УДК 531.01

Первые интегралы динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела

М. В. Шамолин

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация: Изучаются вопросы наличия трансцендентных первых интегралов для классов механических систем с симметриями. При этом получены достаточные условия наличия в неавтономных однородных системах второго порядка первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями, как в смысле теории элементарных функций, так и в смысле комплексного анализа, и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость в трансцендентных функциях

1. Пример системы на касательном расслоении к сфере

Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$
\begin{aligned}
&\ddot\theta + b\dot\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta - \dot\psi^2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0,\\
&\ddot\psi + b\dot\psi\cos\theta + \dot\theta\dot\psi\left[\frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right] = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\theta,\psi\}$. Данная система описывает сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды (см. также [1]). При этом в системе присутствует консервативный момент $\sin\theta\cos\theta$, а также момент силы, линейным образом зависящий от скорости с переменным коэффициентом: $b\begin{pmatrix}\dot\theta\\ \dot\psi\end{pmatrix}\cos\theta$.

Оставшиеся коэффициенты в уравнениях являются коэффициентами связности, а именно:

$$\Gamma^\theta_{\psi\psi} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \Gamma^\psi_{\theta\psi} = \frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}.$$

Система (1) фактически имеет порядок 3, поскольку переменная ψ является циклической, при этом в систему входит лишь производная $\dot\psi$.

Система (1) эквивалентна следующей системе:

$$\tag{2} \begin{gathered} \dot\theta = -z_2 - b\sin\theta,\ \dot z_2 = \sin\theta\cos\theta - z_1^2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \\ \dot z_1 = z_1 z_2\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \dot\psi = z_1\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{gathered}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \theta, \psi\}$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\theta, \psi\}$.

Отделение четвертого уравнения системы (2) произошло по причине цикличности переменной ψ.

Системе (2) сопоставим систему с алгебраической правой частью ($\tau = \sin\alpha$):

$$\tag{3} \frac{dz_2}{d\tau} = \frac{\tau - z_1^2/\tau}{-z_2 - b\tau},\ \tau\frac{dz_1}{d\tau} = \frac{z_1 z_2/\tau}{-z_2 - b\tau}.$$

После же перехода к однородным координатам u_k, $k = 1, 2$, по формулам $z_k = u_k\tau$ система (2) приводится к виду

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{\tau - u_1^2\tau}{-u_2\tau - b\tau},\ \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{u_1 u_2\tau}{-u_2\tau - b\tau},$$

который, в свою очередь, соответствует уравнению

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 + bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 + bu_1}.$$

Данное уравнение интегрируется в элементарных функциях, поскольку интегрируется тождество

$$d\left(\frac{1 - bu_2 + u_2^2}{u_1}\right) + du_1 = 0,$$

и имеет в координатах (α, z_1, z_2) первый интеграл следующего вида (ср. с [1, 2]):

$$\frac{z_1^2 + z_2^2 - bz_2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{z_1\sin\alpha} = \text{const}.$$

2. Неавтономные однородные системы второго порядка

В работе исследуются возможности интегрирования в элементарных функциях следующей системы более общего вида, включающей в себя рассмотренную выше систему (3), в трехмерных фазовых областях:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz}{dx} = \frac{ax + by + cz + c_1 z^2/x + c_2 zy/x + c_3 y^2/x}{d_1 x + ey + fz}, \\
(4) \qquad &\frac{dy}{dx} = \frac{gx + hy + iz + i_1 z^2/x + i_2 zy/x + i_3 y^2/x}{d_1 x + ey + fz},
\end{aligned}
$$

имеющей особенность типа $1/x$.

Другими словами, изучается вопрос существования первых интегралов для класса неавтономных однородных систем второго порядка. Ранее уже был получен ряд результатов по данному вопросу (см. также [2, 3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15–01–00848–а).

Список литературы

1. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
2. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.
3. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.

First integrals of variable dissipation dynamical systems in rigid body dynamics

M. V. Shamolin

M. V. Lomonosov Moscow State University, Russia

We study the problems of existence of transcendental first integrals for the classes of mechanical systems with certain symmetries. Herewith, we find the sufficient conditions of existence the first integrals which are transcendental functions both in sense of theory of elementary functions and complex analysis, and expressed in terms of finite combination of elementary functions, for the nonautonomous uniform second-order systems.