2. Рахматуллаева Н.А. // «Узбек мат. журнал». –2000. –№ 1. –С. 118-130.
3. Исломов Б., Холбеков Ж.А. // Тезисы докл. «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». – Ташкент. –2013. – С.56-57.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ КЛАССОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СИММЕТРИЯМИ

М.В. Шамолин
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
e-mail: shamolin@mail.ru

Изучаются вопросы наличия трансцендентных первых интегралов для некоторых классов систем с симметриями. При этом получены достаточные условия наличия в неавтономных однородных системах второго порядка первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями, как в смысле теории элементарных функций, так и в смысле комплексного анализа, и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Предварительные суждения и результаты. Результаты предлагаемой работы являются развитием предыдущих исследований, в том числе, и некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела [1], где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Позднее данное обстоятельство позволило провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которые обладали грубостью и сохранялись для систем более общего вида. Полная интегрируемость таких систем была связана с симметриями скрытого типа.

Как известно, понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать – в каком смысле оно понимается (имеется в виду некий критерий, по которому делается вывод о том, что траектории рассматриваемой динамической системы устроены особенно «привлекательно и просто»), в классе каких функций ищутся первые интегралы и т.д. [1, 2].

В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не только в смысле теории элементарных функций (например, тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки). При этом их необходимо формально продолжить в комплексную область [2, 3].

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования таких неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций [3, 4].

Полный набор первых интегралов. Задача поиска полного набора трансцендентных первых интегралов систем с диссипацией также является достаточно актуальной, и ей было ранее посвящено множество работ. Введен в рассмотрение новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных групп симметрий, показано, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией с нулевым средним, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии, так и ее рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике твердого тела. В результате обнаружен ряд случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Получены некоторые обобщения на условия интегрируемости более общих классов неконсервативных динамических систем.

Изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле «в лоб» интегрировать основное уравнение динамики. При этом предлагается более универсальное изложение известных, а также полученных новых случаев полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил.

Получен целый спектр случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных.

Обсуждаются общие вопросы интегрируемости так называемых динамических систем с переменной диссипацией. Для начала дается наглядная характеристика таких систем. При этом говорится о системах с переменной диссипацией, где термин «переменный» относится не столько к величине коэффициента диссипации, сколько к возможной смене его знака (поэтому разумнее было бы употреблять термин «знакопеременный»).

В дальнейшем дается одно из возможных определений системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним через такую характеристику векторного поля системы, как дивергенция, которая, как известно, характеризует изменение фазового объема в фазовом пространстве рассматриваемой системы [1, 4].

В дальнейшем изучаются некоторые общие условия интегрируемости в элементарных функциях для систем на двумерной плоскости и касательных расслоениях одномерной сферы (двумерный цилиндр) и двумерной сферы (четырехмерное многообразие). При этом приводится интересный пример трехмерного фазового портрета системы маятникового типа, которая описывает движение сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды [1].

Поскольку приводятся случаи полной интегрируемости в динамике пространственного движения тела в неконсервативном поле, мы имеем дело с тремя, на первый взгляд, независимыми свойствами:

1) выделенный класс систем с симметриями;

2) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по имеющейся периодической переменной), что позволяет их рассматривать как «почти» консервативные системы;

3) в некоторых (пусть и достаточно маломерных) случаях обладание ими полным набором, вообще говоря, трансцендентных (с точки зрения комплексного анализа) первых интегралов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00020-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела, Экзамен, М., 2007.
2. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, вып. 3. С. 3–237.
3. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, вып. 4. С. 3–229.
4. Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники, Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2013. Т. 125. С. 5–254.

ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.Н. Элмуродов
Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
e-mail: A.elmurodov@gmail.com

Теория задач для линейных параболических уравнений с разрывными коэффициентами достаточно хорошо изучены (см. напр. [1]). Но для квазилинейных нагруженных уравнений такие задачи мало изучены. В настоящей работе рассматривается задача

$$a_1(u)u_{1xx}(t,x) - u_{1t}(t,x) + c_1u_1(x_1,t) = 0 \quad \text{в} \quad D_1 = \{(x,t): -l < x < 0,\ 0 < t \le T\} \qquad (1)$$

$$a_2(u)u_{2xx}(x,t) - u_{2t}(x,t) + c_2u_2(x_2,t) = 0 \quad \text{в} \quad D_2 = \{(x,t): 0 < x < l,\ 0 < t \le T\} \qquad (2)$$

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad -l \le x \le 0, \qquad (3)$$