качестве передней части своей внешней поверхности, в сопротивляющейся среде. При этом линия действия силы, приложенной к телу со стороны среды, меняет свою ориентацию относительно тела, поскольку раскладывается в сумму силы лобового сопротивления и боковой силы. Рассматриваемая задача является естественным обобщением задачи о движении твердого тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде, когда касательные силы воздействия среды на плоский торец отсутствуют [1,2].

Основным объектом исследования является семейство тел, часть поверхности которых имеет конусообразный участок, обтекаемый средой по законам струйного обтекания. При этом поток среды предполагается однородным, в том смысле, что если движущееся тело свободное, то среда на бесконечности покоится, а если (частично) закрепленное (например, вращается вокруг неподвижной точки), то скорость набегающего потока на бесконечности постоянна. Подобные условия возникают при движении тела, так сказать, с «большими» углами атаки, в среде при струйном обтекании [3–5] или при отрывном [6,7].

1. Модельные предположения и невозмущенное движение

Поставим подробно задачу плоскопараллельного движения. Предположим, что однородное твердое тело массы m совершает плоскопараллельное движение в среде и некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой конус, находящийся в условиях струйного обтекания средой. Конусообразная конструкция поверхности тела и гипотеза о квазистатическом воздействии среды позволяют сформулировать полную схему сил: воздействие среды на тело сводится к суммарной силе $\mathbf{S} = \mathbf{S}_x + \mathbf{S}_y$ (скользящему вектору), проходящей через некоторую точку прямой Dy (рис.1), связанной с телом системы координат Dxy (D – вершина конуса). При этом сила лобового сопротивления \mathbf{S}_x (скользящий вектор) параллельна оси Dx , и линия ее действия проходит через точку N , а боковая сила \mathbf{S}_y (также скользящий вектор) действует вдоль прямой Dy (линия его действия проходит через точку D). Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края конуса, и главное, что она не испытывает действия среды.

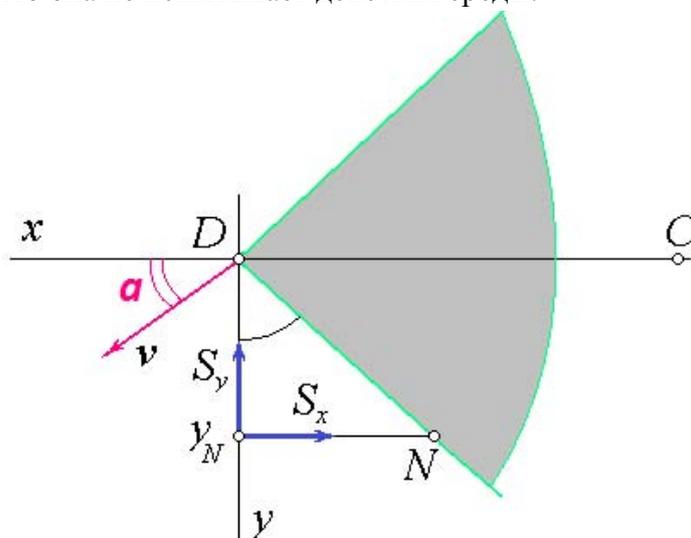


Рис.1. Воздействие среды на твердое тело с передней частью в виде конуса.

Предположим, что координата y_N точки N определяется, по крайней мере, углом атаки α , измеряемым между вектором скорости точки D относительно потока и осью симметрии Dx : $y_N = R(\alpha, \dots)$. Силы лобового \mathbf{S}_x и бокового \mathbf{S}_y сопротивления (рис.1) будем представлять в квадратичном виде по скорости точки D :

$$\mathbf{S}_x = -s(\alpha)v^2\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{S}_y = -b(\alpha)v^2\mathbf{e}_y, \quad |\mathbf{v}_D| = v,$$

с некоторыми коэффициентами s , b , зависящими лишь от угла атаки. Таким образом, тройка функций $R(\alpha, \dots)$, $s(\alpha)$, $b(\alpha)$ определяет воздействие среды на твердое тело в условиях квазистационарности [3–5, 8, 9].

Допустим, что среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения с нулевым углом атаки (невозмущенное движение). Это возможно при выполнении двух условий, а именно:

- (i) скорости движения всех точек тела параллельны оси Dx ;
- (ii) перпендикуляр, опущенный из центра масс C тела на ось Dy , принадлежит линии действия силы S .

Если формально провести ось Dz , перпендикулярную плоскости рисунка, и считать, для простоты, Dzx плоскостью геометрической симметрии тела, то это обеспечит выполнение условия (ii) при движении, удовлетворяющем условию (i).

Для построения динамической модели введем первые три фазовые координаты: v – величина скорости точки D относительно потока (рис.1), α – угол атаки, Ω – значение проекции абсолютной угловой скорости тела на ось Dz .

Коэффициенты лобового сопротивления s и боковой силы b обычно представляют в виде $s = \rho P c_x / 2$, $b = \rho P c_y / 2$, где c_x , c_y – уже безразмерные коэффициенты лобового сопротивления и боковой силы соответственно (ρ – плотность среды, P – характерная поперечная площадь). Эти коэффициенты зависят от угла атаки, числа Струхаля и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем введем безразмерную фазовую переменную «типа Струхаля» $\omega = \Omega D_1 / v$ (D_1 – характерный размер).

Таким образом, в дальнейшем в уравнениях движения возникают следующие три функции фазовых переменных: R , s и b , которые будем называть функциями воздействия среды. Ограничимся зависимостью коэффициентов c_x , c_y от угла атаки, т.е. в принципе будем считать величины s и b функциями α , а величину R – функцией, вообще говоря, пары безразмерных переменных (α, ω) .

Задача о движении тела с малыми углами атаки формирует представление о нелинейных динамических системах, исследуемых в дальнейшем.

Прямолинейное поступательное (невозмущенное) движение задается уравнениями $\alpha(t) \equiv 0$, $\omega(t) \equiv 0$. Поэтому функцию R при малых α , ω примем в виде $R = D_1(k\alpha - h\omega)$, где k и h – некоторые постоянные, D_1 – характерный размер. Функцию b при малых α примем в виде $b = b_1\alpha$. Зависимостью же s от α , в силу геометрической симметрии тела, обеспечивающей четность функции s , пренебрегаем.

Линеаризованная модель силового воздействия среды содержит четыре параметра s , b_1 , k , h , которые определяются геометрическими параметрами конуса. Два первых из этих параметров – коэффициенты s , b_1 – размерные. Параметры же k , h являются безразмерными в силу способа их введения.

Отметим, что величины k , h могут быть экспериментально определены путем весовых измерений в установках типа гидро- или аэродинамических труб. В литературе [4,6,7,10] имеется также информация о теоретическом определении этих величин для отдельных случаев (для движения твердого тела с передним плоским торцом, т.е. когда боковая сила отсутствует, см. также [11,12]). Эта информация позволяет считать, что $k > 0$.

Что же касается параметра h (который вносит в систему дополнительную зависимость момента силы от угловой скорости), то даже сама необходимость введения его в модель априори не очевидна [13,14].

Изучение свойств движения рассматриваемых классов тел в Институте механики МГУ им. М.В. Ломоносова было начато экспериментами по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров [11,12], а также тел с конусообразной передней частью. Эксперимент позволил остановиться на важных выводах. Первый: режим прямолинейного поступательного торможения цилиндра (в воде) неустойчив по отношению к углу ориентации тела. Стало возможным также определение безразмерных параметров k , h воздействия воды на цилиндр. Второй вывод, полученный из проведенного натурного эксперимента, следующий: при моделировании воздействия среды на тело необходимо учитывать дополнительный параметр, эквивалентный так называемой вращательной производной момента аэрогидродинамических сил по угловой скорости тела. Этот параметр вносит в систему диссипацию.

Величина коэффициента демпфирующего момента для тел с передним плоским торцом уже была оценена в работе [15] для некоторых случаев движения в воде. Данная там оценка говорит о неустойчивости по углу атаки и угловой скорости невозмущенного движения в воде. Чисто формально, увеличивая величину коэффициента демпфирования, возможно достижение устойчивости данного движения. Невозмущенное движение твердого тела в некоторых средах (например, в глине) устойчиво в вышеописанном смысле, как показывает эксперимент [16]. Возможно, данная устойчивость достигается благодаря наличию в системе значительного демпфирования со стороны среды или наличию сил, касательных к пластине. В нашем же случае конусообразного тела достижение исследуемой устойчивости станет возможным благодаря наличию боковой силы.

Первый вывод, сделанный из эксперимента, заставляет нас рассматривать класс возможных движений тела при малых углах атаки (т.е. около невозмущенного движения) в качестве «опорного» для рассмотрения класса свободного торможения тела с конечными углами атаки. При этом для конусов различной формы (например, конусов с малым раствором) углы атаки вполне могут принимать близкие значения к $\pi/2$, т.е. практически любое значение из интервала $(0, \pi/2)$. И лишь при углах, близких к $\pi/2$, неизбежен так называемый замыв боковой поверхности, когда предлагаемая модель перестает работать. По этой причине возникает необходимость продолжения функций воздействия среды R , b и s , по крайней мере, на конечные углы атаки, т.е. «расширения» их области определения на интервал $(0, \pi/2)$. Но мы будем продолжать данные функции на всю числовую прямую хотя бы потому, что мы не знаем точные интервалы применимости предлагаемой модели. При этом дальнейшее исследование нелинейных динамических систем мы проводим при всех действительных значениях α , хотя подразумеваем, что модель справедлива лишь в ограниченной области значений $|\alpha| < \pi/2$.

2. Задача движения со следящей силой и динамическая часть уравнений движения

Рассмотрим более общую задачу движения, а именно предположим, что на тело, наряду с имеющейся силой \mathbf{S} , действует некоторая следящая сила \mathbf{T} , проходящая через центр масс C тела. Введение данной силы производится в методических соображениях, например, с целью рассмотрения заданных классов движения (см. также [1,2,17]).

В данной работе будут рассмотрены два случая движения.

1) Свободное торможение твердого тела, т.е. когда следящая сила отключена:

$\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$ (раздел 3, наиболее интересный в прикладном отношении случай движения).

2) $\mathbf{T} = -\mathbf{S}$ (раздел 4, т.е. когда центр масс тела движется прямолинейно и равномерно). При этом повторим, что дальнейшее исследование нелинейных динамических систем мы проводим при всех действительных значениях α , хотя подразумеваем, что модель справедлива лишь в ограниченной области значений $|\alpha| < \pi/2$.

Нелинейные динамические уравнения плоскопараллельного движения тела представим следующим образом:

$$v^{\bullet} \cos \alpha - \alpha^{\bullet} v \sin \alpha + \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = T_1 - s(\alpha)v^2 / m, \quad (2.1)$$

$$v^{\bullet} \sin \alpha + \alpha^{\bullet} v \cos \alpha - \Omega v \cos \alpha + \sigma \Omega^{\bullet} = T_2 - b(\alpha)v^2 / m, \quad (2.2)$$

$$I \Omega^{\bullet} = -F(\alpha)v^2 + \sigma b(\alpha)v^2, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{T} = \{T_1, T_2\}$ – разложение следящей силы в системе Dxy , I – центральный момент инерции тела, m – его масса, σ – расстояние CD (рис.1), при этом в данной работе ограничимся зависимостью функции R лишь от угла атаки, т.е. $R(\alpha, \dots) = R(\alpha)$, $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$ [1,2].

Для завершения описания движения тела к системе динамических уравнений (2.1)–(2.3) необходимо присовокупить кинематическую часть уравнений движения, состоящую из трех уравнений первого порядка. Но поскольку кинетическая энергия тела, а также обобщенные силы не зависят от положения тела на плоскости, система уравнений (2.1)–(2.3) является замкнутой и может быть рассмотрена самостоятельно.

Для качественного описания тройки функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$ и $b(\alpha)$, входящей в систему (2.1)–(2.3), используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания конусообразных тел. Вводимые классы достаточно широки: они состоят из функций достаточно гладких, 2π -периодических (s – четная, а R , b – нечетные), удовлетворяющих следующим условиям: $(R, b)(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $(R, b)'(0) > 0$, $(R, b)'(\pi) < 0$, (классы функций $\{R\}$, $\{b\}$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\}$). Как R , b , так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. Таким образом, $R \in \{R\}$, $b \in \{b\}$, $s \in \{s\}$.

Видно, что в дальнейшем в рассматриваемых динамических системах возникает также произведение $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$. Из перечисленных выше условий следует, что F – достаточно гладкая нечетная π -периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{F\}$). Таким образом, $F \in \{F\}$.

Итак, для исследования обтекания тела конусообразной формы средой используются классы динамических систем, определенные с помощью тройки функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

При изучении движения тела с конечными углами атаки *основным вопросом нелинейного анализа* является нахождение таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле невозмущенного движения, что подтверждает необходимость полного нелинейного исследования.

У системы (2.1)–(2.3) третьего порядка при условии

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = \tau_1(\alpha)v^2 + \tau_2(\alpha)\Omega v + \tau_3(\alpha)\Omega^2 = T_1(\alpha, \Omega/v)v^2$$

возможно отщепление независимой подсистемы второго порядка. Действительно, система (2.1)–(2.3) является эйлеровой однородной системой по части квазискоростей (Ω, v) степени однородности 2, поскольку после замены независимого переменного (времени t) $dq = vdt$, $v \neq 0$ ($\langle \cdot \rangle = d/dt = vd/dq = v\langle \cdot \rangle$), а также угловой скорости $\Omega = \omega v$, получаем новую систему, эквивалентную системе (2.1)–(2.3):

$$v' = v\Psi_1(\alpha, \omega), \quad (2.4)$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega)\cos\alpha + \sigma\omega^2\cos\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\cos\alpha, \quad (2.5)$$

$$\omega' = -\frac{1}{I}\psi(\alpha, \omega) - \omega\Psi_1(\alpha, \omega), \quad (2.6)$$

где $\psi(\alpha, \omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha)$, $\Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega)\sin\alpha - \sigma\omega^2\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\sin\alpha$.

В системе (2.4)–(2.6) третьего порядка появляется независимая подсистема (2.5), (2.6) второго порядка, которая может быть рассмотрена самостоятельно на своем фазовом цилиндре $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}$.

3. Об устойчивости невозмущенного движения

В данном разделе следящая сила предполагается отключенной ($\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$).

При изучении модели взаимодействия твердого тела со средой будут найдены достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (свободного торможения). С практической точки зрения данный вопрос достаточно важен. Будет также показано, что при некоторых условиях возможно присутствие в системе либо устойчивого, либо неустойчивого автоколебательных режимов.

Предлагаемый материал представляет собой введение в задачу движения твердого тела, взаимодействующего со средой через передний участок своей внешней поверхности, имеющий форму конуса. При построении силового воздействия среды используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности.

Напомним, что по причине сложности нелинейного анализа начальным этапом такого исследования является пренебрежение зависимостью момента суммарной силы воздействия среды от угловой скорости тела и использование такой зависимости лишь от угла атаки (как мы уже отметили выше, $R(\alpha, \dots) = R(\alpha)$).

Весь спектр результатов, найденных при указанном простейшем предположении, позволяет в дальнейшем сделать вывод о возможности нахождения таких условий, при которых у приведенных систем существовали бы решения, соответствующие угловым колебаниям тела ограниченной амплитуды.

3.1. Устойчивость по линейному приближению. Речь идет об исследовании устойчивости тривиального решения системы (2.5), (2.6). Система (2.5), (2.6), в которой вводятся безразмерные дифференцирование и переменная ω

$$\langle \cdot \rangle \rightarrow n_0 \langle \cdot \rangle, \quad n_0^2 = AB/I, \quad A = y'(0), \quad B = s(0), \quad \omega \rightarrow n_0\omega,$$

примет вид

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{In_0} F(\alpha) \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{In_0} b(\alpha) \cos \alpha + \sigma n_0 \omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{mn_0} \sin \alpha - \frac{b(\alpha)}{mn_0} \cos \alpha, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \omega' = & -\frac{1}{In_0^2} F(\alpha) + \frac{\sigma}{In_0^2} b(\alpha) - \frac{\sigma}{In_0} \omega F(\alpha) \sin \alpha + \frac{\sigma^2}{In_0} \omega b(\alpha) \sin \alpha + \sigma n_0 \omega^3 \cos \alpha + \\ & + \omega \frac{s(\alpha)}{mn_0} \cos \alpha + \omega \frac{b(\alpha)}{mn_0} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Введем следующие безразмерные положительные параметры:

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{mn_0}, \quad \mu_2 = \sigma n_0, \quad \mu_3 = \frac{b_1}{mn_0}, \quad \mu_4 = \frac{\sigma b_1}{In_0^2},$$

где $b_1 = b'(0)$. Параметры μ_1, \dots, μ_4 естественно назвать

μ_1 – параметр силы лобового сопротивления;

μ_2 – параметр момента лобового сопротивления;

μ_3 – параметр боковой силы;

μ_4 – параметр момента боковой силы.

Исследуя устойчивость тривиального решения системы (3.1), (3.2), выпишем соответствующее характеристическое уравнение. Оно имеет вид

$$\lambda^2 + K_1 \lambda + K_2 = 0,$$

$$\text{где } K_1 = \mu_2(\mu_4 - 1) + \mu_3 - \mu_1, \quad K_2 = \frac{\mu_1}{2} \left(\mu_2 - \mu_2 \mu_4 + \frac{\mu_1}{2} - \mu_3 \right) + 1 - \mu_4.$$

Тогда верно следующее предложение.

Предложение 1. При выполнении следующих двух неравенств

$$\mu_2 \mu_4 + \mu_3 > \mu_1 + \mu_2, \quad \mu_1 \mu_2 / 2 + \mu_1^2 / 4 + 1 > \mu_1 \mu_2 \mu_4 / 2 + \mu_1 \mu_3 / 2 + \mu_4 \quad (3.3)$$

тривиальное решение системы (3.1), (3.2) асимптотически устойчиво.

Условия (3.3) действительно могут быть выполнены. К примеру, если $\mu_1 = \mu_3$, то первое неравенство в (3.3) выполняется при любых положительных параметрах μ_2, μ_4 , в результате чего второе неравенство в (3.3) нетрудно удовлетворить.

3.2. О рождении предельного цикла из слабого фокуса. Для возможного рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (3.1), (3.2) при критическом сочетании параметров

$$\mu_2 \mu_4 + \mu_3 = \mu_1 + \mu_2. \quad (3.4)$$

Для этого сделаем замену фазовых переменных $(\alpha, \omega) \rightarrow (a, w)$ в системе (3.1), (3.2):

$$\alpha = a, \quad \omega = \mu_1 a / 2 + \omega_0 w, \quad \omega_0 = \sqrt{1 - \mu_1^2 / 4 - \mu_4},$$

переводящую ее в следующую систему:

$$\begin{aligned} a' &= |\omega_0| w + C_1 a^3 + C_2 a^2 w + C_3 a w^2 + \overline{o_1} ((a^2 + w^2)^{3/2}), \\ w' &= -|\omega_0| a + C_4 a^3 + C_5 a^2 w + C_6 a w^2 + C_7 w^3 + \overline{o_2} ((a^2 + w^2)^{3/2}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} + \frac{s_2}{2mn_0} + \frac{5\mu_1}{12} + \mu_2 \left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2} \right)^2 - \frac{\sigma^2 b_3}{6In_0} - \frac{b_3}{6mn_0}, \quad C_2 = -\frac{5}{2} \mu_2 \left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2} \right) \omega_0, \\ C_3 &= \mu_2 \omega_0^2, \quad C_4 = -\left(1 + \frac{\mu_1 \mu_2}{2} \right) \frac{f_3}{6In_0^2 \omega_0} + \frac{\mu_2 + \mu_1 / 2}{2\omega_0} \cdot \left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{3} \right) + \frac{\sigma b_3}{6In_0^2}, \\ C_5 &= \frac{s_2}{2mn_0} + \mu_2 \left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2} \right)^2 + \frac{3\mu_1}{4}, \quad C_6 = -2\mu_2 \left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2} \right) \omega_0, \quad C_7 = \mu_2 \omega_0^2, \\ s_2 &= s''(0), \quad f_3 = F'''(0), \quad b_3 = b'''(0). \end{aligned}$$

Введем следующий вспомогательный индекс (см. также [18]):

$$Ind = |\omega_0| \{ Y_{111}^1 + Y_{122}^1 + Y_{112}^2 + Y_{222}^2 \} + (Y_{11}^1 Y_{11}^2 + Y_{11}^1 Y_{12}^1 + Y_{11}^2 Y_{12}^2 + Y_{22}^2 Y_{12}^2 - Y_{22}^1 Y_{12}^1 - Y_{22}^1 Y_{22}^2),$$

$$Y_{jkl}^i = \frac{\partial^3 Y_i}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l}(0, 0), \quad Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0, 0),$$

где $\begin{pmatrix} Y_1(a, w) \\ Y_2(a, w) \end{pmatrix}$ – правая часть системы (3.1), (3.2).

Более конкретно, для системы (3.1), (3.2) построенный индекс будет иметь вид

$$Ind = 6C_1 + 2C_3 + 2C_5 + 6C_7 = \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} + \frac{4s_2}{mn_0} + 5(\mu_1 + \mu_2) - \frac{\sigma^2 b_3}{In_0} - \frac{b_3}{mn_0}.$$

Поскольку для данной системы

$$Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0, 0) = 0$$

(по причине нечетности ее правой части от фазовых переменных) для любых индексов i, j, k , то следующее предложение дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при $Ind \neq 0$.

Предложение 2. Если $Ind < 0$ ($Ind > 0$) и при этом выполнено неравенство

$$(\mu_2 \mu_4 + \mu_3 - \mu_2)^2 + 4\mu_4 < 4, \quad (3.6)$$

то начало координат фазовой плоскости $\mathbf{R}^2\{a, w\}$ системы (3.5) при критическом соотношении параметров (3.4) является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.

Условие (3.6) в данном случае является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости $\mathbf{R}^2\{a, w\}$ является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом.

Введем вспомогательное обозначение:

$$\mu = \mu_2\mu_4 + \mu_3 - \mu_1 - \mu_2.$$

Очевидно, в критическом случае (3.4) выполнено равенство

$$\mu = 0.$$

Перефразировкой известной теоремы Пуанкаре-Андронов-Хопфа [19,20] является **Теорема 1.** Пусть для системы (3.5) выполнено неравенство (3.6). Тогда:

1) Если $Ind < 0$, то для любых фиксированных $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ найдутся такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что при $\mu \in (0, \delta_1)$ начало координат является сильным устойчивым фокусом; при $\mu \in (-\delta_2, 0)$ начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением μ от 0 до $-\delta_2$ как $\sqrt{|\mu|}$.

2) Если $Ind > 0$, то для любых фиксированных $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ найдутся такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что при $\mu \in (-\delta_2, 0)$ начало координат является сильным неустойчивым фокусом; при $\mu \in (0, \delta_1)$ начало координат является сильным устойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом μ от 0 до δ_1 как $\sqrt{|\mu|}$.

Проверить выполнение условия $\mu > 0$ ($\mu < 0$) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды (y_N, s, b) , или от их значений. А вот проверка условия $Ind < 0$ ($Ind > 0$) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды (y_N, s, b) неизвестны.

3.3. Движение конкретного твердого тела с конусообразной передней частью в воде. Рассмотрим движение следующего составного твердого тела в воде. Тело представляет собой цилиндр диаметром 30 мм ($D = 2R = 30$ мм), передней частью которого является круговой конус (рис.2) массы $m = 80.5$ г.

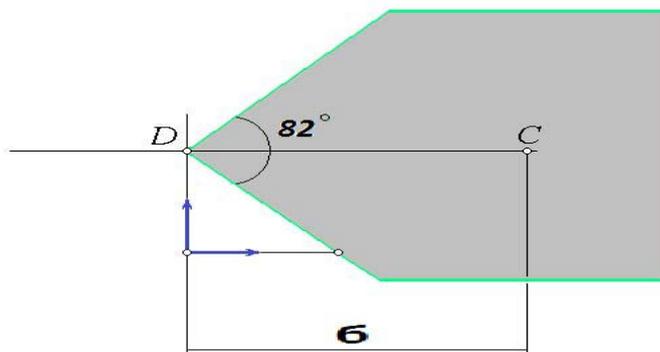


Рис.2. Составное твердое тело с конусообразной передней частью.

Угол разворота конуса равен 82° , что означает выполнение равенств

$$c_x = 0.635, \quad c_y = 0.14.$$

Эксперименты по регистрации движения таких составных тел в воде были проведены в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова.

Безразмерный центральный момент инерции составного тела равен

$$\bar{I} = 11.1 = I / \rho R^5,$$

где I – центральный (размерный) момент инерции, ρ – плотность воды. Расстояние CD от центра масс тела до точки D (передней точки конуса – вершины) равно $\sigma = 17.5$ мм (рис.2).

Коэффициенты лобового сопротивления и боковой силы будут представлены в виде

$$B = s(0) = \frac{1}{2} c_x \rho \pi R^2, \quad b_1 = b'(0) = \frac{1}{2} c_y \rho \pi R^2,$$

при этом координата точки N (при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости тела) имеет вид $y_N = A\alpha$, где $A = 2Rk$. Порядок коэффициента $k > 0$ уже был оценен в [10].

Подсчитаем величину n_0 , приняв систему СГС. Получим

$$n_0^2 = \frac{AB}{I} = \frac{kc_x \pi}{11.1R^2} = 0.18 \frac{k}{R^2},$$

откуда $n_0 = 0.423\sqrt{k} / R$.

Теперь подсчитаем безразмерные параметры μ_1, \dots, μ_4 . А именно,

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{mn_0} = \frac{c_x \pi R^2}{80.5n_0} = \frac{0.557}{n_0} = \frac{0.197}{\sqrt{k}}; \quad \mu_2 = \sigma n_0 = 0.494\sqrt{k}; \quad \mu_3 = \frac{b_1}{mn_0} = \frac{0.0217}{\sqrt{k}};$$

$$\mu_4 = \frac{\sigma b_1}{In_0^2} = \frac{1.75c_y}{2Rkc_x} = \frac{0.128}{k}.$$

Тогда условия колебательного движения (т.е. второе условие из (3.3), означающее, что тривиальное решение является или притягивающим, или отталкивающим) примет вид

$$1.048 > \frac{0.126}{k}, \quad \text{или} \quad k > k_* = 0.121, \quad \text{где } k_* \text{ – некоторое критическое значение } k.$$

Как уже отмечалось, значение постоянной k уже было оценено в некоторых работах (но, в основном, для переднего плоского торца). Для определения этого параметра необходимо проведение дополнительных натуральных экспериментов.

Видно, что при $k < k_*$ тривиальное решение соответствующей системы соответствует грубому седлу на фазовой плоскости. При этом существуют начальные условия, при которых возможно движение вдоль устойчивых сепаратрис данного седла. При $k > k_*$ есть надежда на асимптотическую устойчивость тривиального решения (при выполнении первого неравенства из (3.3)).

В любом случае становится возможным сконструировать составное твердое тело с передним конусом такое, чтобы оба условия (3.3) могли быть выполнены.

4. Новое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой

В данном разделе проводится исследование систем, описывающих движение тела в сопротивляющейся среде, при котором на следящую силу наложено условие $\mathbf{T} = -\mathbf{S}$, означающее присутствие в системе неконсервативной пары сил, заставляющей центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно. Найдены некоторые частные решения полной системы, проведено качественное интегрирование динамических уравнений в пространстве квазискоростей. Получено новое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре. Построенное семейство состоит из бесчисленного множества фазовых портретов с различными качественными свойствами. При этом в дальнейшем полный нелинейный анализ построенных систем проводится, вообще говоря, как ранее известными методами качественной теории, так и новыми методами, полученными для систем с так называемой переменной диссипацией [1,2,17].

Дополнительно повторно оговорим, что дальнейшее исследование нелинейных динамических систем мы проводим при всех действительных значениях α , хотя подразумеваем, что модель справедлива лишь в ограниченной области значений $|\alpha| < \pi/2$.

Будем исследовать систему следующего вида:

$$\begin{aligned}\alpha' &= \omega + \frac{\sigma}{I} \psi(\alpha, \omega) \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I} \psi(\alpha, \omega) - \omega \Psi_1(\alpha, \omega),\end{aligned}\tag{4.1}$$

где $\psi(\alpha, \omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha)$, $\Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I} \psi(\alpha, \omega) \sin \alpha - \sigma \omega^2 \cos \alpha$. Данная система получена из системы (2.5), (2.6) при условии $\mathbf{T} = -\mathbf{S}$.

Таким образом, в системе присутствуют две пары сил: пара силы лобового сопротивления и пара боковой силы. При этом полученная система (4.1) является обобщением системы, рассмотренной для случая движения тела с передним плоским торцом [21, 22].

4.1. Точки покоя системы второго порядка. У системы (4.1) существуют точки покоя на плоскости $\mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$, которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \omega = 0,\tag{4.2}$$

$$\alpha = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \omega = 0,\tag{4.3}$$

$$\alpha = \pi/2 + 2\pi l, \quad l \in \mathbf{Z}, \quad \omega = -1,\tag{4.4}$$

$$\alpha = -\pi/2 + 2\pi l, \quad l \in \mathbf{Z}, \quad \omega = 1.\tag{4.5}$$

Системы (4.2), (4.3) задают точки, в которые ортогонально проектируются частные решения системы (4.1) вида

$$v(q) = v^0 \exp(-\kappa q), \quad \kappa > 0, \quad \alpha(q) \equiv s\pi, \quad s \in \mathbf{Z}, \quad \omega(q) \equiv 0,$$

при четном s соответствующие невозмущенному движению.

Наряду с точками покоя (4.2)–(4.5) могут существовать точки покоя, не лежащие на прямых $\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2: \sin\alpha\cos\alpha = 0\}$. Необходимым условием существования таких точек является их представление через систему

$$F(\alpha) = \sigma b(\alpha), \quad \alpha \neq 0 \pmod{\pi/2}, \quad \omega = 0.$$

В силу выбора функциональных классов $\{F\}$ и $\{b\}$ функция $h(\alpha) = F(\alpha)/b(\alpha)$ гладкая. Тогда справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. При

$$h^* = \max_{\alpha} h(\alpha) < \sigma \tag{4.6}$$

точек покоя, не лежащих на прямых $\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2: \sin\alpha\cos\alpha = 0\}$, не существует. При

$$h^* = \max_{\alpha} h(\alpha) > \sigma \tag{4.7}$$

такие точки покоя всегда существуют, а при $h^* = \max_{\alpha} h(\alpha) = \sigma$ они совпадают с точками покоя (4.4), (4.5).

Следствие 2. У системы (2.4)–(2.6) при условии (4.7) существуют частные решения вида

$$\begin{aligned} v(q) &= v^0 \exp(-\kappa q), \quad \kappa > 0, \quad v^0 = v(0), \\ \alpha(q) &\equiv \alpha^0 = \alpha(0) \neq \pi k / 2, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \omega(q) \equiv 0. \end{aligned}$$

Следствие 3. У системы (2.1)–(2.3) при условии (4.7) существуют частные решения вида

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{v_0}{1 + v_0 \kappa t}, \quad \kappa > 0, \quad v_0 = v(0), \\ \alpha(t) &\equiv \alpha_0 = \alpha(0) \neq \pi k / 2, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \Omega(q) \equiv 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем рассматривать систему (4.1) при условии (4.6).

4.2. Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа. В системе (4.1) присутствуют два положительных безразмерных параметра, от которых зависит классификация точек покоя:

$$\beta_1 = \sigma^2 F'(0) / I, \quad \beta_2 = \sigma^3 b'(0) / I.$$

Предложение 3.

1) Точки покоя (4.2) всегда являются неустойчивыми: седлами, если $\beta_2 > \beta_1$, отталкивающими точками, если $\beta_2 < \beta_1$. Причем, при выполнении последнего условия данные точки покоя являются фокусами, если $\beta_2 - \beta_1 + 4 > 0$, и узлами, если $\beta_2 - \beta_1 + 4 \leq 0$.

2) Точки покоя (4.3) всегда являются притягивающими: фокусами, если $\beta_2 + \beta_1 - 4 < 0$, и узлами, если $\beta_2 + \beta_1 - 4 \geq 0$.

3) Точки покоя (4.4), (4.5) всегда являются отталкивающими фокусами.

В силу отделения от системы третьего порядка (2.4)–(2.6) независимой подсистемы второго порядка (2.5), (2.6) фазовые траектории в $\mathbf{R}^1_{+}\{v\} \times \mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$ лежат на поверхностях, являющихся двумерными цилиндрами. В частности, если существует во всем фазовом пространстве первый интеграл системы (4.1), то он является функцией переменных (α, ω) , а поэтому задает семейство цилиндров в $\mathbf{R}^1_{+}\{v\} \times \mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$.

Замечание 1. Пусть φ – угол отклонения твердого тела. Поскольку $d\varphi/dt = v d\varphi/dq$, то в фазовом пространстве системы (2.1)–(2.3) данному первому интегралу будет соответствовать первый интеграл, который зависит от всех трех фазовых переменных.

Благодаря описанной выше редукции, удобнее строить фазовый портрет системы (2.4)–(2.6) в $\mathbf{R}^1_{+}\{v\} \times \mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$ с помощью фазового портрета системы (2.5), (2.6) в $\mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$. Последний не будет являться частью портрета в $\mathbf{R}^1_{+}\{v\} \times \mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$ в теоретико-множественном смысле, а будет ортогональной проекцией портрета на плоскость $\{v = \text{const}\}$. Поэтому становятся возможными поднятие фазовых траекторий с плоскостей в пространство $\mathbf{R}^1_{+}\{v\} \times \mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$ и получение фазовых портретов системы третьего порядка.

Замечание 2. Поскольку $v > 0$, то движение возможно лишь в области

$$B' = \{(\alpha, \omega, v) \in \mathbf{R}^3 : v > 0\}.$$

Если формально сделать замену переменных в области B' по формуле $\bar{p} = \ln v$, то полученное векторное поле в фазовом пространстве $\mathbf{R}^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$ не зависит от \bar{p} , т.е. имеет цилиндрическую природу более высокого порядка и ортогонально проектируется на все семейство плоскостей $\{v = \text{const}\}$.

Замечание 3. Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в трехмерное фазовое пространство, необходимо выяснить знак проекции векторного поля в $\mathbf{R}^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$ на \bar{p} -ось, либо на v -ось в области B' .

Рассмотрим поверхность $M = \{(\alpha, \omega, v) \in B' : \Psi_1(\alpha, \omega) = 0\}$ (о функции Ψ_1 см. (2.4)). Данная поверхность является цилиндром, который разрезает фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция векторного поля на v -ось имеет фиксированный знак.

На самой же поверхности M (и только на ней) проекция векторного поля на v -ось обращается в нуль.

Замечание 4. Для любых $R \in \{R\}$, $b \in \{b\}$, $s \in \{s\}$ векторное поле системы (2.5), (2.6) обладает свойством центральной симметрии относительно точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbf{Z}$, т.е. в координатах (α, ω) векторное поле системы меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha + \pi k \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\alpha + \pi k \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Другими словами, векторное поле системы (2.4)–(2.6) обладает симметрией относительно лучей $\{(\alpha, \omega, v) \in B' : \alpha = \pi k, \omega = 0\}$.

4.3. Классификация фазовых портретов системы на двумерном цилиндре для некоторой области параметров. Как уже отмечалось, будем изучать те динамические

системы, которые допускают выполнение неравенства (4.6). Т.о., для начала рассматриваем случай отсутствия точек покоя, не лежащих на прямых $\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2: \sin\alpha\cos\alpha = 0\}$.

Далее, в общем пространстве физически допустимых параметров будем изучать область

$$J^2 = \{h^* = \max_{\alpha} h(\alpha) < \sigma, \beta_2 > \beta_1\}.$$

Для проведения классификации фазовых портретов системы на плоскости или двумерном цилиндре необходимо ответить на следующие вопросы.

А) Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве α - и ω -предельных множеств бесконечно удаленные точки.

Введем семейство полос на плоскости:

$$\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2: \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\},$$

при этом $\Pi_{(-\pi/2, \pi/2)} = \Pi$, $\Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi'$.

У системы (4.1) существуют траектории, уходящие на бесконечность на плоскости $\mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$. Их α - и ω -предельными множествами являются бесконечно удаленные точки $(-2k+1)\pi + 0, +\infty$, $(2k\pi - 0, +\infty)$, $((2k+1)\pi - 0, -\infty)$, $(-2k\pi + 0, -\infty)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Лемма 1. Рассмотрим систему (4.1) на множестве

$$\Pi_{(-\pi, 0)} \cap \{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2: \omega > 0\}. \quad (4.8)$$

Тогда существует единственная траектория, имеющая в качестве ω -предельного множества точку $(-0, +\infty)$, а также существует единственная траектория, имеющая в качестве α -предельного множества точку $(-\pi + 0, +\infty)$.

В силу имеющейся симметрии поведение аналогичных траекторий в других полосах плоскости $\mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$ подобно данному.

Лемма 1 справедлива в более широких областях параметров.

Б) Ввиду рассмотрения динамических систем на цилиндре, наличие замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий, охватывающих цилиндр.

У системы (4.1) в области параметров J^2 отсутствуют замкнутые фазовые характеристики, охватывающие фазовый цилиндр $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}$, составленные из траекторий рассматриваемой системы (см. также [1,2,19,20]).

В) Существование замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку. В частности, существование неизолированных периодических траекторий или предельных циклов.

Заметим, что в силу 2π -периодичности векторного поля системы по α , последняя задача сводится к отысканию замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий лишь вокруг точек покоя индекса 1. Таким образом, предельные циклы могут существовать только лишь вокруг точек покоя (4.3)–(4.5) (см. также [1,2]).

Лемма 2. Вокруг точек покоя (4.4), (4.5) не существует замкнутых кривых, составленных из траекторий системы (4.1).

Исследование наличия замкнутых кривых вокруг точек покоя (4.3) показывает, что при некоторых условиях такие кривые существуют, а при некоторых условиях – нет.

При этом пространство параметров J^2 системы (4.1) разбивается на два множества:

$$J^2 = J_0 \amalg J_1$$

по отношению к наличию предельного цикла в полосе Π . Для параметров из множества J_0 у системы (4.1) не существует замкнутых кривых, составленных из ее траекторий. Для параметров из множества J_1 у системы (4.1) могут существовать предельные циклы. Оба множества имеют конечную меру (см. также [23]).

Г) Основным вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся гиперболических седел.

Данные сепаратрисы разделяют всю фазовую плоскость на области без положений равновесия. Ввиду последнего, фазовые портреты мгновенно достраиваются.

Рассмотрим систему (4.1) для случая параметров J_0 .

Лемма 3. Сепаратриса, выходящая из начала координат в полосу $\Pi_{(-\pi/2,0)}$ ($\Pi_{(0,\pi/2)}$) имеет в качестве ω -предельного множества точку $(-\pi, 0)$ ($(\pi, 0)$).

Доказательство леммы 3 получается из теории топографических систем Пуанкаре (см. также [19,20,23]).

В силу имеющейся симметрии поведение аналогичных траекторий в других полосах плоскости $\mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$ подобно данному.

Ключевым вопросом классификации портретов является вопрос о поведении сепаратрисы, выходящей из бесконечности в полосу $\Pi_{(-\pi,0)}$. Для нее дадим определение индекса сепаратрисного поведения (ИСП).

Определение 2. ИСП (будем обозначать его isp) называется рациональное число j , выбираемое из множества

$$\{j \in \mathbf{Q}: j = k/2, k \in \mathbf{N}_0\}.$$

По определению $isp = j$, если рассматриваемая сепаратриса (выходящая из бесконечности в полосу $\Pi_{(-\pi,0)}$) имеет в качестве ω -предельного множества точку $(2\pi j - \pi, 0)$.

Видно, что если $j \in \mathbf{Z}$, то рассматриваемая сепаратриса j раз охватывает цилиндр (по координате α).

Таким образом:

- при $j = 0$ предельным множеством рассматриваемой сепаратрисы является притягивающая точка $(-\pi, 0)$ (рис.3, $isp = 0$, $\Omega \leftrightarrow \omega$);
- при $j = 1/2$ предельным множеством рассматриваемой сепаратрисы является седло $(0, 0)$ (рис.4, $isp = 1/2$, $\Omega \leftrightarrow \omega$);
- при $j = 1$ предельным множеством рассматриваемой сепаратрисы является притягивающая точка $(\pi, 0)$ (рис.5, $isp = 1$, $\Omega \leftrightarrow \omega$);
- при $j = 3/2$ предельным множеством рассматриваемой сепаратрисы является седло $(2\pi, 0)$ (рис.6, $isp = 3/2$, $\Omega \leftrightarrow \omega$);
- при $j = 2$ предельным множеством рассматриваемой сепаратрисы является притягивающая точка $(3\pi, 0)$ (рис.7, $isp = 2$, $\Omega \leftrightarrow \omega$) и т.д.

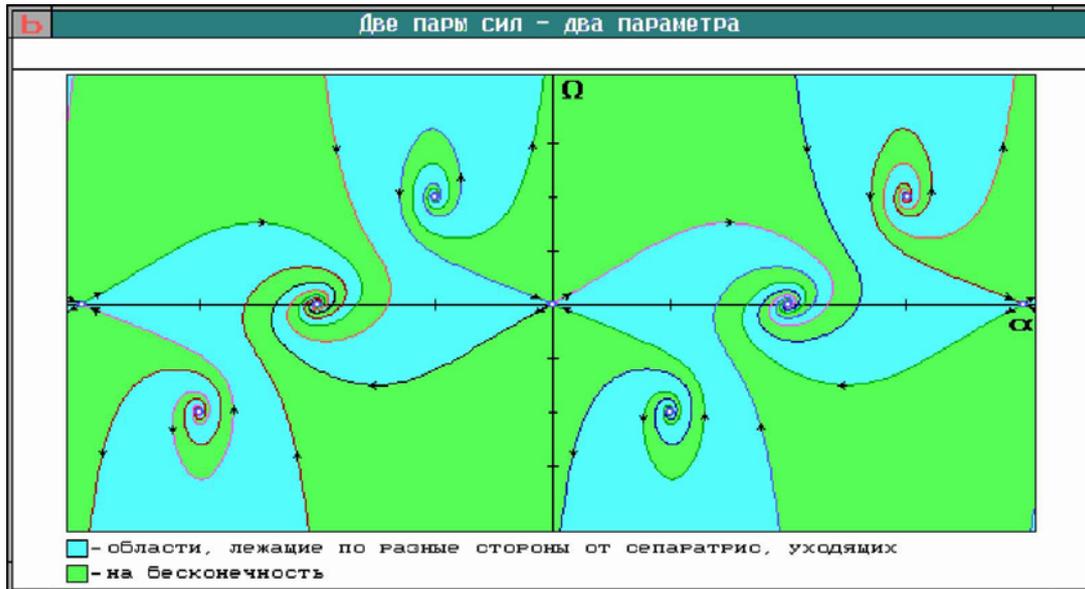


Рис.3. Фазовый портрет без неявных положений равновесия, $isp = 0$.

Теорема 2. *Определение 2* корректно.

Теорема 2 доказывается методами топографических систем Пуанкаре (см. также [19, 20]).

Прежде чем предьявить схему доказательства теоремы 2, приведем несколько вспомогательных утверждений. Предложение 4 характеризует поведение ключевой сепаратрисы системы

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I} F(\alpha) - \omega \Psi_1(\alpha, \omega), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$\Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \sin \alpha - \sigma \omega^2 \cos \alpha$, при наличии «возмущения», дающего систему (4.1)

(три типа фазовых портретов системы (4.9) изображены на рис.8-10).

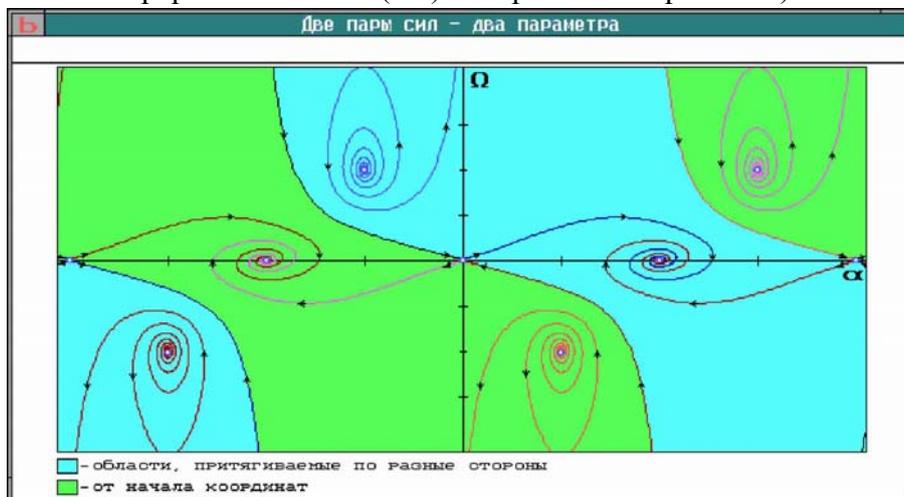


Рис.4. Фазовый портрет без неявных положений равновесия, $isp = 1/2$.

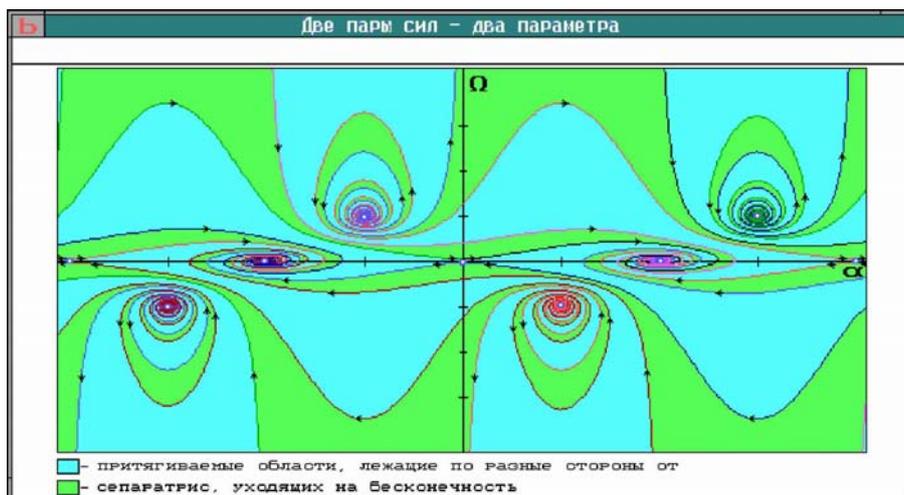


Рис.5. Фазовый портрет без неявных положений равновесия, $ispr = 1$.

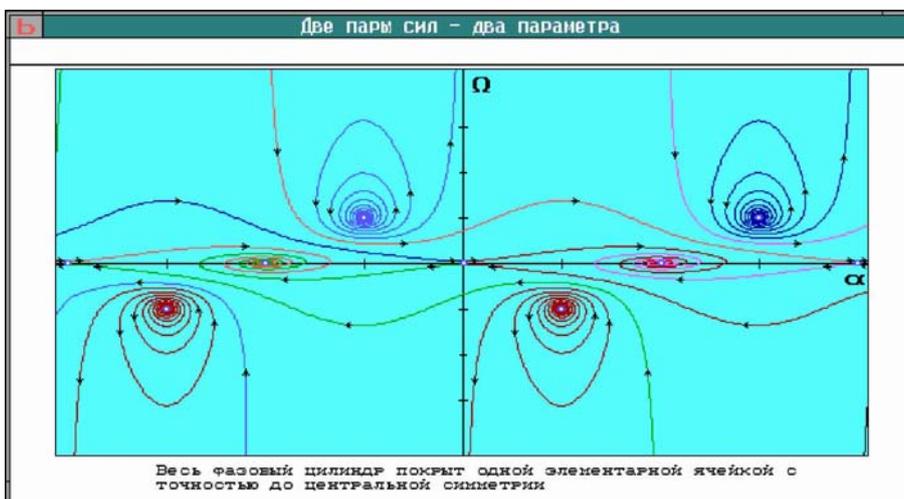


Рис.6. Фазовый портрет без неявных положений равновесия, $ispr = 3/2$.

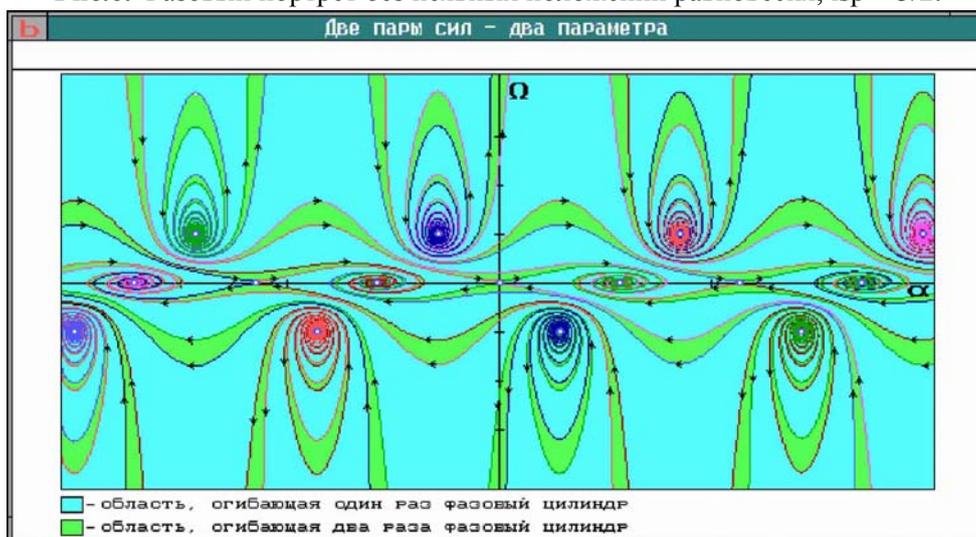


Рис.7. Фазовый портрет без неявных положений равновесия, $ispr = 2$.

Предложение 4. Возмущение системы (4.9), дающее систему (4.1), расщепляет рассматриваемую сепаратрису (выходящую из бесконечности в полосу $\Pi_{(-\pi,0)}$ и входя-

щую в бесконечность в этой же полосе).

Действительно, характеристическая функция упорядоченной пары систем (4.9) и (4.1) имеет вид

$$\chi((4.9), (4.1)) = \frac{\sigma}{I} \omega b(\alpha) [(\sigma\omega + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha], \quad (4.10)$$

и она положительна почти всюду на множестве (4.8), поскольку в ней $b(\alpha) > 0$ почти всюду.

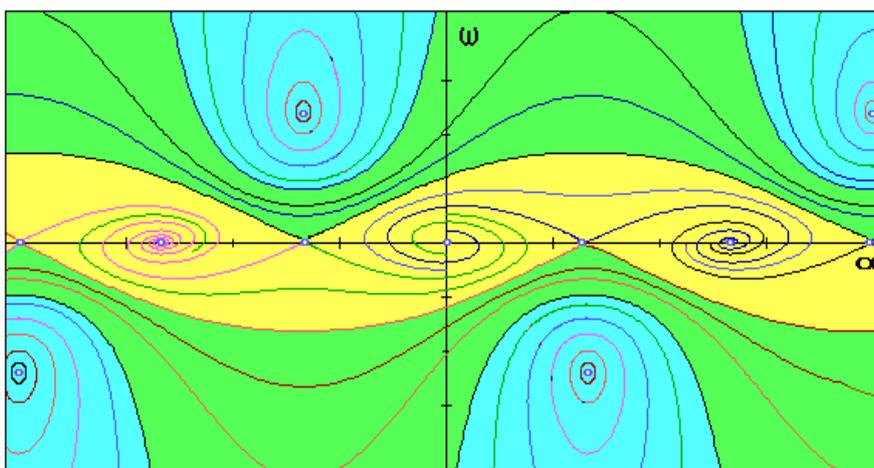


Рис.8. Ключевая сепаратриса ограничивает область с положением равновесия типа «центр».

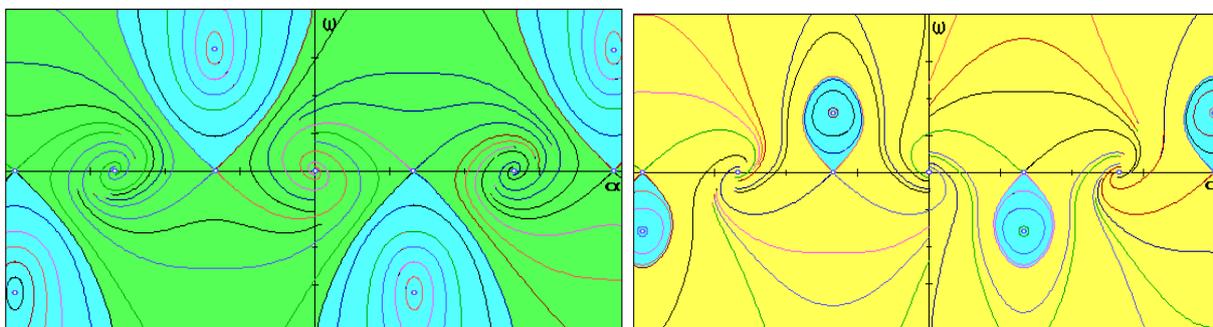


Рис.9. Ключевая сепаратриса «входит» в седло $(-\pi/2, 0)$.

Рис.10. Ключевая сепаратриса «входит» в притягивающую точку $(-\pi, 0)$.

Более того, в силу знакоопределенности почти всюду характеристической функции (4.10), сепаратрисы, имеющие в качестве ω -предельного множества бесконечно удаленные точки $(2k\pi - 0, +\infty)$ и $(-2k\pi + 0, -\infty)$, имеют в качестве α -предельных множеств точки (4.4) и (4.5) (рис.3–7).

Обозначим $b^* = \max_{\alpha} |b(\alpha)|$. Пусть $\beta_2^* = \sigma^3 b^* / I$.

Предложение 5. Для любого $M > 0$ и достаточно малого значения $\beta_2^* > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\beta_2^* < \varepsilon$ ключевая сепаратриса, выходящая из бесконечности в полосу $\Pi_{(-\pi, 0)}$, продолжится вправо вдоль оси α более чем на M .

Данное предложение следует из теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров и начальных условий.

Схема доказательства теоремы 2. Фазовый поток исследуемой системы (4.1) отображает часть прямой Λ_{-1} на прямую Λ_1 . (Здесь $\Lambda_k = \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = \pi k\}$.) Итак, рассмотрим отображение прямой Λ_{-1} на Λ_1 в силу фазовых траекторий. Для системы сравнения (4.9) с вращениями (рис.8) это отображение, по крайней мере, вблизи прямой Λ_{-1} в области (4.8) тождественно.

Предложение 6. Для системы (4.1) построенное отображение (там, где оно определено) таково:

$$(-\pi, \omega_1) \mapsto (\pi, \omega_2), \quad \omega_1 > \omega_2 > 0.$$

Продолжим доказательство теоремы 2. Имея в виду непрерывную зависимость отображения, построенного в предложении 6, от параметра β_2^* , рассмотрим при достаточно малых β_2^* зависимость типа фазового портрета от параметра β_2^* .

Предположим, что ключевая сепаратриса имеет ω -предельное множество, отстоящее от прямой Λ_{-1} вдоль оси α на $2\pi j$, $j \in N_0$. По теореме о непрерывной зависимости решений от параметров и начальных условий при уменьшении параметра β_2^* до необходимого значения (предложение 5) ключевая сепаратриса будет иметь грубое ω -предельное множество, отстоящее от прямой Λ_{-1} вдоль оси α на $2\pi(j+1)$, $j \in N_0$. Случай $j \in N_0$ рассмотрен.

Напомним, что у системы (4.1) на фазовом цилиндре существуют предельные точки (4.2) (седла), также отстоящие от прямой Λ_{-1} вдоль оси α на $2\pi j$, $j \notin N_0$.

Предложение 7. Ключевая сепаратриса может иметь в качестве ω -предельного множества седловые точки (4.2).

Доказательство. В силу гладкой зависимости ключевой сепаратрисы от параметра β_2^* , при том критическом значении параметра, при котором происходит перестройка грубого ω -предельного множества сепаратрисы (от точки $2\pi j$ к точке $2\pi(j+1)$, $j \in N_0$, см. выше), новым ω -предельным множеством станет точка (4.2), а именно седло $(2\pi j, 0)$, $j \notin N_0$. Действительно, если бы седло $(2\pi j, 0)$, $j \notin N_0$, при рассматриваемом критическом значении параметра β_2^* не было бы ω -предельным множеством для ключевой сепаратрисы, то эта сепаратриса имела бы другое грубое (точку $2\pi j$ или точку $2\pi(j+1)$, $j \in N_0$, см. выше) ω -предельное множество. Поскольку при малом шевелении грубое ω -предельное множество сохранится, мы вступаем в противоречие с тем, что критическое значение параметра β_2^* соответствует грубому ω -предельному множеству. Предложение 7 доказано (более подробно о таких системах см. [23]).

Более общее утверждение, в том числе и о строго монотонных полях, см. в [23].

Закончим схему доказательства теоремы 2. Если в качестве системы сравнения для системы (4.1) мы возьмем систему (4.9), фазовый портрет которой представлен на рис.10 (у которой ключевая сепаратриса «входит» в притягивающую точку $(-\pi, 0)$), то тем самым реализуется случай $\text{isr} = j = 0$. Схема доказательства теоремы 2 приведена полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *М.В. Шамолин.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Издательство «Экзамен», 2007, 352 с.;
M.V. Shamolin. Metody analiza dinamicheskikh sistem s peremennoi dissipatsiei v dinamike tverdogo tela. – М.: Iz-vo "Ekzamen", 2007, 352 s.
2. *М.В. Шамолин.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем., 2008, т.14, вып.3, с.3-237;
англ. пер.: *M.V. Shamolin.* Dynamical systems with variable dissipation: approaches, methods, and applications // Journal of Mathematical Sciences, 2009, 162:6, p. 741-908.
3. *Л.И. Седов.* Механика сплошной среды, т.1. – М.: Наука, 1983, 528 с.; т.2. – М.: Наука, 1984, 560 с.;
L.I. Sedov. Mekhanika sploshnoy sredy, t.1. – М.: Nauka, 1983, 528 s.; t.2. – М.: Nauka, 1984, 560 s.
4. *М.И. Гуревич.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979, 322 с.;
M.I. Gurevich. Teoriia strui idealnoi zhidkosti. – М.: Nauka, 1979, 322 s.
5. *С.А. Чаплыгин.* Избранные труды. – М.: Наука, 1976, 495 с.;
S.A. Chaplygin. Izbrannye trudy. – М.: Nauka, 1976, 495 s.
6. *В.Г. Табачников.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ, 1974, вып.1621, с.18-24.;
V.G. Tabachnikov. Statsionarnye kharakteristiki kryl'ev na malykh skorostyakh vo vsem diapazone uglov ataki // Trudu TSAGI, 1974, vyp.1621, s.18-24.
7. *В.В. Сычев, А.И. Рубан, Вик.В. Сычев, Г.Л. Королев.* Асимптотическая теория отрывных течений. – М.: Наука, 1987, 256 с.;
V.V. Sychev, A.I.Ruban, Vik.V. Sychev, G.L. Korolev. Asimptoticheskaya teoriya otrivnykh techeniy, – М.: Nauka, 1987, 256 s.
8. *Б.Я. Локишин, В.А. Привалов, В.А. Самсонов.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. – М.: МГУ, 1986, 86 с.;
B.Ya. Lokshin, V.A. Privalov, V.A. Samsonov. Vvedenie v zadachu o dvizhenii tela v soprotivlyayuscheysya srede. – М.: MGU, 1986, 86 s.
9. *С.А. Чаплыгин.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч., т.1. – Л.: Изд-во АН СССР, 1933, с.133-135;
S.A. Chaplygin. O dvizhenii tiazhelykh tel v neshzimaemoi zhidkosti // Poln. sobr. soch., t.1. – L.: Izd-vo AN SSSR, 1933, s.133-135.
10. *L. Prandtl, A. Betz.* Ergebnisse der Aerodinamischen Versuchsastalt zu Gottingen. – Berlin, 1932, 148 p.
11. *В.А. Ерошин, В.А. Самсонов, М.В. Шамолин.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Известия РАН, МЖГ, 1995, №3, с.23-27;
англ пер.: *V.A. Eroshin, V.A. Samsonov, M.V. Shamolin.* A model problem of deceleration of a body in a resisting medium with a jet flow around the body // Fluid Dynamics, 1995, **30**:3, p.351-355.
12. *В.А. Самсонов, М.В. Шамолин, В.А. Ерошин, В.М. Макаришин.* Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4396. – М.: 1995, 41 с.;
V.A. Samsonov, M.V. Shamolin, V.A. Eroshin, V.M. Makarshin. Matematicheskoe modelirovanie v zadache o tormozhenii tela v soprotivlyayuscheysya srede pri struynom obtekanii. Nauchn. otchet In-ta Mekhaniki MGU, 1995, 4396. – М.: 1995, 41 s.
13. *Г.С. Бюшгенс, Р.В. Студнев.* Динамика продольного и бокового движения. – М.: Машиностроение, 1969, 349 с.;
G.S. Byushgens, R.V. Studnev. Dinamika prodolnogo i bokovogo dvizheniya. – М.: Mashinostroyeniye, 1969, 349 s.

14. Г.С. Бюшгенс, Р.В. Студнев. Динамика самолета. Пространственное движение. – М.: Машиностроение, 1988, 320 с.;
G.S. Vyushgens, R.V. Studnev. Dinamika samoleta. Prostranstvennoe dvizheniye. – M.: Mashinostroenie, 1988, 320 s.
15. В.А. Ерошин. Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН, МЖГ, 1992, №5, с.20-30.
англ пер.: *V.A. Eroshin. Experimental investigation of an elastic cylinder entering water at high velocity // Fluid Dynamics, 1992, 27:5, p. 617-625.*
16. Ю.К. Бивин, В.В. Викторов, Л.П. Степанов. Исследование движения твердого тела в глинистой среде // Изв. АН СССР, МТТ, 1978, №2, с.159-165;
Yu.K. Bivin, V.V. Viktorov, L.P. Stepanov. Issledovanie dvizheniya tverdogo tela v glinistoy srede // Izv. AN SSSR, MTT, 1978, №2, s.159-165.
17. В.В. Трофимов, М.В. Шамолин. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем., 2010, т.16, вып.4, с.3-229;
англ. пер.: *V.V. Trofimov, M.V. Shamolin. Geometric and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems // Journal of Mathematical Sciences, 2012, 180:4, p. 365-530.*
18. Д. Эрроусмит, К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986, 243 с.;
D. Arrowsmith and C. Place. Ordinary Differential Equations. Ordinary Differential Equations. A Qualitative Approach. With Applications, Springer, London, 1983.
19. А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947;
A. Poincaré. O krivykh, opredeliaemykh differentsialnymi uravneniiami. – M.-L.: OGIZ, 1947.
20. И. Бендиксон. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // УМН, 1941, т.9;
E. Bendixon. O krivykh, opredeliaemykh differentsialnymi uravneniiami // UMN, 1941, t.9.
21. М.В. Шамолин. Моделирование движения твердого тела в сопротивляющейся среде и аналогии с вихревыми дорожками // Матем. моделирование, 2015, т.27, №1, с.33-53;
англ. пер.: *M.V. Shamolin. Simulation of Rigid Body Motion in a Resisting Medium and Analogies with Vortex Streets // Mathematical Models and Computer Simulations, 2015, v.7, №4, p.389-400.*
22. М.В. Шамолин. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика, 1992, №1, с.52-58, 112;
англ. пер.: *M.V. Shamolin. On the problem of the motion of a body in a resistant medium // Moscow University Mechanics Bulletin, 1992, 47:1, p.4-10.*
23. М.В. Шамолин. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1993, №2, с. 66-70, 113;
англ. пер.: *M.V. Shamolin. Application of the methods of topographic Poincaré systems and comparison systems to some particular systems of differential equations // Moscow University Mechanics Bulletin, 1993, 48:2, p.10-15.*