ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2016, том 52, № 6, с. 743–759

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ

© 2016 г. М. В. Шамолин

Предъявляется класс неконсервативных систем дифференциальных уравнений на касательном расслоении к сфере любой конечной размерности. Данный класс обладает полным набором первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Большая часть полученных первых интегралов состоит из трансцендентных функций своих фазовых переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда функции имеют существенно особые точки.

DOI: 10.1134/S0374064116060030

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В работах [1–3] доказана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у редуцированной системы динамических уравнений

$$\alpha' = -\omega + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b\omega^2\sin\alpha,$$

$$\omega' = \sin\alpha\cos\alpha - b\omega\sin^2\alpha\cos\alpha + b\omega^3\cos\alpha, \quad b>0,$$

на двумерном цилиндре (касательном расслоении одномерной сферы) $\{(\alpha,\omega)\in\mathbf{R}^2\colon\ \alpha \mod 2\pi\}$ существует первый интеграл $\Phi(\alpha,\omega)=C=\mathrm{const}$, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей, выражающейся через конечную комбинацию элементарных функций. Тогда всё взаимодействие среды с телом моделировалось на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Далее в работах [4–8] плоская задача была обобщена на пространственный (трёхмерный) случай, при этом у соответствующей редуцированной системы динамических уравнений на касательном расслоении к двумерной сфере существует полный набор трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Здесь уже всё взаимодействие среды с телом моделировалось на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной работе результаты относятся к случаю, когда всё взаимодействие среды с телом моделируется на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, перпендикулярном данному диску.

2. БОЛЕЕ ОБЩАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ СО СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

2.1. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного твёрдого тела с “передним торцом” ($(n-1)$-мерным диском, “взаимодействующим со средой, заполняющей n-мерное пространство”) в поле силы $\mathbf{S}$ сопротивления в условиях квазистационарности [9, с. 133–135; 10, с. ??]. Пусть $(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})$ – (обобщённые) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твёрдого тела (D – центр $(n-1)$-мерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), Ω – тензор угловой скорости тела, $Dx_1\ldots x_n$ – система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C – центр масс), а оси $Dx_2, Dx_3, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1,\ I_2,\ I_3 = I_2,\ \ldots,\ I_n = I_2,\ m$ – инерционно-массовые характеристики.

Введём следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1\ldots x_n$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, \ldots, 0\},\ \mathbf{v}_D = v\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{1}$$

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

– единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$. При этом примем также разложение для функции воздействия среды на n-мерное тело

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, \ldots, 0\}, \tag{3}$$

т.е. в данном случае внешняя сила $\mathbf{F} = \mathbf{S}$. Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbf{R}^n$, при этом касательные силы воздействия среды на $(n-1)$-мерный диск отсутствуют:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{4}$$

где $\mathbf{w}_C$ – ускорение центра масс, $\mathbf{F}$ – сумма всех сил, действующих на тело.

Вспомогательная матрица для вычисления момента силы сопротивления (приложенной в точке N) примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствует алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$ [11–14]:

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M_F, \tag{6}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{7}$$

$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + \ldots + I_n}{2},\ \ldots,$$

$$\lambda_{n-1} = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-2} - I_{n-1} + I_n}{2}, \quad \lambda_n = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n}{2},$$

$M = M_F$ – момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, $[.,.]$ – коммутатор в $\mathrm{so}(n)$.

Если обобщённые силы не зависят от положения тела в пространстве, то фазовое пространство совместной замкнутой системы (4), (6) в этом случае является пространством

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^{n-1} \times \mathrm{so}(n). \tag{8}$$

2.2. Следствия динамической симметрии. Рассматриваемая система (4), (6) в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \ldots = I_n \tag{9}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \mathrm{const}, \ \ldots, \quad \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \mathrm{const}, \quad s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{10}$$

При этом $k_1 = \overline{1, k_s}$ – некоторые s неповторяющихся чисел из множества

$$W_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}.$$

Рассмотрим набор (10) первых интегралов на своих нулевых уровнях

$$\omega_{k_1}^0 = \ldots = \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{11}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось

$$p = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1$$

штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ – оставшиеся p чисел из множества W_1, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

2.3. Выбор следящей силы и новые квазискорости в системе. Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во всё время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ – скорость центра масс, см. также [15])

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathrm{const}, \tag{12}$$

то в рассматриваемую систему (4), (6) вместо обобщённых сил $\mathbf{F}$ должна входить величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил (см. также [16–19])

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \tag{13}$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{14}$$

Этот выбор величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка в рассматриваемой системе (4), (6) после некоторого преобразования.

Укажем достаточное условие такого отделения. Пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) =$$
$$= \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \le j}}^{n-1} \tau_{i,j}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\omega_{r_i}\omega_{r_j} = T_1\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)v^2, \quad \omega_0 = v. \tag{15}$$

Введём новые квазискорости. Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции следующих $n-2$ поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = \overline{1, n-2}$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \mathrm{diag}(1, \ldots, M_{k,k+1}, \ldots, 1), \tag{17}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\beta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\beta.$$

2.4. Редукции в системе и системы нормального вида. Динамическую часть уравнений движения в случаях (9)–(11), (15) можно записать в виде (см. также [20–23])

$$\dot v+\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\cos\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$

$$=\frac{T_1(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)v^2-s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha, \tag{18}$$

$$\dot\alpha v+z_{n-1}v-\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\sin\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$

$$=\frac{s(\alpha)v^2-T_1(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)v^2}{m}\sin\alpha, \tag{19}$$

$$\dot\beta_1\sin\alpha-z_{n-2}\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0, \tag{20}$$

$$\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1+z_{n-3}\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0,\ \ldots, \tag{21}$$

$$\dot\beta_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}+(-1)^nz_1\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0, \tag{22}$$

$$\dot\omega_{r_1}=(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{23}$$

$$\dot\omega_{r_2}=(-1)^{n+1}\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{(n-1)N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\ \ldots, \tag{24}$$

$$\dot\omega_{r_{n-1}}=\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha). \tag{25}$$

Здесь введены следующие функции:

$$\begin{gathered}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf r_N,\mathbf i_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),\\ \Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf r_N,\mathbf i_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),\ \ldots,\\ \Delta_{v,n-3}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf r_N,\mathbf i_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-3}+\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}\right)\right),\\ \Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf r_N,\mathbf i_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}+\frac{\pi}{2}\right)\right),\end{gathered} \tag{26}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ представляется в виде

$$\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=|\mathbf r_N|=(\mathbf r_N,\mathbf i_N(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}))=$$

$$=0\cos\frac{\pi}{2}+\sum_{s=2}^{n}x_{sN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)i_{sN}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}). \tag{27}$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})$, $s=\overline{1,n}$ ($i_{1N}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\equiv 0$), – компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N=\{0,x_{2N},\ldots,x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha=\pi/2$ – экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$.

Таким образом, по-прежнему

$$\mathbf{i}_N(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=\mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\right), \tag{28}$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})$ определяется равенством (2).

Зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ по-прежнему понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ в силу равенств (16).

Далее с помощью новых безразмерных фазовых переменных и дифференцирования

$$z_k=n_1vZ_k,\quad k=\overline{1,n-1},\quad \langle\cdot\rangle=n_1v\langle'\rangle,\quad n_1>0,\quad n_1=\mathrm{const}, \tag{29}$$

систему (18)–(25) приведём к следующему виду:

$$v'=v\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \tag{30}$$

$$\alpha'=-Z_{n-1}+\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-$$
$$-\frac{T_1(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-s(\alpha)}{mn_1}\sin\alpha, \tag{31}$$

$$Z'_{n-1}=\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^sZ_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\right\}-$$
$$-Z_{n-1}\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \tag{32}$$

$$Z'_{n-2}=Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\left(\sum_{s=1}^{n-3}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{Z_{n-1}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}-$$
$$-\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-Z_{n-2}\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \tag{33}$$

$$Z'_{n-3}=Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\left(\sum_{s=1}^{n-4}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\left[-Z_{n-1}+Z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^sZ_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}+$$

$$+\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-Z_{n-3}\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z),\ \ldots, \tag{34}$$

$$Z_1'=Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$

$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s}Z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$

$$+(-1)^n\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\Delta_{v,n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-Z_1\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \tag{35}$$

$$\beta_1'=Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z), \tag{36}$$

$$\beta_2'=-Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z),\ \ldots, \tag{37}$$

$$\beta_{n-2}'=(-1)^{n+1}Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}+$$

$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}\Delta_{v,n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z), \tag{38}$$

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z)=-\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha+$$

$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)+\frac{T_1(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \tag{39}$$

Очевидно, что в системе (30)–(38) порядка $2(n-1)+1$ может быть выделена независимая подсистема (31)–(38) порядка $2(n-1)$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своём $2(n-1)$-мерном фазовом пространстве – касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$.

В частности, при выполнении условия (14) указанный приём выделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ также возможен.

Зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ (и далее от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z_1,\ldots,n_1Z_{n-1})$) в силу соотношений (16) и (29).

2.5. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (31)–(38) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)$, $s=\overline{1,n-2}$, входят линейным образом (и всегда их ровно $n-2$). Так, например, в уравнении (32) (с левой частью Z_{n-1}') функции (26) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1,2,3,4,\ldots,n-2. \tag{40}$$

В уравнениях (33)–(35) появление набора функций (26) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для Z_{n-2}' по-прежнему входит набор функций (26) с индексами (40). В уравнение для Z_{n-3}' входит уже набор с индексами

$$2,2,3,4,\ldots,n-2, \tag{41}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)$ уже повторяется дважды.

Общее распределение индексов даётся следующей таблицей.

Общее распределение индексов набора функций (26)

Левая часть (31)–(38)	Распределение индексов s набора функций (26)					
Z'_{n-2}	1	2	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-3}	2	2	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-4}	3	3	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-5}	4	4	4	4	...	$n-2$
...	...	...	...	...	...	...
Z'_1	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	...	$n-2$

Так минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы соответствует случаю $n=3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (26) (при $s=1$). Там же минор второго порядка $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ соответствует случаю $n=4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (26) (при $s=1,2$). Там же минор третьего порядка $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$ соответствует случаю $n=5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (31)–(38) функций (26) (при $s=1,2,3$) и т.д.

3. СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

3.1. Приведённая система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [9; 10, с. ??], используя соотношения (2), (28), динамические функции s, $x_{2N},\ldots,x_{nN}$ возьмём в виде

$$s(\alpha)=B\cos\alpha,\quad \mathbf{r}_N=R(\alpha)\mathbf{i}_N,\quad R(\alpha)=A\sin\alpha,\quad A,B>0, \tag{42}$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе (4), (6) отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}$).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)$, $\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)$, $s=\overline{1,n-2}$, входящие в систему (30)–(38), примут вид

$$\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)=R(\alpha)=A\sin\alpha,\quad \Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\equiv 0,\quad s=\overline{1,n-2}. \tag{43}$$

Тогда в силу условий (12), (42) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (30)–(38)) примет вид аналитической системы

$$v'=v\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \tag{44}$$

$$\alpha'=-Z_{n-1}+b\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{45}$$

$$Z'_{n-1}=\sin\alpha\cos\alpha-\left(\sum_{s=1}^{n-2}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{46}$$

$$Z'_{n-2}=Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\left(\sum_{s=1}^{n-3}Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1}Z_s^2\right)\cos\alpha-bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{47}$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$

$$+ bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha, \ \ldots, \tag{48}$$

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{49}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{50}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \ \ldots, \tag{51}$$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{52}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{53}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad n_1 = n_0. \tag{54}$$

Итак, система (44)–(53) может быть рассмотрена на своём фазовом $(2(n-1)+1)$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}^1_+\{v\} \times T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;$$

$$0 \le \alpha \le \pi,\ 0 \le \beta_1 \le \pi, \ldots,\ 0 \le \beta_{n-3} \le \pi,\ 0 \le \beta_{n-2} < 2\pi\}, \tag{55}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$-мерной сфере.

Очевидно, что в системе (44)–(53) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (45)–(53) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (45)–(53) порядка $2(n-1)$ образовалась ещё одна независимая система (45)–(52) порядка $2n-3$ на своём $(2n-3)$-мерном многообразии. Итак, доказана

Теорема 1. *Общая система динамических уравнений (4), (6) при условиях (12), (10), (11) редуцируется к динамической системе (31)–(38) на касательном расслоении*

$$T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$$

$(n-1)$*-мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. *В частности, при условии (42) выделяется система (45)–(53).*

3.2. Об аналитическом первом интеграле. В силу условия (12) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (18)–(25) (при условии (14)), а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1,\ldots,z_{n-1}) = v^2 + \sigma^2(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2) - 2\sigma z_{n-1}v\sin\alpha = V_C^2 \tag{56}$$

постоянна на её фазовых траекториях (величины $z_1,\ldots,z_{n-1}$ выбираются в силу соотношений (16)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (44)–(53) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = v^2(1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \tag{57}$$

постоянна на её фазовых траекториях.

Равенство (57) позволяет, не решая системы (44)–(53), найти зависимость скорости характерной точки твёрдого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha}. \tag{58}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (44)–(53) существуют асимптотические предельные множества, то равенство (57) задаёт единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (44)–(53) во всём фазовом пространстве (ср. с [24–29]).

Таким образом, в силу отделения уравнения на величину v, а также наличия аналитического первого интеграла (57) система (45)–(53) может быть рассмотрена самостоятельно на своём фазовом пространстве.

3.3. Общие замечания об интегрируемости системы при любом конечном n. Для полного интегрирования системы (45)–(53) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют уменьшить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем [30–32].

Система при наличии консервативного силового поля. Теперь рассмотрим систему (45)–(53) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ при условии $b = 0$, за исключением слагаемых, содержащих $\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2$. При этом получим консервативную систему. А именно наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (46). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha, \tag{59}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{60}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{61}$$

$$\begin{gathered} Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha,\ \ldots, \end{gathered} \tag{62}$$

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{63}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{64}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\ \ldots, \tag{65}$$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-4}}, \tag{66}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}}, \tag{67}$$

при этом во вспомогательном уравнении (44) для величины v следует выбрать функцию

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2)\cos\alpha.$$

Итак, система (59)–(67) описывает движение твёрдого тела в консервативном внешнем поле сил (см. также [33, 34]).

Теорема 2. *Система (59)–(67) обладает n независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2 + \sin^2\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{68}$$

$$\Phi_2(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{69}$$

$$\Phi_3(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const},\ \ldots, \tag{70}$$

$$\Phi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \mathrm{const}, \tag{71}$$

$$\Phi_{n-1}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2 Z_1 \sin\alpha\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}, \tag{72}$$

$$\Phi_n(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}\,. \tag{73}$$

Замечание 1. Поскольку в первые интегралы (68)–(73), вообще говоря, входит величина v, то либо её в этих соотношениях следует выразить в соответствии с равенством (58), либо вместе с системой (59)–(67) использовать вспомогательное уравнение (44).

Первый интеграл (68) является интегралом полной энергии. Последний первый интеграл (73) имеет кинематический смысл, “привязывает” уравнение на β_{n-2} и может быть найден из следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{Z_1}{Z_2}\,\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}, \tag{74}$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (71), (72), получив равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\left(\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\beta_{n-3} - 1\right)^{1/2}, \tag{75}$$

то решение уравнения (74) примет вид

$$\beta_{n-2} = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\left(\left(\dfrac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2} - 1\right) - \dfrac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}u^2\right)^{1/2}}, \quad u = \cos\beta_{n-3}. \tag{76}$$

После интегрирования получаем равенство

$$\beta_{n-2} + C_n = \pm\mathrm{arctg}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\left(\dfrac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\beta_{n-3} - 1\right)^{1/2}}, \quad C_n = \mathrm{const}, \tag{77}$$

позволяющее получить первый интеграл (73). Преобразуя равенство (77), получаем следующее инвариантное соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(\beta_{n-2}+C_n)=\frac{C_{n-1}^2}{(C_{n-2}^2-C_{n-1}^2)\operatorname{tg}^2\beta_{n-3}-C_{n-1}^2}. \tag{78}$$

Теперь переформулируем теорему 2.

Теорема 3. *Система (59)–(67) обладает* n *независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=\frac{\Phi_1}{\Phi_2}=\frac{Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2+\sin^2\alpha}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\alpha}=C_1'=\mathrm{const}, \tag{79}$$

$$\Psi_2(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=C_2'=\mathrm{const}, \tag{80}$$

$$\Psi_3(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=\frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}}=\frac{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}}{Z_1\sin\beta_{n-3}}=C_3'=\mathrm{const},\ \ldots, \tag{81}$$

$$\Psi_{n-2}(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=\frac{\Phi_3}{\Phi_4}=\frac{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2}\sin\beta_2}=C_{n-2}'=\mathrm{const}, \tag{82}$$

$$\Psi_{n-1}(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=\frac{\Phi_2}{\Phi_3}=\frac{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\sin\beta_1}=C_{n-1}'=\mathrm{const}, \tag{83}$$

$$\Psi_n(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=C_n'=\mathrm{const}\,. \tag{84}$$

Замечание 2. Поскольку в первые интегралы (79)–(84), вообще говоря, входит величина v, то либо её в этих соотношениях следует выразить в соответствии с равенством (58), либо вместе с системой (59)–(67) использовать вспомогательное уравнение (44).

Функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 3 (в отличие от теоремы 2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (79)–(84) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 3 преобразованный набор первых интегралов (79)–(84) системы (59)–(67) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остаётся набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (59)–(67) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix}Z_{n-1}\\Z_{n-2}\\\cdots\\Z_2\\Z_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w_{n-1}\\w_{n-2}\\\cdots\\w_2\\w_1\end{pmatrix},$$

$$w_{n-1}=Z_{n-1},\quad w_{n-2}=\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2},\quad w_{n-3}=\frac{Z_2}{Z_1},\quad w_{n-4}=\frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}},\ \ldots, \tag{85}$$

$$w_2=\frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2}},\quad w_1=\frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}},$$

система (59)–(67) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha, \tag{86}$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha, \tag{87}$$

$$w'_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha, \tag{88}$$

$$\begin{gathered} w'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \quad s = \overline{1,n-3}, \end{gathered} \tag{89}$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{90}$$

$$\begin{gathered} d_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = Z_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = -Z_{n-3}(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \ \ldots, \\ d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = (-1)^{n+1}Z_1(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \end{gathered} \tag{91}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_{n-1},\ldots,w_1), \quad k = \overline{1,n-2}, \tag{92}$$

– функции в силу замены (85).

Очевидно, что система (86)–(90) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (86)–(88) третьего, а системы (89) (конечно, после замены независимого переменного) второго порядка. Таким образом, для полной интегрируемости системы (86)–(90) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (86)–(88), по одному для систем (89) (всего $n-3$), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (90) (*т.е. всего* n).

Замечание 3. Запишем первые интегралы (79)–(84) в переменных $w_1,\ldots,w_{n-1}$ с учётом равенств (85)

$$\Theta_1(v;w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2 + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{93}$$

$$\Theta_2(v;w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = w_{n-2}\sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{94}$$

$$\Theta_{s+2}(v;w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \quad s = \overline{1,n-3}, \tag{95}$$

$$\Theta_n(v;w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C''_n = \text{const}. \tag{96}$$

Замечание 4. Поскольку в первые интегралы (93)–(96), вообще говоря, входит величина v, то либо её в этих соотношениях следует выразить в соответствии с равенством (58), либо вместе с системой (86)–(90) использовать вспомогательное уравнение (44).

Таким образом, два независимых первых интеграла (93), (94) достаточны для интегрирования системы (86)–(88), первые интегралы (95) (их $n-3$) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = \overline{1,n-3}, \tag{97}$$

эквивалентных после замены независимого переменного соответственно системам (89), и наконец, первый интеграл (96) достаточен для “привязывания” уравнения (90). Доказана

Теорема 4. *Система (59)–(67) порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

3.4. Полный список первых интегралов при любом конечном n. Перейдём теперь к интегрированию системы (45)–(53) порядка $2(n-1)$ (без всяких упрощений при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом для полного интегрирования системы (45)–(53) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (85) система (45)–(53) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{98}$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{99}$$

$$w'_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{100}$$

$$\begin{gathered} w'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \quad s = \overline{1, n-3}, \end{gathered} \tag{101}$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{102}$$

где выполнены условия (91).

Очевидно, что система (98)–(102) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (98)–(100) третьего, а системы (101) (конечно, после замены независимого переменного) второго порядка. Таким образом, для полной интегрируемости системы (98)–(102) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (98)–(100), по одному для систем (101) (всего $n-3$), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (102) (*т.е. всего* n).

Сначала независимой подсистеме третьего порядка (98)–(100) поставим в соответствие неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered} \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}, \\ \frac{dw_{n-2}}{d\alpha} = \frac{bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + w_{n-1}w_{n-1}\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}. \end{gathered} \tag{103}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, систему (103) запишем в алгебраическом виде

$$\begin{gathered} \frac{dw_{n-1}}{d\tau} = \frac{\tau + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-1}\tau^2 - w_{n-1}^2/\tau}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-1}^2 + w_{n-1}^2)}, \\ \frac{dw_{n-1}}{d\tau} = \frac{bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-2}\tau^2 + w_{n-2}w_{n-1}/\tau}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)}. \end{gathered} \tag{104}$$

Далее, вводя однородные переменные равенствами

$$w_{n-2} = u_1\tau, \quad w_{n-1} = u_2\tau, \tag{105}$$

приводим систему (104) к виду

$$\begin{gathered} \tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}. \end{gathered} \tag{106}$$

Системе второго порядка (106) поставим в соответствие неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{107}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{108}$$

Итак, уравнение (107) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{109}$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{110}$$

Замечание 5. При $b = 0$ первый интеграл (110) системы (98)–(100) совпадает с первым интегралом (93) системы (86)–(88), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (110), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (98)–(100) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель, и знаменатель выражения (110) являются первыми интегралами системы (86)–(88)).

Далее, будем искать дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (98)–(100). Для этого преобразуем инвариантное соотношение (109) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{111}$$

Очевидно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geq 0 \tag{112}$$

и фазовое пространство системы (98)–(100) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (111).

Таким образом, в силу соотношения (109) первое уравнение системы (106) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \tag{113}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\}, \tag{114}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (112), или вид уравнения Бернулли

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \tag{115}$$

Уравнение (115) (с помощью равенства (114)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{116}$$

Последнее означает, что может быть найден ещё один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения

(116) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные преобразования здесь приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (116), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет решение

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1-(u_2-1)^2} \pm 1] \exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-(u_2-1)^2}}{1 \pm \sqrt{1-(u_2-1)^2}}}\right], \quad C = \mathrm{const}\,. \tag{117}$$

Замечание 6. В найденное выражение первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (110).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет структурный вид

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{118}$$

Итак, найдены два первых интеграла (110), (118) независимой системы третьего порядка (98)–(100). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (101) (их всего $n-3$), и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (102).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (95), (96), а именно:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = \overline{1, n-3}, \tag{119}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C''_n = \mathrm{const}, \tag{120}$$

при этом в левую часть равенства (120) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (119) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 5. *Система (98)–(102) порядка $2(n-1)$ обладает достаточным количеством (n) независимых первых интегралов (110), (118)–(120).*

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (4), (6) при условии (42) имеет

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n^2-n+4}{2}, \quad n > 2,$$

инвариантных соотношений: сосуществуют аналитическая неинтегрируемая связь вида (12), соответствующая аналитическому первому интегралу (56), циклические первые интегралы вида (10), (11), первый интеграл вида (110), первый интеграл (118), который может быть найден из уравнения (116), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (119), (120).

Теорема 6. *Система (4), (6) при условиях (12), (42), (10), (11) обладает $(n^2-n+4)/2$, $n > 2$, инвариантными соотношениями (полным набором), n из которых являются трансцендентными функциями в смысле комплексного анализа.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00020-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 3. С. 51–54.
2. *Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 1. С. 52–58.
3. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твёрдого тела. М., 2007.

4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 1997. № 2. С. 65–68.
5. *Шамолин М.В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
6. *Шамолин М.В.* Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, при учёте вращательных производных момента сил по угловой скорости // Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 4. С. 482–485.
7. *Шамолин М.В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62. Вып. 5. С. 169–170.
8. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. математика. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.
9. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. Л., 1933.
10. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. М., 1976.
11. *Георгиевский Д.В., Шамолин М.В.* Кинематика и геометрия масс твёрдого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 1. С. 47–50.
12. *Георгиевский Д.В., Шамолин М.В.* Обобщённые динамические уравнения Эйлера для твёрдого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 5. С. 635–637.
13. *Георгиевский Д.В., Шамолин М.В.* Первые интегралы уравнений движения обобщённого гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2003. № 5. С. 37–41.
14. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. математика. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
15. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Совр. математика и её приложения. Тематические обзоры. Т. 125. М., 2013. С. 5–254.
16. *Шамолин М.В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Докл. РАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
17. *Шамолин М.В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикл. математика и механика. 2005. Т. 69. Вып. 6. С. 1003–1010.
18. *Шамолин М.В.* Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учёте зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Прикл. математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 273–287.
19. *Шамолин М.В.* Классификация случаев полной интегрируемости в динамике симметричного четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Совр. математика и её приложения. Т. 65. Математическая физика, комбинаторика и оптимальное управление. 2009. С. 132–142.
20. *Шамолин М.В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
21. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела // Докл. РАН. 2010. Т. 431. № 3. С. 339–343.
22. *Шамолин М.В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65. Вып. 1. С. 189–190.
23. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. 2011. Т. 437. № 2. С. 190–193.
24. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М., 1985.
25. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М., 1972.
26. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М., 1979.
27. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
28. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л., 1947.
29. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
30. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Докл. РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 187–190.

31. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Докл. РАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.
32. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, при учёте линейного демпфирования // Докл. РАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
33. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде при учёте линейного демпфирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2012. № 4. С. 44–47.
34. *Шамолин М.В.* Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трёхмерного и четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Совр. математика и её приложения. Т. 76. Геометрия и механика. 2012. С. 84–99.
35. *Шамолин М.В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbb{R}^4$ // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. Вып. 6. С. 233–234.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
26.11.2015 г.