ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2016, том 470, № 3, с. 288–292

МЕХАНИКА

УДК 531.01

МНОГОМЕРНЫЙ МАЯТНИК В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

© 2016 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 05.10.2015 г.
Поступило 06.10.2015 г.

Неконсервативное силовое поле в динамике многомерного твердого тела построено согласно результатам из динамики реальных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. При этом становятся возможными обобщение уравнений движения многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного списка, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В работе показана интегрируемость в элементарных функциях совместных уравнений движения динамически симметричного закрепленного многомерного твердого тела под действием неконсервативной пары сил при наличии линейного демпфирующего момента (дополнительной зависимости силового поля от тензора угловой скорости тела).

DOI: 10.7868/S0869565216270128

Построение неконсервативного силового поля, действующего на закрепленное многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных закрепленных твердых тел, находящихся в поле силы воздействия среды. Становятся возможными изучение уравнений движения для многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил, поскольку ранее другими авторами использовалось поле сил лишь потенциальное (см., например, [1–3]).

В [4, 5] показана интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения закрепленного маятника в потоке набегающей среды при учете зависимости момента сил от угловой скорости тела, когда у системы динамических уравнений был найден в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле комплексного анализа) функцией квазискоростей. При этом все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности, которая имеет форму (одномерной) пластины. Затем [5–8] задача была обобщена на пространственный случай (сферический маятник), при этом был найден в явном виде полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части его поверхности, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. Также в дальнейшем [9–11] исследовались уравнения движения закрепленных четырехмерных твердых тел различных типов динамической симметрии, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску.

В работе показана интегрируемость в элементарных функциях совместных уравнений движения динамически симметричного закрепленного многомерного твердого тела под действием неконсервативной пары сил при наличии линейного демпфирующего момента (дополнительной зависимости силового поля от тензора угловой скорости тела).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ГРУППА ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА АЛГЕБРЕ ЛИ so(n)

Рассмотрим движение в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ однородного n-мерного твердого тела (маятника), представляющего собой $(n-1)$-мерный диск (находящийся в потоке набегающей среды, движущемся с постоянной скоростью v_∞), жестко закрепленный перпендикулярно державке в центре диска D, которая другим концом за-

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
E-mail: shamolin@rambler.ru

креплена на (обобщенном) сферическом шарнире O и сопротивления не создает. Движение маятника с динамической симметрией вида

$$I_1, I_2 = \ldots = I_n \tag{1}$$

происходит в неконсервативном поле силы $\mathbf{S}$ (воздействия среды), приложенной в точке N диска. Здесь $I_1, \ldots, I_n$ – главные моменты инерции маятника в связанной с ним системе координат $Dx_1 \ldots x_n$, при этом $OD = Dx_1$, а оси $Dx_2, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска.

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ – обобщенные сферические координаты вектора скорости $\mathbf{v}_D$ центра D диска такие, что α – угол между вектором $\mathbf{v}_D$ и прямой Dx_1. Силовое поле $\mathbf{S} = \{-S, \ldots, 0\}$ в системе $Dx_1 \ldots x_n$ представляется в виде $S = s_1(\alpha)v^2$, $v = |\mathbf{v}_D|$, $s_1 \geq 0$, $s_1(\alpha) = s(\alpha)\mathrm{sign}\cos\alpha$. Если Ω – тензор угловой скорости маятника, $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то часть уравнений движения тела, которая отвечает алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, размерность которой равна $n(n-1)/2$, имеет следующий вид [6, 9–12]:

$$\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}\Lambda + \Lambda\Omega^{\boldsymbol{\cdot}} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = \mathrm{M}, \tag{2}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + \ldots + I_n)/2, \ldots$ $\ldots, \lambda_n = (I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n)/2$, M – момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроектированный на “естественные” координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, $[\ldots]$ – коммутатор в $\mathrm{so}(n)$. Так, например, элемент $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ при $n = 5$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_{10}$ – компоненты тензора угловой скорости в проекциях на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$.

Если $N = (0, x_{2N}, \ldots, x_{nN})$ в системе $Dx_1 \ldots x_n$, то при вычислении момента силы $\mathbf{S}$ строится отображение

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathrm{so}(n), \tag{3}$$

переводящее пару векторов из $\mathbf{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$. Так, например, при $n = 5$ в проекциях на алгебру Ли $\mathrm{so}(5)$ момент силы сопротивления имеет следующий вид (ср. с [12]):

$$(0, 0, 0, -x_{5N}s(\alpha)v^2, 0, 0, x_{4N}s(\alpha)v^2, 0,$$
$$-x_{3N}s(\alpha)v^2, x_{2N}s(\alpha)v^2) \in \mathbf{R}^{10} \cong M \in \mathrm{so}(5).$$

При этом в общем случае элемент M будет иметь $(n-1)(n-2)/2$ нулевых компонент, поскольку вспомогательная матрица для построения отображения (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

и именно $(n-1)(n-2)/2$ ее миноров второго порядка со знаком, которые и определяют элемент M, тождественно равны нулю.

Уравнения (2) можно переписать в виде системы $n(n-1)/2$ уравнений. Так, в частности, при $n = 5$ система на алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$ примет вид

$$\begin{gathered}
(\lambda_4 + \lambda_5)\dot\omega_1 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_4\omega_7 + \omega_3\omega_6 + \omega_2\omega_5) = 0, \\
(\lambda_3 + \lambda_5)\dot\omega_2 + (\lambda_5 - \lambda_3)(\omega_1\omega_5 - \omega_3\omega_8 - \omega_4\omega_9) = 0, \\
(\lambda_2 + \lambda_5)\dot\omega_3 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_4\omega_{10} - \omega_2\omega_8 - \omega_1\omega_6) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_5)\dot\omega_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) = -x_{5N}S, \\
(\lambda_3 + \lambda_4)\dot\omega_5 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_7\omega_9 + \omega_6\omega_8 + \omega_1\omega_2) = 0, \\
(\lambda_2 + \lambda_4)\dot\omega_6 + (\lambda_4 - \lambda_2)(\omega_5\omega_8 - \omega_7\omega_{10} - \omega_1\omega_3) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_4)\dot\omega_7 + (\lambda_1 - \lambda_4)(\omega_1\omega_4 - \omega_6\omega_{10} - \omega_5\omega_9) = x_{4N}S, \\
(\lambda_2 + \lambda_3)\dot\omega_8 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_9\omega_{10} + \omega_5\omega_6 + \omega_2\omega_3) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_3)\dot\omega_9 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) = -x_{3N}S, \\
(\lambda_1 + \lambda_2)\dot\omega_{10} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_8\omega_9 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) = x_{2N}S.
\end{gathered} \tag{4}$$

Поскольку выполнены равенства (1), то существуют $(n-1)(n-2)/2$ циклических первых интегралов у уравнений (2):

$$\omega_{k_1} = \omega_{k_1}^0, \ldots, \omega_{k_s} = \omega_{k_s}^0, \tag{5}$$

где $s = (n-1)(n-2)/2$. При этом $k_1 = 1, 2, \ldots, k_s$ – некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$. Рассмотрим набор (5) первых интегралов на своих нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = 0, \ldots, \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{6}$$

В частности, при $n = 5$ у системы (4) имеются шесть таких первых интегралов: $\omega_1 = \omega_1^0, \omega_2 = \omega_2^0, \omega_3 = \omega_3^0,$ $\omega_5 = \omega_5^0, \omega_6 = \omega_6^0, \omega_8 = \omega_8^0$, рассматриваемых на нулевых уровнях: $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0$. Вообще говоря, ненулевых компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω остается $p = n(n-1)/2 - (n-1)(n-2)/2 = n - 1$ штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ – оставшиеся p чисел из множества W, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

ПЕРВАЯ ГРУППА КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости центра диска и набегающего потока:

$$v_D = vi_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$

$$= \Omega \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty) i_v(-\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \qquad (7)$$

$$i_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix},$$

$l = OD$, $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$ — обобщенные сферические координаты радиуса-вектора **OD** на $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$, являющейся пространством положений маятника.

ВТОРАЯ ГРУППА КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости и координаты $\xi^{\boldsymbol{\cdot}}, \eta_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, \eta_{n-2}^{\boldsymbol{\cdot}}$ фазового пространства исследуемого маятника — касательного расслоения $T\mathbf{S}^{n-1}\{\xi^{\boldsymbol{\cdot}}, \eta_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, \eta_{n-2}^{\boldsymbol{\cdot}}; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$. Они получаются из следующих двух групп соотношений. Сначала выражается набор фазовых переменных $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ через новые переменные z:

$$\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ \ldots \circ$$

$$\circ T_{n-3,n-2}(\eta_2) \circ T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной матрицы наличием минора второго порядка M_{kk+1}:

$$T_{kk+1}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{kk+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{kk+1} = \begin{pmatrix} m_{kk} & m_{kk+1} \\ m_{k+1k} & m_{k+1k+1} \end{pmatrix},$$

$$m_{kk} = m_{k+1k+1} = \cos\beta, \quad m_{k+1k} = -m_{kk+1} = \sin\beta.$$

Затем вместо переменных z подставляются следующие зависимости:

$$z_{n-1} = \xi^{\boldsymbol{\cdot}}, \quad z_{n-2} = -\eta_1^{\boldsymbol{\cdot}} \frac{\sin\xi}{\cos\xi},$$

$$z_{n-3} = \eta_2^{\boldsymbol{\cdot}} \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1, \ldots$$

$$\ldots, z_1 = (-1)^n \eta_{n-2}^{\boldsymbol{\cdot}} \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3}. \qquad (9)$$

ДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПРИВЕДЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Введем зависимость функций координат точки N приложения силы **S** от тензора угловой скорости Ω. Выберем функции $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ в следующем виде (гиперплоскость диска задается уравнением $x_{1N} = 0$):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \ldots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = Q - \frac{1}{v}\Omega \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \ldots \\ h_n \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где Q — вектор-функция, не зависящая от тензора угловой скорости, $h_1, h_2 = \ldots = h_n > 0$. При этом следует учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты в $\mathbf{R}^n$, то

$$Q = R(\alpha) i_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),$$
$$i_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = i_v(\pi/2, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),$$

при этом вектор $i_v(\pi/2, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ определен выше.

Для построения силового поля используется пара функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии с маломерными случаями, без ограничения общности [5] можно считать, что

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \ A > 0, \ s(\alpha) = B\cos\alpha, \ B > 0 \qquad (11)$$

(функции типа Чаплыгина [13]).

Т е о р е м а 1. *Совместные уравнения* (2), (7)–(9) *при выполнении условий* (5), (6), (10), (11) *редуцируются к динамической системе* (12) *на касательном расслоении* $T\mathbf{S}^{n-1}\{\xi^{\boldsymbol{\cdot}}, \eta_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, \eta_{n-2}^{\boldsymbol{\cdot}}; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$ $(n-1)$*-мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$.

Если ввести безразмерные параметры и дифференцирование: $b_* = ln_0$, $H_{1*} = \dfrac{Bh_2}{(n-2)I_2 n_0}$, $\langle {}^{\boldsymbol{\cdot}} \rangle \to n_0 v_\infty \langle {}' \rangle$, $n_0^2 = \dfrac{AB}{(n-2)I_2}$, то полученная система будет иметь вид

$$
\begin{gathered}
\xi^{\cdot\cdot} + (b_* - H_{1*})\xi^{\cdot}\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \\
- [\eta_1^{\cdot 2} + \eta_2^{\cdot 2}\sin^2\eta_1 + \eta_3^{\cdot 2}\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 + \ldots \\
\ldots + \eta_{n-2}^{\cdot 2}\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\
\eta_1^{\cdot\cdot} + (b_* - H_{1*})\eta_1^{\cdot}\cos\xi + \xi^{\cdot}\eta_1^{\cdot}\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] - \\
- [\eta_2^{\cdot 2} + \eta_3^{\cdot 2}\sin^2\eta_2 + \eta_4^{\cdot 2}\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 + \ldots \\
\ldots + \eta_{n-2}^{\cdot 2}\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\
\eta_2^{\cdot\cdot} + (b_* - H_{1*})\eta_2^{\cdot}\cos\xi + \\
+ \xi^{\cdot}\eta_2^{\cdot}\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] + 2\eta_1^{\cdot}\eta_2^{\cdot}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \\
- [\eta_3^{\cdot 2} + \eta_4^{\cdot 2}\sin^2\eta_3 + \eta_5^{\cdot 2}\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots \\
\ldots + \eta_{n-2}^{\cdot 2}\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\
\eta_3^{\cdot\cdot} + (b_* - H_{1*})\eta_3^{\cdot}\cos\xi + \xi^{\cdot}\eta_3^{\cdot}\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] + \\
+ 2\eta_1^{\cdot}\eta_3^{\cdot}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\eta_2^{\cdot}\eta_3^{\cdot}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - \\
-[\eta_4^{\cdot 2} + \eta_5^{\cdot 2}\sin^2\eta_4 + \eta_6^{\cdot 2}\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5 + \ldots \\
\ldots + \eta_{n-2}^{\cdot 2}\sin^2\eta_4\ldots\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_3\cos\eta_3 = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_{n-4}^{\cdot\cdot} + (b_* - H_{1*})\eta_{n-4}^{\cdot}\cos\xi + \xi^{\cdot}\eta_{n-4}^{\cdot}\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] + \\
+ 2\eta_1^{\cdot}\eta_{n-4}^{\cdot}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-5}^{\cdot}\eta_{n-4}^{\cdot}\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}} - \\
- [\eta_{n-3}^{\cdot 2} + \eta_{n-2}^{\cdot 2}\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4} = 0, \\
\eta_{n-3}^{\cdot\cdot} + (b_* - H_{1*})\eta_{n-3}^{\cdot}\cos\xi + \xi^{\cdot}\eta_{n-3}^{\cdot}\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] + \\
+ 2\eta_1^{\cdot}\eta_{n-3}^{\cdot}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-4}^{\cdot}\eta_{n-3}^{\cdot}\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} - \\
- \eta_{n-2}^{\cdot 2}\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0, \\
\eta_{n-2}^{\cdot\cdot} + (b_* - H_{1*})\eta_{n-2}^{\cdot}\cos\xi + \xi^{\cdot}\eta_{n-2}^{\cdot}\left[\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}\right] + \\
+ 2\eta_1^{\cdot}\eta_{n-2}^{\cdot}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-3}^{\cdot}\eta_{n-2}^{\cdot}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

В переменных же w

$$
\begin{gathered}
w_1 = -z_{n-2}/\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}, \ldots \\
\ldots, w_{n-4} = -z_3/\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad w_{n-3} = z_2/z_1, \\
w_{n-2} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}/[n_0 v_\infty(1 + b_* H_{1*})], \\
w_{n-1} = -[z_{n-1} + n_0 v_\infty b_* \sin\xi]/[n_0 v_\infty(1 + b_* H_{1*})],
\end{gathered}
\tag{13}
$$

система (12) примет вид

$$
\begin{gathered}
\xi^{\cdot} = -(1 + b_* H_{1*})w_{n-1} - b_*\sin\xi, \\
w_{n-1}^{\cdot} = \sin\xi\cos\xi - (1 + b_* H_{1*})\times \\
\times w_{n-2}^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*}w_{n-1}\cos\xi, \\
w_{n-2}^{\cdot} = (1 + b_* H_{1*})w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + H_{1*}w_{n-2}\cos\xi,
\end{gathered}
\tag{14}
$$

$$
w_k^{\cdot} = d_k\frac{1 + w_k^2}{w_k}\frac{\cos\eta_k}{\sin\eta_k}, \quad \eta_k^{\cdot} = d_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-3,
\tag{15}
$$

$$
\eta_{n-2}^{\cdot} = (-1)^n(1 + b_* H_{1*})Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}},
\tag{16}
$$

где $Z_1(w_1, \ldots, w_{n-1}) = z_1$ в силу замены (13), d_k, $k = 1, 2, \ldots, n-3$, – некоторые гладкие функции на своей области определения.

Система (14)–(16) возникает в динамике свободного многомерного твердого тела [12]. Таким образом, получена аналогия между движением тел свободного и закрепленного в многомерном пространстве. При этом квазискоростям тела свободного соответствуют позиционные координаты $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}$ тела закрепленного (см. также [6]).

Видно, что система (14)–(16) порядка $2(n-1)$ распадается на совокупность независимых подсистем: система (14) – третьего порядка, $n-3$ системы (15) (после замены независимого переменного) – второго, при этом система (14), (15) – независимая подсистема порядка $2n-3$ (уравнение (16) отделяется).

Таким образом, для полного интегрирования системы (14)–(16) достаточно знать два независимых первых интеграла системы (14), $n-3$ независимых первых интеграла для совокупности систем (15), а также одно инвариантное соотношение, "привязывающее" уравнение (16).

ПОЛНЫЙ СПИСОК ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Один из трансцендентных первых интегралов [14] системы (14) имеет вид

$$
\frac{(1 + b_* H_{1*})(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) + (b_* + H_{1*})w_{n-1}\sin\xi + \sin^2\xi}{w_{n-2}\sin\xi} = C_1 = \mathrm{const}.
\tag{17}
$$

И второй трансцендентный интеграл, имеющий громоздкий вид, выражается через конечную комбинацию элементарных функций и имеет следующий структурный вид:

$$G\left(\sin\xi, \frac{w_{n-1}}{\sin\xi}, \frac{w_{n-2}}{\sin\xi}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{18}$$

Далее, распавшиеся системы (15) имеют $n-3$ независимых первых интеграла

$$\frac{\sqrt{1+w_k^2}}{\sin\eta_k} = C_{k+2} = \text{const}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-3, \tag{19}$$

а первый интеграл, "привязывающий" уравнение (16) на угол η_{n-2}, найдется из уравнения

$$\frac{d\eta_{n-2}}{d\eta_{n-3}} = -\frac{1}{w_{n-3}\sin\eta_{n-3}},$$

при этом, используя первые интегралы (19) при $k = n-4$, $n-3$, окончательно получим его вид:

$$\operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3} - C_{n-1}^2}} \pm \eta_{n-2} = C_n = \text{const}. \tag{20}$$

Теорема 2 (основная). *Совместные уравнения* (2), (7)–(9) *движения n-мерного маятника при условиях* (1), (5), (6), (10), (11) *обладают полным списком инвариантных соотношений*, $(n-1)(n-2)/2$ *из которых* (*а именно,* (5)) *являются аналитическими функциями*, *а остальные* n (*а именно*, (17)–(20)) – *трансцендентными функциями своих переменных* (*после их формального продолжения в комплексную область*), *выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

В работах автора [9–12] уже рассматривались задачи о движении свободного многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы. Данная работа открывает новый цикл работ по интегрированию закрепленного многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете зависимости момента сил от тензора угловой скорости тела, поскольку ранее, как уже указывалось (см., например, [1–3]), рассматривались лишь такие движения тела, когда поле внешних сил было потенциальным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15–01–00848-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Манаков С.В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функцион. анализ и его прил. 1976. Т. 10. № 4. С. 93–94.
2. *Веселов А.П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на so(4) // ДАН. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298–1300.
3. *Богоявленский О.И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105–1108.
4. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 3. С. 51–54; 105.
5. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 256 с.
6. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2013. Т. 125. С. 5–254.
7. *Шамолин М.В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // ДАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
8. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // ДАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
9. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // ДАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.
10. *Шамолин М.В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // ДАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
11. *Шамолин М.В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // ДАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
12. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // ДАН. 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.
13. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости. В кн.: Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.
14. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.