# Вестник Московского университета

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ**

Основан в ноябре 1946 г.

*Серия 1* **МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА**

**№ 2 · 2016 · март – апрель**

Издательство Московского университета

*Выходит один раз в два месяца*


СОДЕРЖАНИЕ

*Математика*



*Механика*



*Краткие сообщения*

CONTENTS

## *Mathematics*



## *Mechanics*



## *Short notes*



To buy separate issues of “Moscow University Mathematics Bulletin” and “Moscow University Mechanics Bulletin” or subscribe to them one should refer to

Allerton Press Inc.
250 West 57th Street,
New York, USA, NY 10107.
Fax: 646-424-96-95

# Механика

УДК 531.01+531.552+517.925

## ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ В ДИНАМИКЕ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К СФЕРЕ

**М. В. Шамолин**[1]

Изучаются механические системы, фазовым пространством которых естественным образом становится касательное расслоение к двумерной сфере. Классифицируются системы, описывающие геодезический поток, являющиеся потенциальными системами, неконсервативными системами. Найдено многопараметрическое семейство систем, обладающее полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Приводятся примеры из пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой.

*Ключевые слова:* система с переменной диссипацией, динамические уравнения, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

The mechanical systems which have the tangent bundle of a two-dimensional sphere as their phase space are studied. The potential nonconservative systems describing a geodesic flow are classified. A multi-parameter family of systems possessing the complete list of (in general) transcendental first integrals expressed in terms of finite combinations of elementary functions is found. Some examples from spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium are given.

*Key words:* variable dissipation system, dynamic equations, integrability, transcendental first integral.

**1. Системы на расслоении к сфере.** Предъявим два случая, когда касательное расслоение к двумерной сфере становится фазовым пространством механической системы.

*1.1. Пространство положений — двумерная сфера.* Действительно, если функции (сферические координаты) $\theta$, $\psi$ определяют положение точки на сфере, $\dot\theta$, $\dot\psi$ задают начальные скорости (в касательном пространстве к сфере), то касательное расслоение $T\mathbf{S}^2\{\dot\theta,\dot\psi,\theta,\psi\}$ становится фазовым пространством автономной системы

$$\ddot\theta = F_\theta(\dot\theta,\dot\psi,\theta,\psi), \qquad \ddot\psi = F_\psi(\dot\theta,\dot\psi,\theta,\psi). \tag{1}$$

Уточним лишь, что сферические координаты являются локальными (они не покрывают два полюса сферы). Поэтому утверждение, что в качестве фазового пространства системы (1) рассматривается все касательное расслоение $T\mathbf{S}^2\{\dot\theta,\dot\psi,\theta,\psi\}$ к сфере, справедливо с учетом сделанного уточнения. При этом в дальнейшем или следует в окрестности полюсов сферы рассматривать другие локальные координаты, или по возможности доопределять векторное поле системы в данных полюсах. Последнее станет возможным для систем, рассматриваемых в настоящей работе.

*1.2. Отделение динамической части уравнений пространственного движения динамически симметричного твердого тела и дополнительные симметрии.* Предположим, что кинетическая энергия тела и обобщенные силы и моменты не зависят от положения тела в пространстве. Тогда динамическая часть уравнений движения является независимой системой шестого порядка и может быть исследована самостоятельно. Более того, предположим, что тело динамически симметрично (тензор инерции в некоторой системе координат $Dxyz$, связанной с телом, имеет вид $\mathrm{diag}\,\{I_1, I_2, I_2\}$, т.е. $Dx$ — ось динамической симметрии тела). В качестве квазискоростей выбираются $(v,\alpha,\beta)$ — сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки твердого тела; $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ — компоненты угловой скорости в системе $Dxyz$. Именно сферические координаты (в данном случае вектора скорости) позволяют в дальнейшем получить классическую структуру касательного расслоения. При этом роль координат соответствующего касательного пространства будут играть обобщенные ускорения.

[1] *Шамолин Максим Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: shamolin@imec.msu.ru.

Основное предположение относится к структуре силового поля. Будем считать, что силовое поле направлено вдоль оси симметрии $Dx$, т.е. $\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x$. При этом величина силы является квадратичной формой по следующей части квазискоростей:

$$F_x(v, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3; \alpha, \beta) = \sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{3} F_{ij}(\alpha, \beta)\, \Omega_i \Omega_j, \qquad \Omega_0 = v. \tag{2}$$

Тогда при выполнении перечисленных условий в динамической части уравнений движения при соответствующем выборе переменных произойдет отделение независимой подсистемы четвертого порядка на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\alpha, \beta\}$. Действительно, в этом случае у системы динамических уравнений имеется первый интеграл $\Omega_1 = \Omega_1^0 = \mathrm{const}$. Далее, при условии (2) и соответствующем выборе независимого переменного уравнение относительно величины $v$ отделится [1]. Последнее позволит понизить порядок системы динамических уравнений на две единицы.

Примеры из пп. 1.1 и 1.2 имеют следующее главное отличие. В п. 1.1 позиционные координаты в системе пробегают сферу, а скорости — все касательные плоскости к сфере. В п. 1.2 сферу пробегают квазискорости системы, а все касательные плоскости заполнены обобщенными ускорениями.

**2. Примеры из динамики.** Рассмотрим две задачи.

*2.1. Пространственный маятник в потоке среды.* Уравнения (1) для такой задачи имеют следующий вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} &\ddot\theta + b\dot\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta - \dot\psi^2\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0,\\ &\ddot\psi + b\dot\psi\cos\theta + \dot\theta\dot\psi\,\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $b > 0$, при этом в системе (3) присутствуют $\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$ — консервативные члены члены, характеризующие переменную диссипацию в системе $b\begin{pmatrix}\dot\theta\\ \dot\psi\end{pmatrix}\cos\theta$, а также коэффициенты связности

$$\Gamma^{\theta}_{\psi\psi} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \Gamma^{\psi}_{\theta\psi} = \frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta},$$

которые в данном случае имеют смысл реакций, удерживающих движение точки на сфере (рис. 1, отрезок $O_1D_1$ — ортогональная проекция отрезка $OD$, пунктиром обозначена прямая $DD_1$, перпендикулярная плоскости $y_0O_1z_0$).

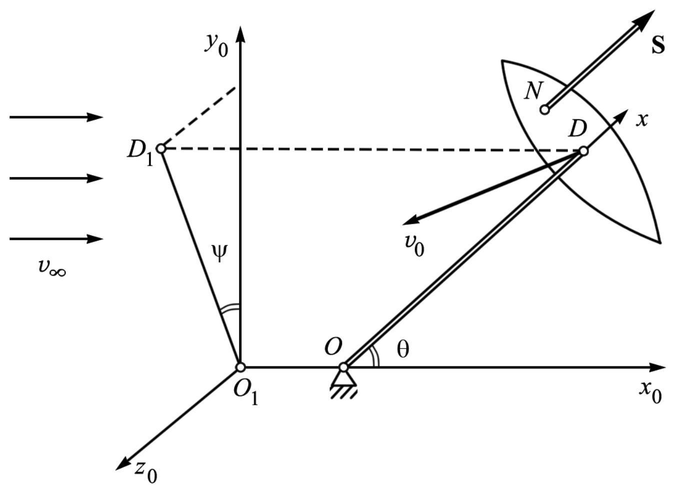


Рис. 1. Сферический маятник в потоке среды

Видно, что система (3) имеет порядок 3 (угол $\psi$ является циклической переменной), поэтому для ее полного интегрирования достаточно знать 2 независимых первых интеграла [3]:

$$\begin{aligned} &\Phi_1\left(\frac{\dot\theta}{\sin\theta}, \frac{\dot\psi}{\sin\theta}, \sin\theta\right) = \frac{z_2^2 - bz_2\sin\theta + z_1^2 + \sin^2\theta}{z_1\sin\theta} = C_2 = \mathrm{const},\\ &\Phi_2\left(\frac{\dot\theta}{\sin\theta}, \frac{\dot\psi}{\sin\theta}, \sin\theta\right) = C_2 = \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $z_1 = \dot\psi\,\mathrm{tg}\,\theta$, $z_2 = -b\sin\theta - \dot\theta$. При этом координаты $z_1$, $z_2$ в касательном пространстве вырождаются как раз при $\sin\theta = 0$ — естественное вырождение порождающих сферических координат $\theta$, $\psi$.

Первые интегралы (4) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций [4] (трансцендентность функции понимается в смысле наличия у нее существенно особых точек, см. также [5]).

**Предложение.** *Если координаты* $z_1$, $z_2$ *задать следующим образом*:

$$z_1 = \dot\psi\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad z_2 = -\dot\theta - b\sin\theta \tag{5}$$

*в касательном расслоении* $T\mathbf{S}^2\{z_2, z_1, \theta, \psi\}$ *двумерной сферы* $\mathbf{S}^2\{\theta, \psi\}$, *то система* (3) *будет эквивалентна системе*

$$\dot\theta = -z_2 - b\sin\theta, \tag{6}$$

$$\dot z_2 = \sin\theta\cos\theta - z_1^2\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \tag{7}$$

$$\dot z_1 = z_1 z_2\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \tag{8}$$

$$\dot\beta = z_1\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{9}$$

*При этом уравнения* (5), *задающие новые координаты, обращаются и позволяют получить кинематические соотношения* (6), (9).

*2.2. Пространственное движение свободного твердого тела.* Динамическая часть уравнений пространственного движения динамически симметричного твердого тела в поле силы, действующей вдоль оси симметрии (рис. 2), без собственного вращения в системе $Dxyz$, связанной с телом, имеет вид [6]

$$\begin{aligned}
&\dot v\cos\alpha - \dot\alpha v\sin\alpha + \Omega_2 v\sin\alpha\sin\beta - \Omega_3 v\sin\alpha\cos\beta + \sigma(\Omega_2^2+\Omega_3^2) = F_1(v,\Omega_2,\Omega_3;\alpha,\beta)/m,\\
&\dot v\sin\alpha\cos\beta + \dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta - \dot\beta v\sin\alpha\sin\beta + \Omega_3 v\cos\alpha - \sigma\dot\Omega_3 = 0,\\
&\dot v\sin\alpha\sin\beta + \dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta + \dot\beta v\sin\alpha\cos\beta - \Omega_2 v\cos\alpha + \sigma\dot\Omega_2 = 0,\\
&I_2\dot\Omega_2 = -z_N(v,\Omega_2,\Omega_3;\alpha,\beta)F_1(v,\Omega_2,\Omega_3;\alpha,\beta),\\
&I_2\dot\Omega_3 = y_N(v,\Omega_2,\Omega_3;\alpha,\beta)F_1(v,\Omega_2,\Omega_3;\alpha,\beta).
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $(v,\alpha,\beta)$ — сферические координаты вектора скорости точки $D$; $\Omega_1\equiv 0$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ — компоненты угловой скорости; $\sigma = DC$, $C$ — центр масс тела; $m$ — масса тела; $\operatorname{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$ — тензор инерции; $\mathbf{F} = \mathbf{S} = F_2\mathbf{e}_x$ — силовое поле, действующее вдоль оси $Dx$ и проходящее через точку $N$ плоскости $Dyz$; $(0, y_N(v,\Omega_2,\Omega_3;\alpha,\beta),\ z_N(v,\Omega_2,\Omega_3;\alpha,\beta))$ — координаты точки $N$ (рис. 2).

Пусть функция $F_1(v,\Omega_2,\Omega_3;\alpha,\beta)$ удовлетворяет условию

$$F_1(v,\Omega_2,\Omega_3;\alpha,\beta) = \\ = \sum_{i,j=0,\ i<j}^{3} F_{ij}(\alpha,\beta)\Omega_i\Omega_j = F\left(\alpha,\beta,\frac{\Omega}{v}\right)v^2,$$

$$\Omega_0 = v.$$

Введем следующие квазискорости:

$$\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix} = T(-\beta)\begin{pmatrix}\Omega_2\\ \Omega_3\end{pmatrix}, \qquad T(\beta) = \begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix},$$

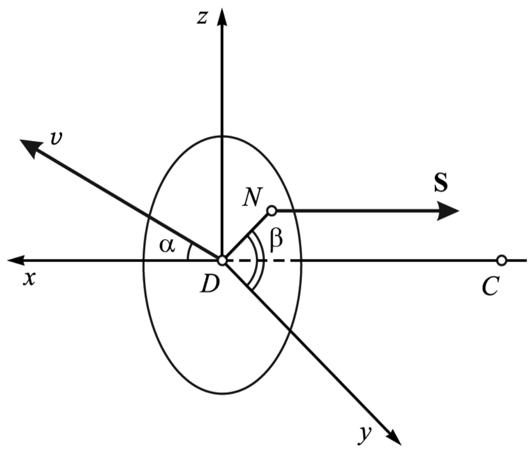


Рис. 2. Пространственная модель воздействия среды на тело

а также новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование:

$$z_k = n_1 v Z_k, \qquad k = 1,2, \qquad <\cdot> = n_1 v <'>, \qquad n_1 > 0, \qquad n_1 = \mathrm{const}.$$

Тогда система (10) примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha,\beta,Z_1,Z_2), \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
\alpha' = -Z_2 + \sigma n_1(Z_1^2+Z_2^2)\sin\alpha + \\
+\frac{\sigma}{I_2 n_1}\,F(\alpha,\beta,n_1 Z)\cos\alpha\,[y_N(\alpha,\beta,n_1 Z)\cos\beta + z_N(\alpha,\beta,n_1 Z)\sin\beta] - \\
-\frac{F(\alpha,\beta,n_1 Z)}{m n_1}\sin\alpha,
\end{gathered} \tag{12}$$

$$Z_2' = \frac{F(\alpha,\beta,n_1Z)}{I_2n_1^2}\left[1-\sigma n_1Z_2\sin\alpha\right]\left[y_N(\alpha,\beta,n_1Z)\cos\beta + z_N(\alpha,\beta,n_1Z)\sin\beta\right] -$$

$$-Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_2(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha -$$

$$-\frac{\sigma}{I_2n_1}Z_1\frac{F(\alpha,\beta,n_1Z)}{\sin\alpha}\left[z_N(\alpha,\beta,n_1Z)\cos\beta - y_N(\alpha,\beta,n_1Z)\sin\beta\right] -$$

$$-Z_2\frac{F(\alpha,\beta,n_1Z)}{mn_1}\cos\alpha, \tag{13}$$

$$Z_1' = \frac{F(\alpha,\beta,n_1Z)}{I_2n_1^2\sin\alpha}\left[\sigma n_1Z_2\sin\alpha - 1\right]\left[z_N(\alpha,\beta,n_1Z)\cos\beta - y_N(\alpha,\beta,n_1Z)\sin\beta\right] +$$

$$+Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sigma n_1 Z_1(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha -$$

$$-\frac{\sigma}{I_2n_1}Z_1F(\alpha,\beta,n_1Z)\sin\alpha\left[z_N(\alpha,\beta,n_1Z)\sin\beta + y_N(\alpha,\beta,n_1Z)\cos\beta\right] -$$

$$-Z_1\frac{F(\alpha,\beta,n_1Z)}{mn_1}\cos\alpha, \tag{14}$$

$$\beta_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+\frac{\sigma}{I_2n_1}\frac{F(\alpha,\beta,n_1Z)}{\sin\alpha}\left[z_N(\alpha,\beta,n_1Z)\cos\beta - y_N(\alpha,\beta,n_1Z)\sin\beta\right], \tag{15}$$

$$\Psi(\alpha,\beta_1,Z_1,Z_2) = -\sigma n_1(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha +$$

$$+\frac{\sigma}{I_2n_1}F(\alpha,\beta,n_1Z)\sin\alpha\left[y_N(\alpha,\beta,n_1Z)\cos\beta + z_N(\alpha,\beta,n_1Z)\sin\beta\right] +$$

$$+\frac{F(\alpha,\beta,n_1Z)}{mn_1}\cos\alpha.$$

Видно, что в системе пятого порядка (11)–(15) выделяется независимая подсистема четвертого порядка (12)–(15), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем четырехмерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T\mathbf{S}^2\{Z_2,Z_1,\alpha,\beta\}$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\alpha,\beta\}$. Действительно, переход от координат $\Omega_2$, $\Omega_3$ к координатам $Z_2$, $Z_1$ почти всюду невырожден. Как видно из правой части системы (12)–(15), вырождение координат в касательном пространстве происходит при $\sin\alpha = 0$. Но это и вызвано естественным вырождением сферических координат $\alpha$, $\beta$.

**3. Геодезический поток на расслоении к сфере.** Каков вид может иметь система на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2\{z_2,z_1,\alpha,\beta\}$ к сфере $\mathbf{S}^2\{\alpha,\beta\}$ при отсутствии внешнего поля? Очевидно, что это зависит от выбора координат на расслоении (как, например, в (5)). Выберем координаты на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2\{z_2,z_1,\alpha,\beta\}$ в виде

$$z_1 = \dot\beta\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad z_2 = -\dot\alpha. \tag{16}$$

**Замечание 1.** Поскольку внешнее поле отсутствует, то в системе (16) существуют два аналитических первых интеграла:

$$z_1^2 + z_2^2 = C_1, \qquad z_1\sin\alpha = C_2. \tag{17}$$

В частности, если $z_1$, $z_2$ — проекции вектора угловой скорости твердого тела (без собственного вращения) на оси подвижной системы координат, то соотношения (17) как раз и указывают на постоянство угловой скорости как вектора.

**Теорема 1.** *Система, которая задает геодезический поток на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2\{z_2,z_1,\alpha,\beta\}$, имеет вид*

$$\begin{gathered}\alpha' = -z_2, \qquad z_2' = -z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\ z_1' = z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \beta' = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\end{gathered} \tag{18}$$

*если и только если существует полный набор первых интегралов*

$$\begin{aligned} &\Phi_1(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 = C_1, \\ &\Phi_2(\alpha, z_1) = z_1 \sin\alpha = C_2, \\ &\Phi_3(\beta, z_1, z_2) = \beta \pm \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} = C_3. \end{aligned} \tag{19}$$

**Замечание 2.** Функция $\Psi_1(\alpha, z_1, z_2) = \frac{z_1^2+z_2^2}{z_1 \sin\alpha} = C_1'$ может заменить функцию $\Phi_1(z_1, z_2)$ в полном наборе (19) первых интегралов системы (18).

**4. Потенциальный поток на расслоении к сфере.** Каков вид может иметь система на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2\{z_2, z_1, \alpha, \beta\}$ к сфере $\mathbf{S}^2\{\alpha, \beta\}$ при наличии потенциального внешнего поля? Очевидно, что это зависит от выбора координат на расслоении (как, например, в (16)). Выберем координаты на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2\{z_2, z_1, \alpha, \beta\}$ в виде (16).

**Замечание 3.** Поскольку внешнее поле потенциально, то в системе (19) существуют два аналитических первых интеграла:

$$z_1^2 + z_2^2 + F_1(\alpha) = C_1, \qquad z_1 \sin\alpha = C_2, \qquad F_1(\alpha + 2\pi) = F_1(\alpha). \tag{20}$$

В частности, если $z_1$, $z_2$ — проекции вектора угловой скорости твердого тела (без собственного вращения) на оси подвижной системы координат, то первое соотношение (20) как раз и указывает на постоянство полной энергии.

**Теорема 2.** *Система, которая задает потенциальный поток на касательном расслоении* $T\mathbf{S}^2\{z_2, z_1, \alpha, \beta\}$, *имеет вид*

$$\begin{aligned} &\alpha' = -z_2, \qquad z_2' = F(\alpha) - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad F(\alpha) = \frac{dF_1(\alpha)}{2d\alpha}, \\ &z_1' = z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \beta' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{aligned} \tag{21}$$

*если и только если существует полный набор первых интегралов*

$$\begin{aligned} &\Phi_1(\alpha, z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 + F_1(\alpha) = C_1, \\ &\Phi_2(\alpha, z_1) = z_1 \sin\alpha = C_2, \\ &\Phi_3(\alpha, \beta, z_1, z_2) = C_3. \end{aligned} \tag{22}$$

**Замечание 4.** Функция

$$\Psi_1(\alpha, z_1, z_2) = \frac{z_1^2 + z_2^2 + F_1(\alpha)}{z_1 \sin\alpha} = C_1' \tag{23}$$

может заменить функцию $\Phi_1(\alpha, z_1, z_2)$ в полном наборе (22) первых интегралов системы (21).

**5. Неконсервативный поток на расслоении к сфере.** Каков вид может иметь система на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2\{z_2, z_1, \alpha, \beta\}$ к сфере $\mathbf{S}^2\{\alpha, \beta\}$ при наличии неконсервативного внешнего поля? Очевидно, что это зависит от выбора координат на расслоении (как, например, в (16)). Выберем координаты на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2\{z_2, z_1, \alpha, \beta\}$ в виде

$$z_1 = \dot\beta \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad z_2 = -\dot\alpha + bg(\alpha), \qquad b \neq 0, \qquad g(\alpha + 2\pi) = g(\alpha).$$

**Теорема 3.** *Система*

$$\begin{aligned} &\alpha' = -z_2 + bg(\alpha), \qquad z_2' = F(\alpha) - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad F(\alpha) = \frac{dF_1(\alpha)}{2d\alpha}, \\ &z_1' = z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \beta' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{aligned} \tag{24}$$

*задает неконсервативный поток на касательном расслоении* $T\mathbf{S}^2\{z_2, z_1, \alpha, \beta\}$ *и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним* [1, 2].

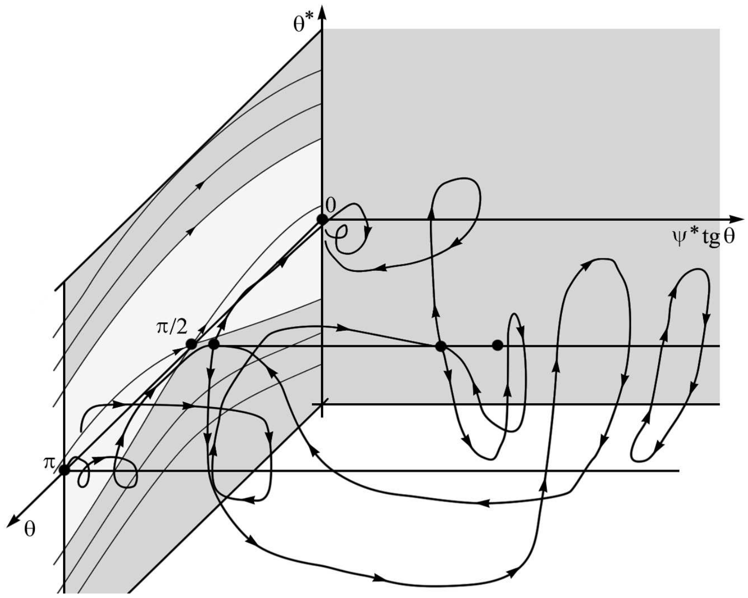


Рис. 3. Фазовый портрет системы (3) в трехмерном слое

**Замечание 5.** В случае

$$F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha, \quad g(\alpha) = \sin\alpha \quad (25)$$

(см. также [1, 2, 7]) система (24) совпадает с системой (6)–(9) (после замены $\theta \to \alpha$, $\psi \to \beta$, $b \to -b$) и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов

$$\Psi_1(\alpha, z_1, z_2) = \frac{z_1^2 + z_2^2 + \sin^2\alpha - bz_2\sin\alpha}{z_1\sin\alpha} = C_1', \quad (26)$$

$$\Psi_2(\alpha, z_1, z_2) = C_2',$$

$$\Psi_3(\alpha, \beta, z_1, z_2) = C_3',$$

выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [6, 8, 9].

**Замечание 6.** При $b = 0$ первый интеграл (26) системы (24), (25) совпадает с первым интегралом (23) системы (21), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (26), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (24), (25) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель, и знаменатель выражения (26) являются первыми интегралами системы (21)).

В заключение приведем фазовый портрет системы (3) (рис. 3).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15–01–00848-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
2. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. матем. 2008. **14**, вып. 3. 3–237.
3. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. матем. 2010. **16**, вып. 4. 3–229.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. **53**, вып. 3. 209–210.
5. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
6. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 125. М.: ВИНИТИ, 2013. 5–254.
7. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. 133–135.
8. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела // Докл. РАН. 2010. **431**, № 3. 339–343.
9. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Докл. РАН. 2012. **442**, № 4. 479–481.

Поступила в редакцию
12.05.2014

УДК 511

# ДВИЖЕНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

**П. Я. Ливасов**[1]

В работе приводится решение задачи о движении тонкой жесткой пластины в упругой среде с использованием метода Смирнова–Соболева для решения двумерного волнового уравнения.

[1] *Ливасов Павел Янисович* — асп. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: livasov@mail.ru.