Воронежский государственный университет
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Математический институт имени В. А. Стеклова
Российской академии наук

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА С. Г. КРЕЙНА – 2016»

Под редакцией В. А. Костина

Воронеж
Издательско-полиграфический центр
«Научная книга»
2016

УДК 517.5+517.9(083)
ББК 22.16я4
М34

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 16-31-10005-моб_г

М34 **Материалы** международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016» [Текст] / под ред. В. А. Костина. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – 464 с.
ISBN 978-5-4446-0765-7

В сборнике представлены статьи участников международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016», содержащие новые результаты по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, краевым задачам математической физики и другим разделам современной математики.
Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов.

Сборник включен в РИНЦ.

УДК 517.5+517.9(083)
ББК 22.16я4

ISBN 978-5-4446-0765-7

ВИССАРИОН ГРИГОРЬЕВИЧ АЛЕКСЕЕВ — ОТВЕРЖЕННЫЙ ПАТРИОТ РУССКОЙ НАУКИ

© 2016 *В.А. Костин, Ю.И. Сапронов, Н.Н. Удоденко*
Воронежский государственный университет

Век девятнадцатый, железный,
Воистину жестокий век!
. . . .
Двадцатый век... Еще бездомней,
Еще страшнее жизни мгла

А. Блок «Возмездие»

Судьба Виссариона Григорьевича Алексеева является еще одним примером в ряду трагических судеб, изломанных катастрофами войн и революций XX века.

В.Г. Алексеев

К сожалению, имя этого выдающего человека, патриота русской науки, спасшего в условиях оккупации 1918 года один из классических университетов России — Юрьевский, до настоящего времени умалчивается или произносится с подозрительной осторожностью.

В настоящей статье мы пытаемся поделиться некоторой доступной нам информацией о жизни и многогранной деятельности В.Г.Алексеева, являющимся последним ректором Русского Императорского Университета в г. Юрьеве (на эту должность он избирался трижды), первым ректором Воронежского университета[1] и первым профессором, прочитавшим курс

[1]Это подтверждается следующей выдержкой из широко известной 5-томной энциклопедии «История отечественной математики за

ражение $\exp_O$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности $\tilde{U}$ нуля в касательном пространстве $T_O M_k$ в некоторую окрестность $\exp_O(\tilde{U})$ точки O многообразия M_k. Таким образом, в $\exp_O(\tilde{U})$ определяется система координат, индуцированная из касательного пространства экспоненциальным отображением; рассмотрим в ней евклидову метрику (помимо метрики многообразия). Пусть F — семейство граничных множеств в касательном пространстве $T_O M_k$, F получено из фиксированной n-точечной границы B_0 всевозможными вращениями вокруг нуля и гомотетиями с центром в нуле в касательном пространстве (все границы из F «подобны»).

Теорема 4. *Существует окрестность U точки O, что для любой границы $\exp_O(B) \subset U, B \in F$ множество типов кратчайших (в метрике многообразия) деревьев, соединяющих $\exp_O(B)$, содержится среди типов кратчайших (в евклидовой метрике) деревьев, соединяющих множество $B \in F$ в касательном пространстве.*

Рассмотрим касательное пространство к многообразию M_k в точке O и выберем в нем двумерную плоскость П. Определим множество вершин правильного n-угольника с центром в O на многообразии M_k как образ множества вершин правильного n-угольника с центром в O, лежащего в плоскости П, при экспоненциальном отображении. Минимальные деревья Штейнера для правильных многоугольников на евклидовой плоскости известны. Из описанных выше теорем вытекает следующий факт.

Следствие 2. *На плоскости Лобачевского и сфере для каждого $n \geq 7$ существует достаточно малая окрестность точки X_0 на ней такая, что для любого лежащего в ней правильного n-угольника с центром в X_0 минимальным деревом Штейнера является граница без любой его стороны.*

Литература

1. *Бураго Д.Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.,* Курс метрической геометрии, РХД, Москва-Ижевск, 2004.

2. *А. О. Иванов, А. А. Тужилин,* Теория экстремальных сетей, Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ТВЕРДОЕ ТЕЛО-МАЯТНИК В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ[2]

© 2016 *М.В. Шамолин*

(Москва; *shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru*)

В работе систематизируются результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного закрепленного четырехмерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного четырехмерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил.

Ранее в [1] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения закрепленного тела-маятника в однородном потоке набегающей среды в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

[2]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00020).

Позднее [1, 2] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы уравнений движения существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом (сферическим маятником) сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

Далее [2] были исследованы уравнения движения закрепленных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска.

В данной работе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

Задача поиска полного набора трансцендентных первых интегралов систем с диссипацией также является достаточно актуальной, и ей было ранее посвящено множество работ. Введен в рассмотрение новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных групп симметрий, показано, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией с нулевым средним, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии, так и ее рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике твердого тела. В результате обнаружен ряд случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Получены некоторые обобщения на условия интегрируемости более общих классов неконсервативных динамических систем (динамика четырехмерного твердого тела).

При этом изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле “в лоб” интегрировать основное уравнение динамики. При этом предлагается более универсальное изложение известных, а также полученных новых случаев полной интегрируемости в трансцендентных функциях в многомерной динамике.

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получен целый спектр случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств.

Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе, в классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды.

Литература

1. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.

2. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / Итоги науки и техники. Сер. “Современая математика и ее приложения. Тематические обзоры”. Т. 125. М.: ВИНИТИ, 2013. С. 5–254.

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА УСКОРЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЯВНОЙ СХЕМЫ

© 2016 *А.И. Шангарева*
(Казань, *linka390@mail.ru*)

Предложен численный алгоритм, позволяющий ускорить время расчетов уравнения переноса с использованием явной схемы, оптимизированной с учетом пространственной неоднородности расчетного шага по времени. Ускорения времени расчетов удалось добиться за счет введения локального числа Куранта и выбора с его использованием различных кратностей временных шагов в различных областях.

Решение многих задач механики сплошной среды предполагает использование их конечномерных, в частности, конечно–разностных аппроксимаций. Наряду с неявными, часто возникает потребность в использовании явных схем решения уравнения переноса, что обусловлено их более гибкой структурой и адаптивностью к возможному изменению некоторых параметров модели в ходе вычислений. В явной схеме, как известно, шаг по времени выбирается из условия устойчивости: число Куранта не должно превышать единицы. Это условие может оказаться весьма обременительным в силу малости пространственных шагов, что обусловлено наличием областей с большими градиентами решения. Кроме того, ряд специальных вычислительных процедур (измельчение сеток и т.п.) приводит к необходимости выбора еще меньшего временного шага. Как правило, зоны, где необходимо использовать мелкие шаги (например, в районе скважины) малы, а в большей части расчетной области допустимо проводить вычисления с большими шагами как по пространству, так и по времени.

О возможности проведения расчетов с разными шагами по времени в разных подобластях шла речь в работах [1]. Там же доказана устойчивость решения соответствующих вычислительных методов [1].

Рассматривался также способ построения разностных схем с различными временными шагами в подобластях, связанный с интерполяцией решения на границе раздела подобластей [2]. Иной подход к конструированию явных схем решения краевых параболических задач предложен в работе [3]. В его основе лежит блочное представление сеточного оператора с существенно различными спектральными свойствами блоков. Показано, что при соответствующем выборе шагов интегрирования устойчивость обеспечивается независимыми для каждого из блоков условиями.

В настоящей работе идея использования кратно измельченного шага по времени в областях с большими градиентами решения была обобщена на случай нескольких взаимосвязанных областей, в каждой из которых применяется свой коэффициент измельчения.

Структура и свойства алгоритма продемонстрированы на примере расчета поля нефтенасыщенности в задаче подземной гидромеханики [4–7]. Исследована эффективность метода в случае, для которого известно автомодельное решение. Верификация алгоритма проведена для однородной модельной задачи. Приведены результаты в виде карты локальных оптимальных шагов по времени и карты кратностей для всей расчетной области. В связи со значительной неоднородностью поля скоростей, характерных для данных задач, алгоритм дает заметный выигрыш во времени расчетов.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 15-41-02315.

Литература

1. *Зыль А. Н., Матус П. П.* Экономические разностные схемы повышенного порядка точности для многомерных параболических уравнений на неравномерных сетках // Журнал вычис-