

## ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

© 2015 г. М. В. ШАМОЛИН

### СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Об устойчивости некоторых ключевых режимов движения твердого тела в неконсервативном поле сил . . . . .	107
1. Введение . . . . .	107
2. Плоскопараллельное движение симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде	108
3. Функции воздействия среды, зависящие от угловой скорости тела . . . . .	111
4. Движение тела в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы . . . . .	113
5. Свободное торможение твердого тела в сопротивляющейся среде (случай I) . . . . .	117
6. Пространственное движение осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде	120
7. Пространственное свободное торможение твердого тела в сопротивляющейся среде (случай I) . . . . .	127
8. Заключение к двумерной и трехмерной задачам . . . . .	130
9. Об устойчивости тривиального решения по части переменных для четырехмерной задачи	131
Глава 2. Анализ данных для проведения экспериментов по движению тел в среде . . . . .	133
10. Предварительные сведения . . . . .	133
11. Подготовка данных для проведения натурных экспериментов . . . . .	134
12. Заключение . . . . .	139
Список литературы . . . . .	140

В первой главе проводится качественный анализ плоскопараллельной и пространственной задач о движении реальных твердых тел в сопротивляющейся среде. Построена нелинейная модель воздействия среды на твердое тело, учитывающая зависимость плеча силы от приведенной угловой скорости тела, при этом сам момент данной силы является также функцией угла атаки. Как показала обработка эксперимента о движении в воде однородных круговых цилиндров, данные обстоятельства необходимо учитывать при моделировании [10–12, 15–17]. При изучении плоской и пространственной модели взаимодействия твердого тела со средой (как при наличии, так и при отсутствии дополнительной следящей силы) найдены достаточные условия устойчивости одного из ключевых режимов движения — прямолинейного поступательного движения. Показано, что при некоторых условиях возможно также присутствие в системе либо устойчивого, либо неустойчивого автоколебательных режимов.

Аналогичные условия получены и для ключевого режима движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил, при этом отмечаются механическая и топологическая аналогия между движением маломерных тел в сопротивляющейся среде, а также многомерных тел в соответствующем неконсервативном поле.

Глава вторая представляет собой очередной этап исследования задачи плоскопараллельного движения твердого тела, взаимодействующего со средой лишь через передний плоский участок

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00020-а).

своей внешней поверхности. При построении силового воздействия среды используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности (например, о входе однородных круговых цилиндров в воду). Движение среды не изучается, а рассматривается такая задача динамики твердого тела, в которой характерное время движения тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра. Если в первой главе предъявляются условия асимптотической устойчивости прямолинейного поступательного торможения, в [29, 34, 38–40, 42, 46] получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов в пространстве квазискоростей, то во второй главе подготовлен количественный материал для проведения дальнейших натурных экспериментов о движении в среде полых круговых цилиндров.

Многие результаты данной работы регулярно докладывались на множестве семинаров, в том числе и на семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени профессора В. В. Трофимова [7] под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина (см. также [6, 45]).

## ГЛАВА 1

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛЮЧЕВЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ СИЛ

В данной работе проводится качественный анализ плоскопараллельной и пространственной задач о движении реальных твердых тел в сопротивляющейся среде.

Построена нелинейная модель воздействия среды на твердое тело, учитывающая зависимость плеча силы от приведенной угловой скорости тела, при этом сам момент данной силы является также функцией угла атаки. Как показала обработка эксперимента о движении в воде однородных круговых цилиндров, данные обстоятельства необходимо учитывать при моделировании [8, 9, 13, 14, 24, 26, 30].

При изучении плоской и пространственной модели взаимодействия твердого тела со средой (как при наличии, так и при отсутствии дополнительной следящей силы) найдены достаточные условия устойчивости одного из ключевых режимов движения — прямолинейного поступательного движения. Показано, что при некоторых условиях возможно также присутствие в системе либо устойчивого, либо неустойчивого автоколебательных режимов.

Аналогичные условия получены и для ключевого режима движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил, при этом отмечаются механическая и топологическая аналогия между движением маломерных тел в сопротивляющейся среде, а также многомерных тел в соответствующем неконсервативном поле.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый материал представляет собой исследование задачи движения твердого тела, взаимодействующего со средой лишь через передний плоский участок (пластину) своей внешней поверхности. При построении силового воздействия среды используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности [8, 20–22, 31–33]. Движение среды не изучается, а рассматривается такая задача динамики твердого тела, в которой характерное время движения тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра.

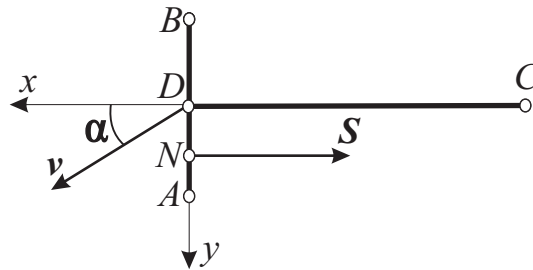


Рис. 1. Плоскопараллельное движение симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде

По причине сложности нелинейного анализа начальным этапом такого исследования явилось пренебрежение зависимостью момента силы воздействия среды от угловой скорости тела и использование такой зависимости лишь от угла атаки (см. также [25, 27, 28, 37, 47]).

С практической точки зрения важен вопрос исследования устойчивости так называемого невозмущенного (прямолинейного поступательного) движения, при котором скорости точек тела перпендикулярны пластине (кавитатору).

Весь спектр результатов, найденных при указанном простейшем предположении, позволяет сделать вывод о невозможности нахождения таких условий, при которых у приведенных систем существовали бы решения, соответствующие угловым колебаниям тела ограниченной амплитуды.

Эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров [30] подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твердое тело действительно необходимо учитывать зависимость момента силы воздействия среды и от угловой скорости тела. При этом в уравнениях движения возникают дополнительные члены, вносящие в систему диссипацию.

Как уже отмечалось, при изучении движения тела с конечными углами атаки основным вопросом нелинейного анализа является нахождение таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле невозмущенного движения, что подтверждает необходимость полного нелинейного исследования.

## 2. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Предположим, что *однородное* твердое тело массы  $m$  совершает плоскопараллельное движение в однородном потоке среды, и что некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой плоскую пластину  $AB$ , находящуюся в условиях струйного обтекания средой. Это означает, что, в случае отсутствия касательных сил, воздействие среды на пластину сводится к силе  $\mathbf{S}$  (приложенной в точке  $N$ ), ортогональной к ней (рис. 1). Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластины, и не испытывает действия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа тела в воду [30]. Предполагается также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления (воздействия) среды (см. также [50]).

Свяжем с пластиной правую систему координат  $Dxyz$  (ось  $z$  — перпендикулярна плоскости рисунка) и для простоты будем считать  $Dzx$  плоскостью геометрической симметрии тела. Тогда среди возможных движений существует режим прямолинейного поступательного торможения (невозмущенного движения), перпендикулярного пластине  $AB$ . При этом срединный перпендикуляр  $Dx$ , опущенный из центра тяжести  $C$  тела на плоскость пластины, принадлежит линии действия силы  $\mathbf{S}$ . А при возмущении данного режима вектор скорости  $\mathbf{v}$  точки  $D$  относительно среды, вообще говоря, отклоняется от оси  $DC$  геометрической симметрии на некоторый угол (атаки)  $\alpha$ .

Для построения динамической модели введем первые три фазовые координаты:  $v$  — величина скорости точки  $D$  относительно потока среды (рис. 1), угол  $\alpha$  и  $\Omega$  — алгебраическое значение проекции абсолютной угловой скорости тела на ось  $z$ ,  $AB = \Delta$ .

Примем, что величина силы  $\mathbf{S}$  квадратично зависит

$$S = s_1 v^2 \quad (2.1)$$

от  $v$  с некоторым коэффициентом  $s_1$  (ньютоновское сопротивление). Обычно его представляют в виде

$$s_1 = \frac{\rho P c_x}{2}, \quad (2.2)$$

где  $c_x$  — уже безразмерный коэффициент лобового сопротивления ( $\rho$  — плотность среды,  $P$  — площадь пластины). Этот коэффициент зависит от угла атаки, числа Струхалия и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем вводим безразмерную фазовую переменную «типа Струхалия»

$$\omega \cong \frac{\Omega \Delta}{v}, \quad (2.3)$$

а также вспомогательную функцию

$$s = s_1 \operatorname{sgn} \cos \alpha, \quad (2.4)$$

при этом воздействие среды на тело будет определять пара функций  $(y_N, s)$ .

Ограничимся зависимостью коэффициента  $c_x$  от угла атаки, т.е. в принципе будем считать величину  $s$  функцией  $\alpha$ , а величину  $y_N = DN$  — функцией пары безразмерных переменных  $(\alpha, \omega)$ .

Как уже отмечалось, предыдущие работы посвящены такому исследованию плоского взаимодействия, при котором учитывается зависимость пары  $(y_N, s)$  лишь от угла атаки. Здесь же изучаются плоскопараллельные и пространственные движения тела в нелинейной постановке в случае зависимости величины  $s$  от угла атаки и при условии дополнительной зависимости функции  $y_N$  от приведенной угловой скорости  $\omega$ .

Задача о свободном торможении тела (т.е. когда на тело действует лишь сила сопротивления среды — см. далее случай **I**) с малыми углами атаки формирует дальнейшее представление о нелинейных динамических системах, описывающих взаимодействие среды с телом, при учете так называемых вращательных производных момента силы воздействия среды по угловой скорости тела. Термин «вращательная производная» часто употребляется в гидродинамике в том случае, когда дифференцирование динамических функций идет в неинерциальной системе координат, при этом, если момент силы зависит от угловой скорости, то он входит линейно по ней и в уравнениях движения.

Невозмущенное движение определяется равенствами

$$\alpha(t) \equiv 0, \quad \omega(t) \equiv 0. \quad (2.5)$$

Поэтому функцию  $y_N(\alpha, \omega)$  при малых  $(\alpha, \omega)$  будем использовать в виде

$$y_N = \Delta(k\alpha - h\omega), \quad (2.6)$$

где  $k$  и  $h$  — некоторые постоянные. Зависимостью же  $s$  от  $\alpha$ , в силу геометрической симметрии тела, обеспечивающей четность функции  $s$ , пренебрегаем.

Линеаризованная модель силового воздействия среды содержит три параметра  $s = s_1, k, h$ , которые определяются формой пластины в плане. Первый из этих параметров — коэффициент  $s$  — размерный, параметры же  $k, h$  — безразмерные в силу способа их введения. Величины  $s, k$  могут быть экспериментально определены путем весовых измерений в установках типа гидро- или аэродинамических труб. В литературе [64] имеется информация о теоретическом определении этих величин для отдельных форм пластин, позволяющая считать, что  $k > 0$ . Что же касается параметра  $h$  (который вносит в систему зависимость момента силы от угловой скорости), то даже сама необходимость введения его в модель априори не очевидна.

Изучение свойств движения рассматриваемых классов тел в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова [30] было начато экспериментами по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров. Эксперимент позволил остановиться на следующих выводах.

*Первый:* невозмущенный режим движения тела (в воде) неустойчив, по крайней мере, по отношению к углу ориентации тела. Также стало возможным определение безразмерных параметров  $k, h$  воздействия среды на твердое тело.

*Второй* вывод таков: при моделировании воздействия среды на тело действительно необходимо учитывать дополнительный параметр, эквивалентный вращательной производной момента гидроаэродинамических сил по угловой скорости тела, который и вносит в систему дополнительную диссипацию.

Величина коэффициента демпфирующего момента уже была оценена в работе [10] для некоторых случаев движения тел в воде. Данная там оценка говорит о неустойчивости по углу атаки и угловой скорости невозмущенного движения твердого тела в воде. Чисто формально, увеличивая величину данного коэффициента, возможно достижение устойчивости такого движения, которое в некоторых средах (например, в глине) устойчиво в вышеописанном смысле, как показывает эксперимент [1–3]. Но, возможно, данная устойчивость достигается благодаря наличию в системе значительного демпфирования со стороны среды или наличию сил, касательных к пластине.

При тех же предположениях на характер взаимодействия тела со средой выделим такой класс задач, когда на тело, наряду с силой воздействия среды, действует следящая сила (тяги)  $\mathbf{T}$  по прямой  $CD$  (рис. 1). Одна из таких задач уже решалась в [13] при условии, когда тяга постоянна, и была показана неустойчивость невозмущенного режима.

Отметим случаи движения, которые в дальнейшем подверглись обстоятельному анализу.

- I. (Свободное) торможение тела, т.е. его движение под действием лишь силы воздействия среды (следящая сила отсутствует).
- II. Движение тела, при котором во все время движения постоянна величина скорости центра пластины (наличие неинтегрируемой связи):

$$v \equiv \text{const.} \quad (2.7)$$

- III. Движение тела, при котором во все время движения постоянна скорость центра масс (как вектор):

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const.} \quad (2.8)$$

Заметим, что в случае I невозмущенный режим можно также называть *прямолинейным поступательным торможением*.

Положение тела на плоскости зададим координатами  $(x_0, y_0)$  точки  $D$  и углом отклонения  $\varphi$ . Полярные координаты  $(v, \alpha)$  конца вектора скорости точки  $D$  и алгебраическое значение проекции угловой скорости  $\Omega$  связаны с переменными  $(x_0, y_0, \dot{\varphi}, \varphi)$  (неинтегрируемыми) кинематическими соотношениями:

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \dot{x}_0 = v \cos(\alpha + \varphi), \quad \dot{y}_0 = v \sin(\alpha + \varphi). \quad (2.9)$$

Таким образом, фазовое состояние системы будем определять через функции

$$(v, \alpha, \Omega, x_0, y_0, \varphi),$$

а первые три величины рассматривать в качестве квазискоростей.

Поскольку кинетическая энергия тела и обобщенные силы не зависят от положения тела на плоскости, координаты  $(x_0, y_0, \varphi)$  являются циклическими, что приводит к понижению порядка общей системы уравнений движения.

Уравнения движения центра масс (в проекциях на связанные оси  $Dxy$ ) и изменения кинетического момента в осях Кенига образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений,

рассматриваемую в трехмерном фазовом пространстве квазискоростей ( $\sigma = DC$ ,  $I$  — центральный момент инерции, дифференцирование берется по времени):

$$\dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -\frac{s(\alpha)v^2}{m}, \quad (2.10)$$

$$\dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} = 0, \quad (2.11)$$

$$I \dot{\Omega} = y_N(\alpha, \omega) s(\alpha) v^2, \quad \omega \cong \frac{\Delta \Omega}{v}. \quad (2.12)$$

Системы (2.9), (2.10)–(2.12) вместе образуют полную систему для описания плоскопараллельного движения твердого тела в сопротивляющейся среде в условиях квазистационарности. Если же рассматривается введенная выше задача **II** или **III** о движении тела при наличии следящей силы, то в правой части уравнения (2.10) стоит следующая величина:

$$\frac{T - s(\alpha)v^2}{m}. \quad (2.13)$$

В частности, для обеспечения выполнения условия (2.7) величину  $T$  следящей силы достаточно выбрать следующим образом:

$$T = T(v, \alpha, \Omega) = m\sigma\Omega^2 + s(\alpha)v^2 \left[ 1 - \frac{m\sigma}{I} y_N(\alpha, \omega) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right], \quad (2.14)$$

при этом первое уравнение (2.10) удовлетворяется тождественно. Отметим, что случаи **II** и **III** имеют лишь методическое значение, поскольку позволяет в дальнейшем понизить порядок системы уравнений движения и привести к важным механическим аналогиям (см. также [18, 19, 35, 36, 41, 43, 44]).

### 3. ФУНКЦИИ ВОЗДЕЙСТВИЯ СРЕДЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ТЕЛА

В динамическую систему (2.10)–(2.12) входят функции  $y_N(\alpha, \omega)$  и  $s(\alpha)$ , определяющие воздействие среды на тело. Функция  $y_N$  (ср. с (2.6)), кроме как от угла атаки  $\alpha$ , зависит еще и от приведенной угловой скорости  $\omega$ . Если, в частности, последней зависимостью пренебречь (как было в ряде предыдущих работ — так называемое *простейшее предположение* на функции воздействия среды), то величина  $y_N$  — функция лишь угла атаки:  $y_N = y(\alpha)$ , и ее зависимость от единственного аргумента определяется с помощью экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания [30, 52, 54, 57]. В этом случае в дальнейшем можно применить метод «погружения» задачи в более общий класс задач.

Но все-таки основной целью данной работы является учет влияния вращательных производных момента силы воздействия среды по компонентам угловой скорости тела, который требует введения в функции воздействия среды дополнительных аргументов, что само по себе является нетривиальной задачей моделирования. Как уже отмечалось, в данной работе ограничимся введением угловой скорости в качестве аргумента *лишь* в функцию  $y_N$ , а подобным ее введением в приведенный коэффициент  $s$  пренебрежем.

По аналогии с (2.6), величину  $y_N$  будем рассматривать в следующем виде:

$$y_N(\alpha, \omega) \cong y_N(\alpha, \Omega/v) = y(\alpha) - \frac{H\Omega}{v}, \quad (3.1)$$

при этом, в силу результатов эксперимента [30],  $H > 0$ .

Тогда уравнение (2.12) примет следующий вид:

$$I \dot{\Omega} = F(\alpha)v^2 - Hs(\alpha)\Omega v, \quad F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha). \quad (3.2)$$

Система (2.10), (2.11), (3.2) содержит функции  $F(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ , явный вид которых даже для пластин простой формы аналитически описать довольно затруднительно. По этой причине и используется прием «погружения» данной задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций  $F(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ .

Опорным для нас является результат С. А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного струйного обтекания бесконечной пластины получил функции  $y(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$  аналитически [35, 36]:

$$y(\alpha) = A \sin \alpha \in \{y\}, \quad A = y'(0) > 0, \quad (3.3)$$

$$s(\alpha) = B \cos \alpha \in \{s\}, \quad B = s(0) > 0. \quad (3.4)$$

Этот результат и помогает построить функциональные классы  $\{y\}$ ,  $\{s\}$ . Сочетая (3.3), (3.4) с экспериментальной информацией о свойствах струйного обтекания, формально опишем данные классы, состоящие из функций достаточно гладких,  $2\pi$ -периодических ( $y(\alpha)$  — нечетная, а  $s(\alpha)$  — четная), удовлетворяющих следующим условиям:  $y(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi)$ , причем

$$y'(0) > 0, \quad y'(\pi) < 0 \quad (3.5)$$

(класс функций  $\{y\} = Y$ );  $s(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ,  $s(\alpha) < 0$  при  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ , причем

$$s(0) > 0, \quad s'(\pi/2) < 0 \quad (3.6)$$

(класс функций  $\{s\} = \Sigma$ ). Как  $y$ , так и  $s$  меняют знак при замене  $\alpha$  на  $\alpha + \pi$ . Таким образом,

$$y \in Y, \quad s \in \Sigma. \quad (3.7)$$

Из вышеперечисленных условий следует, что введенная в (3.2) функция  $F$  — достаточно гладкая нечетная  $\pi$ -периодическая функция, удовлетворяющая следующим условиям:  $F(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ,

$$F'(0) > 0, \quad F'(\pi/2) < 0 \quad (3.8)$$

(класс функций  $\{F\} = \Phi$ ).

В частности, аналитическая функция [35, 36]

$$F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi, \quad AB = y'(0)s(0), \quad (3.9)$$

является типичным представителем класса функций  $\Phi$ .

В связи с отмеченной в [30, 51, 53, 57, 59–63] неустойчивостью невозмущенного движения можно поставить следующий вопрос: существуют ли угловые колебания оси симметрии тела конечной (ограниченной) амплитуды?

Сформулируем этот вопрос в более общем виде: существует ли пара функций  $y$  и  $s$  воздействия среды такая, чтобы для некоторого решения динамической части уравнений движения выполнялось бы ограничение  $0 < \alpha(t) < \alpha^* < \pi/2$ , начиная с некоторого момента времени  $t = t_1$ ?

При простейшем предположении на функции  $y_N$  и  $s$  ранее показано, что при квазистационарном описании взаимодействия среды с симметричным телом (когда величины  $y_N$  и  $s$  зависят лишь от угла атаки) для любой допустимой пары функций  $y$  и  $s$  во всем диапазоне ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) конечных углов атаки в системе отсутствуют какие-либо колебательные решения конечной (ограниченной) амплитуды.

Таким образом, для возможного положительного ответа на вопрос, поставленный выше, будем учитывать зависимость момента силы воздействия среды от приведенной угловой скорости, при этом будем использовать формулу (3.1) при  $H > 0$ . Оказывается, при некоторых предположениях можно ожидать положительного ответа на данный вопрос.

Конечно, с практической точки зрения важен анализ динамических уравнений лишь в окрестности невозмущенного движения, поскольку при некоторых критических углах атаки происходит замык боковой поверхности, и настоящая модель воздействия среды на тело перестает быть достоверной. Но для тел с боковой поверхностью различной формы величины критических углов, вообще говоря, различны и неизвестны. Поэтому приходится исследовать весь диапазон углов.

Итак, для исследования плоскопараллельного обтекания пластины средой используются классы динамических систем, определенные с помощью пары функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа (см. также [65, 66]).

4. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ  
ПРИ НАЛИЧИИ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

**4.1. Случай II.** Рассмотрим движение тела в среде при наличии такой следящей силы, которая обеспечивает во все время движения выполнение условия (2.7). Для этого, как отмечено выше, ее величину достаточно выбрать так, чтобы первое уравнение (2.10) выполнялось бы тождественно. Тогда к параметрам системы, введенным ранее, добавляется положительный параметр  $v$ , а динамическая часть уравнений движения тела в случае (2.7) приводится к системе второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} &= 0, \\ I \dot{\Omega} &= F(\alpha)v^2 - Hs(\alpha)\Omega v, \quad H > 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

которая вне и только вне объединения прямых

$$O = \left\{ (\alpha, \Omega) \in \mathbf{R}^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \right\} \quad (4.2)$$

эквивалентна следующей системе нормального вида:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\Omega + \frac{\sigma v F(\alpha)}{I \cos \alpha} - \frac{\sigma}{I} H \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Omega, \\ \dot{\Omega} &= \frac{v^2}{I} F(\alpha) - H \frac{v}{I} \Omega s(\alpha). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для начала исследуем устойчивости ее тривиального решения, соответствующего *невозмущенному движению*, для чего выпишем соответствующее характеристическое уравнение возле начала координат:

$$\lambda^2 + \lambda v \left[ \frac{BH}{I} - \sigma n_0^2 \right] + n_0^2 v^2 = 0, \quad (4.4)$$

где

$$A = y'_N(0), \quad B = s(0), \quad n_0^2 = \frac{F'(0)}{I} = \frac{y'_N(0)s(0)}{I} = \frac{AB}{I}. \quad (4.5)$$

Введем следующие три положительных безразмерных параметра:

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{mn_0}, \quad \mu_2 = \sigma n_0, \quad \mu_3 = \frac{BH}{In_0}, \quad (4.6)$$

безразмерное дифференцирование и подстановку

$$\langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \quad \Omega \mapsto n_0 v \Omega. \quad (4.7)$$

Тогда система (4.3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\Omega + \frac{\sigma}{In_0} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} - \frac{\sigma H}{I} \Omega \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha}, \\ \Omega' &= \frac{F(\alpha)}{In_0^2} - \frac{H}{In_0} \Omega s(\alpha). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Очевидно следующее

**Предложение 1.** При  $\mu_3 > \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_2$ ) тривиальное решение системы (4.3) асимптотически устойчиво (является отталкивающим).

Для возможного рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (4.3) при *критическом* соотношении параметров

$$\mu_3 = \mu_2. \quad (4.9)$$

Для этого сделаем следующую замену фазовых переменных  $(\alpha, \Omega) \mapsto (a, w)$  в системе (4.8):

$$\alpha = a, \quad \Omega = \frac{|\omega_0|}{1 + \mu_2^2} (\mu_2 a - w), \quad \omega_0 = 1, \quad (4.10)$$



переводящую ее в систему следующую:

$$\begin{aligned} a' &= |\omega_0|w + A_3a^3 + A_4a^2w + \bar{o}_1((a^2 + w^2)^{3/2}), \\ w' &= -|\omega_0|a + A_1a^3 + A_2a^2w + \bar{o}_2((a^2 + w^2)^{3/2}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{f_3}{6In_0^2} + \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2(1 + \mu_2^2)}, \\ A_2 &= -\frac{Hs_2}{2In_0} \frac{1}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{2(1 + \mu_2^2)}, \\ A_3 &= \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} - \frac{\mu_2 Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2}{2(1 + \mu_2^2)}, \\ A_4 &= \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2(1 + \mu_2^2)}, \quad s_2 = s''(0), \quad f_3 = F'''(0). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Введем следующий вспомогательный индекс [55, 56]:

$$\begin{aligned} \text{In} &= |\omega_0| \{ Y_{111}^1 + Y_{122}^1 + Y_{112}^2 + Y_{222}^2 \} + \\ &+ (Y_{11}^1 Y_{11}^2 - Y_{11}^1 Y_{12}^1 + Y_{11}^2 Y_{12}^2 + Y_{22}^2 Y_{12}^2 - Y_{22}^1 Y_{12}^1 - Y_{22}^1 Y_{22}^2), \\ Y_{jkl}^i &= \frac{\partial^3 Y_i}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l}(0, 0), \quad Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0, 0), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\begin{pmatrix} Y_1(a, w) \\ Y_2(a, w) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

— правая часть системы (4.11).

Более конкретно, для системы (4.11) построенный индекс будет иметь вид:

$$\text{In} = 6A_3 + 2A_2 = \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} - \frac{Hs_2}{In_0(1 + \mu_2^2)}(1 + 3\mu_2^2) + \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2}(3 + \mu_2^2). \quad (4.15)$$

Поскольку для данной системы

$$Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0, 0) = 0 \quad (4.16)$$

(по причине нечетности ее правой части от фазовых переменных) для любых индексов  $i, j, k$ , то следующее предложение дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при  $\text{In} \neq 0$ .

**Предложение 2.** Если  $\text{In} < 0$  ( $\text{In} > 0$ ) и при этом выполнено неравенство

$$|\mu_3 - \mu_2| < 2 \quad (4.17)$$

то начало координат фазовой плоскости  $\mathbf{R}^2\{a, w\}$  системы (4.11) ((4.3)) при критическом соотношении параметров  $\mu_3 = \mu_2$  является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.

Условие (4.17) в данном случае является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости  $\mathbf{R}^2\{a, w\}$  является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом.

Следствием известной теоремы Пуанкаре—Андрона—Хопфа [23] является

**Теорема 1.** Пусть для системы (4.3) выполнено неравенство (4.17). Тогда:

- 1) Если  $\text{In} < 0$ , то для любого фиксированного  $\mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением  $\mu_3$  от  $\mu_2$  до  $\mu_2 - \delta_2$  как  $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$ .

2) Если  $In > 0$ , то для любого фиксированного  $\mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом  $\mu_3$  от  $\mu_2$  до  $\mu_2 + \delta_1$  как  $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$ .

Проверить выполнение условия  $\mu_3 > \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_2$ ) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды  $(y_N, s)$ , или от их значений. А вот проверка условия  $In < 0$  ( $In > 0$ ) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды  $(y_N, s)$  неизвестны.

**4.2. Случай III.** Рассмотрим движение тела в среде при наличии такой следящей силы, которая обеспечивает во все время движения выполнение условия (2.8).

Тогда в правой части уравнения (2.10) вместо  $-s(\alpha)v^2/m$  должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \quad (4.18)$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы  $T$  в виде

$$T = T(v, \alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (4.19)$$

Подобно выбору функций воздействия среды, динамические функции  $s$  и  $y_N$  в системе (2.10)–(2.12) примем в виде (3.1), (3.7). При этом по-прежнему в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы.

Вводя новые безразмерные фазовую переменную и дифференцирование по формулам

$$\Omega = n_0 v \omega, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \quad (4.20)$$

система (2.10)–(2.12) приведет к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (4.21)$$

$$\alpha' = -\omega + \mu_2 \omega^2 \sin \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \cos \alpha - \frac{\mu_2}{In_0} H \omega s(\alpha) \cos \alpha, \quad (4.22)$$

$$\omega' = \frac{F(\alpha)}{In_0^2} + \mu_2 \omega^3 \cos \alpha - \frac{\mu_2}{In_0^2} \omega F(\alpha) \sin \alpha - \frac{H}{In_0} \omega s(\alpha) + \frac{\mu_2}{In_0} H \omega^2 s(\alpha) \sin \alpha,$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\mu_2 \omega^2 \cos \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{\mu_2 H}{In_0} \omega s(\alpha) \sin \alpha,$$

при этом выбирая в дальнейшем, как и выше, безразмерные параметры  $b = \mu_2$ ,  $H_1 = \mu_3$  следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad H_1 = \frac{BH}{In_0}. \quad (4.23)$$

Два последних уравнения (4.22) системы (4.21), (4.22) образуют независимую подсистему второго порядка на фазовом цилиндре  $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}$ .

Для начала исследуем устойчивости ее тривиального решения, соответствующего невозможному движению, для чего выпишем соответствующее характеристическое уравнение возле начала координат:

$$\lambda^2 + \lambda[\mu_3 - \mu_2] + 1 = 0. \quad (4.24)$$

Очевидно следующее

**Предложение 3.** При  $\mu_3 > \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_2$ ) тривиальное решение системы (4.22) асимптотически устойчиво (является отталкивающим).

Для возможного рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (4.22) при *критическом* соотношении параметров

$$\mu_3 = \mu_2. \quad (4.25)$$

Для этого сделаем следующую замену фазовых переменных  $(\alpha, \Omega) \mapsto (a, w)$  в системе (4.22):

$$\alpha = a, \quad \omega = \frac{|\omega_0|}{1 + \mu_2^2}(\mu_2 a - w), \quad \omega_0 = 1, \quad (4.26)$$

переводящую ее в систему следующую:

$$\begin{aligned} a' &= |\omega_0|w + B_1 a^3 + B_2 a^2 w + B_3 a w^2 + \bar{o}_1((a^2 + w^2)^{3/2}), \\ w' &= -|\omega_0|a + B_4 a^3 + B_5 a^2 w + B_6 a w^2 + B_7 w^3 + \bar{o}_2((a^2 + w^2)^{3/2}), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} - \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2^2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{(1 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2}{2(1 + \mu_2^2)}, \\ B_2 &= \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} - \frac{2\mu_2^2}{(1 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2^2}{2(1 + \mu_2^2)}, \\ B_3 &= \frac{\mu_2}{(1 + \mu_2^2)^2}, \\ B_4 &= -\frac{f_3}{6In_0^2} + \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2(1 + \mu_2^2)}, \\ B_5 &= -\frac{Hs_2}{2In_0} \frac{1}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{2(1 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2}{(1 + \mu_2^2)^2}, \\ B_6 &= -\frac{\mu_2^2(3 + \mu_2^2)}{(1 + \mu_2^2)^2}, \\ B_7 &= \frac{\mu_2}{(1 + \mu_2^2)^2}, \quad s_2 = s''(0), \quad f_3 = F'''(0). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Введем следующий вспомогательный индекс  $In$  подобно (4.13). Более конкретно, для системы (4.27) построенный индекс будет иметь вид:

$$In = 6B_1 + 2B_3 + 2B_5 + 6B_7 = \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} - \frac{Hs_2}{In_0} \frac{1 + 3\mu_2^2}{1 + \mu_2^2} + \frac{\mu_2}{1 + \mu_2^2} (3 + \mu_2^2), \quad (4.29)$$

совпадающий (!) с индексом (4.15) для системы (4.11).

Поскольку для данной системы

$$Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0, 0) = 0 \quad (4.30)$$

(по причине нечетности ее правой части от фазовых переменных) для любых индексов  $i, j, k$ , то следующее предложение дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при  $In \neq 0$ .

**Предложение 4.** Если  $In < 0$  ( $In > 0$ ) и при этом выполнено неравенство

$$|\mu_3 - \mu_2| < 2 \quad (4.31)$$

то начало координат фазовой плоскости  $\mathbf{R}^2\{a, w\}$  системы (4.27) ((4.22)) при критическом соотношении параметров  $\mu_3 = \mu_2$  является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.

Условие (4.31) в данном случае является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости  $\mathbf{R}^2\{a, w\}$  является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом.

Следствием известной теоремы Пуанкаре—Андронов—Хопфа [23] является

**Теорема 2.** Пусть для системы (4.22) выполнено неравенство (4.31). Тогда:

- 1) Если  $\text{In} < 0$ , то для любого фиксированного  $\mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением  $\mu_3$  от  $\mu_2$  до  $\mu_2 - \delta_2$  как  $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$ .
- 2) Если  $\text{In} > 0$ , то для любого фиксированного  $\mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом  $\mu_3$  от  $\mu_2$  до  $\mu_2 + \delta_1$  как  $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$ .

Проверить выполнение условия  $\mu_3 > \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_2$ ) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды  $(y_N, s)$ , или от их значений. А вот проверка условия  $\text{In} < 0$  ( $\text{In} > 0$ ) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды  $(y_N, s)$  неизвестны.

## 5. СВОБОДНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ (СЛУЧАЙ I)

Рассмотрим далее такой случай движения тела, когда управляющая тяга отключена, при этом тело совершает свободное движение (торможение) в сопротивляющейся среде (случай I).

Тогда в правой части уравнения (2.10) останется величина  $-s(\alpha)v^2/m$ , поскольку при этом выполнено равенство

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Подобно выбору функций воздействия среды, динамические функции  $s$  и  $y_N$  в системе (2.10)–(2.12) примем в виде (3.1), (3.7). При этом по-прежнему в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы.

Вводя новые безразмерные фазовую переменную и дифференцирование по формулам

$$\Omega = n_0 v \omega, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \quad (5.2)$$

система (2.10)–(2.12) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad (5.3)$$

$$\alpha' = -\omega + \mu_2 \omega^2 \sin \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \cos \alpha - \frac{\mu_2}{In_0} H \omega s(\alpha) \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{mn_0} \sin \alpha, \quad (5.4)$$

$$\omega' = \frac{F(\alpha)}{In_0^2} + \mu_2 \omega^3 \cos \alpha - \frac{\mu_2}{In_0^2} \omega F(\alpha) \sin \alpha - \frac{H}{In_0} \omega s(\alpha) + \frac{\mu_2}{In_0} H \omega^2 s(\alpha) \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{mn_0} \omega \cos \alpha,$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\mu_2 \omega^2 \cos \alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{\mu_2 H}{In_0} \omega s(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{mn_0} \cos \alpha,$$

при этом выбирая в дальнейшем, как и выше, безразмерные параметры  $\mu_1$ ,  $b = \mu_2$ ,  $H_1 = \mu_3$  следующим образом:

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{mn_0}, \quad b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad H_1 = \frac{BH}{In_0}. \quad (5.5)$$

Два последних уравнения (5.4) системы (5.3), (5.4) образуют независимую подсистему второго порядка на фазовом цилиндре  $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}$ .

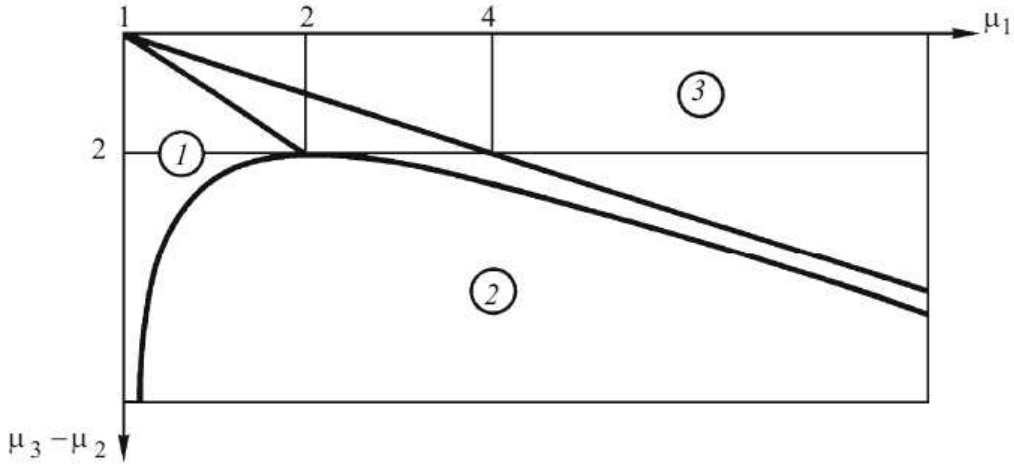


Рис. 2. Общая картина перестроек траекторий векторного поля системы (5.4) возле начала координат

Как и выше речь пойдет об исследовании устойчивости тривиального решения системы (5.4), которое, очевидно, и соответствует прямолинейному поступательному торможению (*невозмущенному движению*).

Выпишем соответствующее характеристическое уравнение возле начала координат:

$$\lambda^2 - \lambda [\mu_1 + \mu_2 - \mu_3] + \frac{\mu_1}{2} \left( \frac{\mu_1}{2} + \mu_2 - \mu_3 \right) + 1 = 0. \quad (5.6)$$

**Предложение 5.** Пусть выполнено неравенство (4.17) (или (4.31)). Тогда при  $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$ ) тривиальное решение системы (5.4) асимптотически устойчиво (является отталкивающим).

Общая картина перестроек траекторий векторного поля системы (5.4) возле начала координат представлена на рис. 2 (область 1 соответствует притягивающей точке; область 2 соответствует седловой точке; and область 3 соответствует отталкивающей точке).

Для возможного рождения предельного цикла около начала координат исследуем устойчивость тривиального решения системы (5.4) при *критическом* сочетании параметров

$$\mu_3 = \mu_1 + \mu_2. \quad (5.7)$$

Для этого сделаем следующую замену фазовых переменных  $(\alpha, \omega) \mapsto (a, w)$  в системе (5.4):

$$\alpha = a, \quad \omega = \frac{(\mu_2 + \mu_1/2)a - \omega_0 w}{1 + \mu_1 \mu_2 + \mu_2^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{1 - \frac{\mu_1^2}{4}}, \quad (5.8)$$

переводящую ее в систему следующую:

$$\begin{aligned} a' &= |\omega_0|w + C_1 a^3 + C_2 a^2 w + C_3 a w^2 + \bar{\delta}_1 ((a^2 + w^2)^{3/2}), \\ w' &= -|\omega_0|a + C_4 a^3 + C_5 a^2 w + C_6 a w^2 + C_7 w^3 + \bar{\delta}_2 ((a^2 + w^2)^{3/2}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} - \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2} + \frac{s_2}{2mn_0} - \frac{\mu_2}{2} - \frac{\mu_1}{12} + \\
 &+ \frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_1/2)}{2(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)} + \frac{\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)^2}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2}, \\
 C_2 &= \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{\mu_2\omega_0}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2} - \frac{2\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)\omega_0}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)\omega_0}{2(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)}, \\
 C_3 &= \frac{\mu_2\omega_0^2}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2}, \\
 C_4 &= - \left(1 + \frac{\mu_1\mu_2}{2}\right) \frac{f_3}{6In_0^2\omega_0} + \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{(\mu_2 + \mu_1/2)(1 + \mu_1\mu_2/2)}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)\omega_0} + \\
 &+ \frac{\mu_2 + \mu_1/2}{2(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)\omega_0} \cdot \left[ \left(\mu_2 + \frac{\mu_1}{3}\right) - \frac{\mu_1\mu_2}{6}(\mu_1 + \mu_2) \right], \\
 C_5 &= - \frac{Hs_2}{2In_0} \frac{1 + \mu_1\mu_2 - \mu_1^2/2}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2} + \frac{s_2}{2mn_0} + \frac{\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)^2}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2} + \\
 &+ \frac{2\mu_2(\mu_1 + \mu_2)^2 - 4\mu_2 - \mu_1}{4(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)}, \\
 C_6 &= - \frac{2\mu_2(\mu_2 + \mu_1/2)\omega_0}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)\omega_0}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2}, \\
 C_7 &= \frac{\mu_2\omega_0^2}{(1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)^2}, \quad s_2 = s''(0), \quad f_3 = F'''(0).
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Введем следующий вспомогательный индекс  $In$  подобно (4.13). Более конкретно, для системы (5.9) построенный индекс будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 In &= 6B_1 + 2B_3 + 2B_5 + 6B_7 = \\
 &= \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} - \frac{Hs_2}{In_0} \frac{1 + 3\mu_2^2 + 5\mu_1\mu_2/2 - \mu_1^2/2}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2} + 4\frac{s_2}{mn_0} + \\
 &+ \frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + 2\mu_1) + 3\mu_2 - \mu_1}{1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2}.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Поскольку для данной системы

$$Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0, 0) = 0 \tag{5.12}$$

(по причине нечетности ее правой части от фазовых переменных) для любых индексов  $i, j, k$ , то следующее предложение дает необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при  $In \neq 0$ .

**Предложение 6.** Если  $In < 0$  ( $In > 0$ ) и при этом выполнено неравенство (4.31), то начало координат фазовой плоскости  $\mathbf{R}^2\{a, w\}$  системы (5.9) ((5.4)) при критическом соотношении параметров  $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$  является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.

Условие (4.31) в данном случае является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости  $\mathbf{R}^2\{a, w\}$  является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом.

Следствием известной теоремы Пуанкаре—Андронova—Хопфа [23] является

**Теорема 3.** Пусть для системы (5.4) выполнено неравенство (4.31). Тогда:

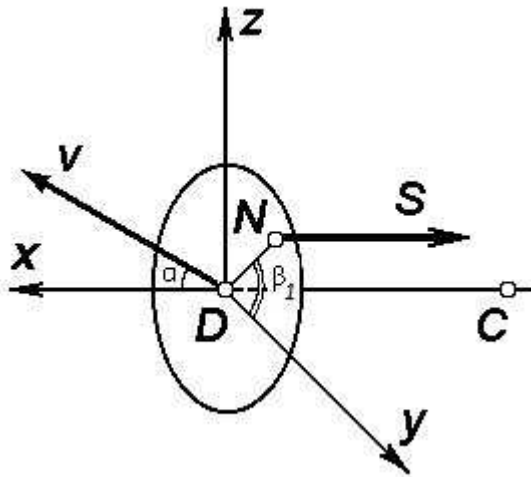


Рис. 3. Пространственное движение осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде

- 1) Если  $\text{In} < 0$ , то для любых фиксированных  $\mu_1, \mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2 - \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окруженным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением  $\mu_3$  от  $\mu_1 + \mu_2$  до  $\mu_1 + \mu_2 - \delta_2$  как  $\sqrt{|\mu_1 + \mu_2 - \mu_3|}$ .
- 2) Если  $\text{In} > 0$ , то для любых фиксированных  $\mu_1, \mu_2$  найдутся такие  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , что при  $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2 - \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$  начало координат является сильным неустойчивым фокусом; при  $\mu_3 \in (\mu_1 + \mu_2, \mu_1 + \mu_2 + \delta_1)$  начало координат является сильным устойчивым фокусом, окруженным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом  $\mu_3$  от  $\mu_1 + \mu_2$  до  $\mu_1 + \mu_2 + \delta_1$  как  $\sqrt{|\mu_1 + \mu_2 - \mu_3|}$ .

Проверить выполнение условия  $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$  ( $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$ ) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды  $(y_N, s)$ , или от их значений. А вот проверка условия  $\text{In} < 0$  ( $\text{In} > 0$ ) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды  $(y_N, s)$  неизвестны.

## 6. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Рассмотрим задачу о пространственном движении *однородного* осесимметричного твердого тела массы  $m$ , часть поверхности которого имеет форму плоского круглого диска, взаимодействующего со средой по законам струйного обтекания. Пусть остальная часть поверхности тела размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края диска, и не испытывает воздействия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа однородных круговых цилиндров в воду [30].

Предположим, что касательные силы к диску отсутствуют. Тогда сила  $\mathbf{S}$ , приложенная к телу в точке  $N$  со стороны среды, не меняет своей ориентации относительно тела (направлена по нормали к диску) и квадратична по скорости его центра  $D$  (ньютоновское сопротивление, рис. 3). Предполагается также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления (воздействия) среды.

При выполнении вышеперечисленных условий среди движений тела существует режим *прямолинейного поступательного торможения*, подобный случаю плоскопараллельного (невозмущенного) движения: тело способно совершать поступательное движение в направлении его оси симметрии, т.е. перпендикулярно плоскости диска.

Свяжем с телом правую систему координат  $Dxyz$  (рис. 3) и направим ось  $Dx$  вдоль оси геометрической симметрии тела. Оси  $Dy$  и  $Dz$  жестко свяжем с круглым диском, образовав правую систему координат. Компоненты вектора угловой скорости  $\Omega$  в системе  $Dxyz$  будем обозначать через  $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$ . Тензор инерции динамически симметричного тела во введенных связанных осях  $Dxyz$  имеет диагональный вид:

$$\text{diag}\{I_1, I_2, I_2\}. \quad (6.1)$$

Воспользуемся гипотезой квазистационарности и будем для простоты предполагать, что величина  $R_1 = DN$  определяется по крайней мере углом атаки  $\alpha$ , измеряемым между вектором скорости  $\mathbf{v}$  центра  $D$  диска и прямой  $Dx$ . Таким образом,  $DN = R_1(\alpha, \dots)$ .

Кроме того, примем величину силы сопротивления в виде  $S = |\mathbf{S}| = s_1(\alpha)v^2$ ,  $v = |\mathbf{v}|$ . Для удобства дальнейшего описания (как и в случае плоскопараллельного движения) вместо коэффициента сопротивления  $s_1(\alpha)$  введем вспомогательную знакопеременную функцию  $s(\alpha)$ :  $s_1 = s_1(\alpha) = s(\alpha) \text{sgn} \cos \alpha > 0$ . Пара функций  $R_1(\alpha, \dots)$  и  $s(\alpha)$  таким образом определяет силовые характеристики воздействия среды на диск при данных модельных предположениях.

**6.1. Динамическая часть уравнений пространственного движения.** Рассмотрим сферические координаты  $(v, \alpha, \beta_1)$  конца вектора  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_D$  скорости точки  $D$  относительно потока, в которых угол  $\beta_1$  измеряется в плоскости диска (рис. 3). Величины  $(v, \alpha, \beta_1)$  выражаются неинтегрируемыми соотношениями через циклические кинематические переменные и их производные [58]. Поэтому рассмотрим тройку  $(v, \alpha, \beta_1)$  в качестве квазискоростей, добавив к ним компоненты  $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  угловой скорости в осях, связанных с телом. Очевидно, что в таких осях

$$\mathbf{v}_D = \{v \cos \alpha, v \sin \alpha \cos \beta_1, v \sin \alpha \sin \beta_1\}. \quad (6.2)$$

В силу теорем о движении центра масс (в проекциях на связанные оси  $Dxyz$ ) и об изменении кинетического момента относительно этих осей, получаем динамическую часть дифференциальных уравнений движения, рассматриваемую в шестимерном фазовом пространстве квазискоростей ( $\sigma$  — расстояние  $DC$ ). Первая группа уравнений соответствует движению самого центра масс, а вторая группа — движению вокруг центра масс:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_y v \sin \alpha \sin \beta_1 - \Omega_z v \sin \alpha \cos \beta_1 + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) &= -\frac{s(\alpha)v^2}{m}, \\ \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_z v \cos \alpha - \\ \Omega_x v \sin \alpha \sin \beta_1 - \sigma \Omega_x \Omega_y - \sigma \dot{\Omega}_z &= 0, \\ \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \Omega_x v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\ \Omega_y v \cos \alpha - \sigma \Omega_x \Omega_z + \sigma \dot{\Omega}_y &= 0, \\ I_1 \dot{\Omega}_x &= 0, \\ I_2 \dot{\Omega}_y + (I_1 - I_2) \Omega_x \Omega_z &= -z_N s(\alpha) v^2, \\ I_2 \dot{\Omega}_z + (I_2 - I_1) \Omega_x \Omega_y &= y_N s(\alpha) v^2, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где  $(0, y_N, z_N)$  — координаты точки  $N$  в системе  $Dxyz$ .

**6.2. Движение симметричного тела под действием силы сопротивления и следящей силы и случай II.** Выделим такой класс задач о воздействии среды на тело, в котором вдоль оси его геометрической симметрии действует следящая сила (ср. со случаем плоскопараллельного движения), при некоторых условиях обеспечивающая реализацию интересных нас классов движений (наложенных связей). При этом сама следящая сила и является реакцией наложенных



связей. В случае отсутствия следящей силы тело совершает пространственное свободное торможение в сопротивляющейся среде). В данном случае следящая сила во все моменты времени обеспечивает выполнение условия (2.7) (случай **II**), а именно

$$v \equiv \text{const.} \quad (6.4)$$

Аналогично плоскопараллельному может быть рассмотрен и случай, когда следящая сила во все моменты времени обеспечивает выполнение условия (2.8) (случай **III**, см. далее).

В силу уравнений (6.3) во все моменты времени имеется циклическое инвариантное соотношение

$$\Omega_x \equiv \Omega_{x0} = \text{const.} \quad (6.5)$$

**6.3. Динамические уравнения в случае нулевой закрутки твердого тела вокруг продольной оси.** В дальнейшем будем исследовать случай нулевой закрутки твердого тела вокруг своей продольной оси, т.е. когда выполнено следующее условие:

$$\Omega_{x0} = 0. \quad (6.6)$$

Тогда независимая динамическая часть уравнений движения в четырехмерном фазовом пространстве будет иметь следующий вид:

$$\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_z v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega}_z = 0, \quad (6.7)$$

$$\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \Omega_y v \cos \alpha + \sigma \dot{\Omega}_y = 0, \quad (6.8)$$

$$I_2 \dot{\Omega}_y = -z_N s(\alpha) v^2, \quad (6.9)$$

$$I_2 \dot{\Omega}_z = y_N s(\alpha) v^2. \quad (6.10)$$

Здесь  $y_N, z_N$  — декартовы координаты в плоскости диска точки приложения  $N$  силы сопротивления.

В систему (6.7)–(6.10) входят функции  $y_N, z_N, s$  воздействия среды, для качественного определения которых (по аналогии со случаем плоскопараллельного движения) используем экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания.

Ограничимся для начала исследованием системы (6.7)–(6.10) для следующих функций (С. А. Чаплыгина) воздействия среды (подобный анализ может быть проведен и для любой пары допустимых функций  $y_N, z_N, s$  воздействия среды, см. далее):

$$y_N = A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\Omega_z}{v}, \quad z_N = A \sin \alpha \sin \beta_1 + h \frac{\Omega_y}{v}, \quad (6.11)$$

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A = \left. \frac{\partial y_N}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0, \beta_1=0} = \left. \frac{\partial z_N}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0, \beta_1=\pi/2}, \quad B = s(0), \quad h > 0.$$

При этом полученную систему назовем *опорной*.

В равенствах (6.11) коэффициент  $h$  стоит при членах, пропорциональных вращательным производным момента гидроаэродинамических сил (в данном случае силы воздействия среды) по компонентам угловой скорости твердого тела (см. также [4, 5]).

Система (6.7)–(6.10) является динамической *системой с переменной диссипацией с нулевым средним* (в данном случае по углу атаки) [48, 49]. Это означает, что интеграл по периоду угла атаки от дивергенции ее правой части, отвечающий за изменение фазового объема (после соответствующего приведения системы), равен нулю. Система является в некотором смысле «полуконсервативной».

Проектируя в дальнейшем угловые скорости на подвижные оси, не связанные с телом, так, что

$$z_1 = \Omega_y \cos \beta_1 + \Omega_z \sin \beta_1, \quad z_2 = -\Omega_y \sin \beta_1 + \Omega_z \cos \beta_1 \quad (6.12)$$

и вводя безразмерные переменные  $w_k$ ,  $k = 1, 2$ , и параметры по формулам

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh}{I_2 n_0}, \quad z_k = n_0 v w_k, \quad k = 1, 2, \quad (6.13)$$

(при этом  $\langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle$ ), получаем следующую аналитическую динамическую (опорную) систему четвертого порядка:

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_2 + b \sin \alpha, \quad (6.14)$$

$$w_2' = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_2 \cos \alpha, \quad (6.15)$$

$$w_1' = (1 + bH_1)w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_1 \cos \alpha, \quad (6.16)$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.17)$$

в которой появляется независимая подсистема третьего порядка (6.14)–(6.16).

При  $b = H_1$  дивергенция правой части системы (6.14)–(6.16) ((6.14)–(6.17)) после замены переменных  $w^* = \ln |w_1|$  тождественно равна нулю, что позволяет считать данную систему (системы) консервативной (консервативными).

**6.4. Об устойчивости прямолинейного поступательного движения.** Исследуем устойчивость ключевого режима — невозмущенного движения — по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости, т.е. по отношению к переменным  $\alpha, w_1, w_2$ . Другими словами, исследуем устойчивость тривиального решения независимой системы третьего порядка (6.14)–(6.16) (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно).

Рассмотрим следующую положительно определенную функцию в фазовом пространстве системы третьего порядка (6.14)–(6.16):

$$V(\alpha, w_1, w_2) = (1 + b^2)(w_2^2 + w_1^2) - 2bw_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha. \quad (6.18)$$

**Теорема 4.** *Функция (6.18) является для системы (6.14)–(6.16) функцией Ляпунова (Четаева), т.е. ее производная в силу системы (6.14)–(6.16) отрицательно определена при  $b < H_1$  и положительно определена при  $b > H_1$ .*

**Следствие 1.** *При  $b < H_1$  система (6.14)–(6.16) имеет в начале координат (после доопределения правых частей в нем) притягивающую особую точку, а при  $b > H_1$  — отталкивающую.*

*Доказательство теоремы 4.* Действительно, производная функции (6.18) в силу системы (6.14)–(6.16) равна

$$2(b - H_1) \cos \alpha [w_1^2 + w_2^2]. \quad (6.19)$$

□

Отметим повторно, что аналогичная теорема справедлива и для системы общего вида для любых допустимых функций  $y_N, z_N, s$  воздействия среды. Условие асимптотической устойчивости начала координат системы редуцированных динамических уравнений по переменным  $(\alpha, w_1, w_2)$  прежнее:

$$b < H_1. \quad (6.20)$$

Действительно, в более общем случае, когда допустимые функции  $y_N, z_N$  воздействия среды на твердое тело представляются в виде

$$y_N = R(\alpha) \cos \beta_1 - h_1 \frac{\Omega_z}{v}, \quad z_N = R(\alpha) \sin \beta_1 + h_1 \frac{\Omega_y}{v}, \quad (6.21)$$

а функции  $R, s$  удовлетворяют условиям (3.7) (функция  $R$  в данном случае соответствует функции  $y$ ), динамические уравнения движения примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\alpha' &= -w_2 + \frac{\sigma}{I_2 n_0} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} - \frac{\sigma h_1}{I_2} w_2 \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha}, \\ w_2' &= \frac{F(\alpha)}{I_2 n_0^2} - w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma h_1}{I_2} w_1^2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0} w_2 s(\alpha), \\ w_1' &= w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2} w_1 w_2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0} w_1 s(\alpha), \\ \beta_1' &= w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2} w_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha},\end{aligned}\tag{6.22}$$

здесь  $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$ .

Рассмотрим функцию (подобную (6.18))

$$V(\alpha, w_1, w_2) = w_2^2 + (1 + b^2)w_1^2 + [bw_2 - \sin \alpha]^2,\tag{6.23}$$

которая является положительно определенной в окрестности начала координат.

**Теорема 5.** *Функция (6.23) является для системы (6.22) функцией Ляпунова (Четаева), т.е. ее производная в силу системы (6.22) в окрестности начала координат отрицательно определена при  $\sigma R'(0) < h_1$  и положительно определена при  $\sigma R'(0) > h_1$ .*

**Следствие 2.** *При  $\sigma R'(0) < h_1$  система (6.22) имеет в начале координат (после доопределения правых частей в нем) притягивающую особую точку, а при  $\sigma R'(0) > h_1$  — отталкивающую.*

*Доказательство теоремы 5.* Действительно, производная функции (6.23) в силу системы (6.22) равна

$$2 \left( b \cos \alpha - \frac{h_1}{I_2 n_0} s(\alpha) \right) [w_1^2 + w_2^2] + 2w_2 \left\{ \frac{F(\alpha)}{I_2 n_0} - \sin \alpha \cos \alpha \right\}\tag{6.24}$$

и в окрестности начала координат представляется в виде

$$2 \left( b - \frac{h_1 B}{I_2 n_0} \right) [w_1^2 + w_2^2] + \bar{o}(\alpha^2 + z_1^2 + z_2^2).\tag{6.25}$$

□

При переходе к задаче о движении однородных круговых цилиндров можно заключить, что указанная асимптотическая устойчивость имеет место при выполнении следующего неравенства:

$$\sigma k < hD,\tag{6.26}$$

где  $D$  — диаметр цилиндра,  $\sigma$  — расстояние  $DC$ , а  $k$  и  $h$  — безразмерные параметры воздействия воды на цилиндр.

**6.5. Движение симметричного тела под действием силы сопротивления и следящей силы и случай III.** В данном случае следящая сила во все моменты времени обеспечивает выполнение условия (2.8) (случай III), а именно

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}.\tag{6.27}$$

В силу уравнений (6.3) во все моменты времени имеется циклическое инвариантное соотношение

$$\Omega_x \equiv \Omega_{x0} = \text{const}.\tag{6.28}$$

**6.6. Динамические уравнения в случае нулевой закрутки твердого тела вокруг продольной оси.** В дальнейшем будем исследовать случай нулевой закрутки твердого тела вокруг своей продольной оси, т.е. когда выполнено следующее условие:

$$\Omega_{x0} = 0. \quad (6.29)$$

Тогда в правой части первого уравнения системы (6.3) вместо  $-s(\alpha)v^2/m$  должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \quad (6.30)$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы  $T$  в виде

$$T = T(v, \alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (6.31)$$

Подобно выбору функций воздействия среды, динамические функции  $s$ ,  $y_N$  и  $z_N$  примем в виде (3.7), (6.21) (при этом функция  $R$  соответствует функции  $y$ ). При этом по-прежнему в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы.

Проектируя в дальнейшем угловые скорости на подвижные оси, не связанные с телом, так, что

$$z_1 = \Omega_y \cos \beta_1 + \Omega_z \sin \beta_1, \quad z_2 = -\Omega_y \sin \beta_1 + \Omega_z \cos \beta_1 \quad (6.32)$$

и вводя, как и ранее, новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_0 v Z_k, \quad k = 1, 2, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \quad (6.33)$$

система (6.3) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (6.34)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0} F(\alpha) \cos \alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_2 s(\alpha) \cos \alpha, \quad (6.35)$$

$$Z_2' = \frac{F(\alpha)}{I_2 n_0^2} - Z_2 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1^2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0} Z_2 s(\alpha), \quad (6.36)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1 Z_2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0} Z_1 s(\alpha), \quad (6.37)$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha}, \quad (6.38)$$

где

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_2 s(\alpha) \sin \alpha,$$

а в случае функций Чаплыгина (6.11) воздействия среды вид аналитической системы уравнений

$$v' = v \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (6.39)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \mu_2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \mu_2 \mu_3 Z_2 \cos^2 \alpha, \quad (6.40)$$

$$Z_2' = \sin \alpha \cos \alpha - Z_2 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - (1 + \mu_2 \mu_3) Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \mu_3 Z_2 \cos \alpha, \quad (6.41)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + (1 + \mu_2 \mu_3) Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \mu_3 Z_1 \cos \alpha, \quad (6.42)$$

$$\beta_1' = (1 + \mu_2 \mu_3) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.43)$$

где

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \mu_2 \mu_3 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая в дальнейшем, как и выше, безразмерные параметры  $b = \mu_2$ ,  $H_1 = \mu_3$  следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{I_2 n_0}. \quad (6.44)$$

Уравнения (6.35)–(6.38) системы (6.34)–(6.38) образуют независимую подсистему четвертого, а уравнения (6.35)–(6.37) — третьего порядка.

**6.7. Об устойчивости прямолинейного поступательного движения.** Исследуем устойчивость ключевого режима — невозмущенного движения — по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости, т.е. по отношению к переменным  $\alpha, Z_1, Z_2$ . Другими словами, исследуем устойчивость тривиального решения независимой системы третьего порядка (6.35)–(6.37) (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно).

Справедливо следующее важное утверждение.

**Предложение 7. Плоскость**

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 : Z_1 = 0\} \quad (6.45)$$

является интегральной для системы (6.35)–(6.37).

Более того, после формальной подстановки  $Z_1 = 0$  в систему (6.35)–(6.37) оставшиеся два уравнения на  $\alpha, Z_2$  образуют систему, описывающую динамику плоскопараллельного движения тела (см. выше), при этом получившаяся система совпадает с (4.22).

Таким образом, на плоскость (6.45) «укладывается» фазовый портрет из плоской динамики. Более того, плоскость (6.45) разделяет трехмерное фазовое пространство на две части:

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 : 0 < \alpha < \pi, Z_1 > 0\} \quad (6.46)$$

и

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 : 0 < \alpha < \pi, Z_1 < 0\}, \quad (6.47)$$

в каждой из которых движение происходит самостоятельно. Но не произвольно друг от друга, поскольку в системе присутствует следующая симметрия:

- i)  $\alpha$ - и  $Z_2$ -составляющие векторного поля системы (6.35)–(6.37) не меняют знаки при симметрии

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

относительно плоскости (6.45);

- ii)  $Z_1$ -составляющая векторного поля системы (6.35)–(6.37) меняет знак при симметрии (6.48) относительно плоскости (6.45).

Последние факты говорят о том, что систему (6.35)–(6.37) достаточно исследовать в полуограниченном слое (6.46), хотя полноценным фазовым пространством его считать нельзя.

Важным следствием последних замечаний является возможность использования функции

$$V_1(\alpha, Z_1) = Z_1 \sin \alpha \quad (6.49)$$

в качестве функции Ляпунова (Четаева) в полуограниченном слое (6.46), поскольку в нем данная функция положительно определена.

**Теорема 6.** Функция (6.49) является для системы (6.35)–(6.37) функцией Ляпунова (Четаева), т.е. ее производная в силу системы (6.35)–(6.37) отрицательно определена при  $\mu_2 < \mu_3$  и положительно определена при  $\mu_2 > \mu_3$ .

**Следствие 3.** При  $\mu_2 < \mu_3$  система (6.35)–(6.37) имеет в начале координат (после доопределения правых частей в нем) притягивающую особую точку, а при  $\mu_2 > \mu_3$  — отталкивающую.

*Доказательство теоремы 6.* Действительно, производная функции (6.49) в силу системы (6.35)–(6.37) представляется в виде

$$(\mu_2 - \mu_3)Z_1\alpha + \bar{\sigma}(\alpha^2 + Z_1^2 + Z_2^2). \quad (6.50)$$

□

В частности, аналогичная теорема справедлива и для систем вида (6.40)–(6.42), взятой для функций Чаплыгина (6.11) воздействия среды.

Рассмотрим также функцию (подобную (6.18))

$$V(\alpha, Z_1, Z_2) = Z_2^2 + (1 + b^2)Z_1^2 + [bZ_2 - \sin \alpha]^2, \quad (6.51)$$

которая является положительно определенной в окрестности начала координат.

**Теорема 7.** *Функция (6.51) является для системы (6.35)–(6.37) функцией Ляпунова (Четаева), т.е. ее производная в силу системы (6.35)–(6.37) отрицательно определена при  $\mu_2 < \mu_3$  и положительно определена при  $\mu_2 > \mu_3$ .*

**Следствие 4.** *При  $\mu_2 < \mu_3$  система (6.35)–(6.37) имеет в начале координат (после доопределения правых частей в нем) притягивающую особую точку, а при  $\mu_2 > \mu_3$  — отталкивающую.*

*Доказательство теоремы 7.* Действительно, производная функции (6.51) в силу системы (6.35)–(6.37) представляется в виде

$$2(\mu_2 - \mu_3)(Z_1^2 + Z_2^2) + \bar{\sigma}(\alpha^2 + Z_1^2 + Z_2^2). \quad (6.52)$$

□

При переходе к задаче о движении однородных круговых цилиндров можно заключить, что указанная асимптотическая устойчивость имеет место при выполнении следующего неравенства:

$$\sigma k < hD, \quad (6.53)$$

где  $D$  — диаметр цилиндра,  $\sigma$  — расстояние  $DC$ , а  $k$  и  $h$  — безразмерные параметры воздействия воды на цилиндр.

## 7. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ СВОБОДНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ (СЛУЧАЙ I)

Рассмотрим далее такой случай движения тела, когда управляющая тяга отключена, при этом тело совершает пространственное свободное движение (торможение) в сопротивляющейся среде (случай I).

Тогда в правой части первого уравнения системы (6.3) так и останется величина  $-s(\alpha)v^2/m$ , поскольку при этом выполнено равенство

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}. \quad (7.1)$$

Подобно выбору функций воздействия среды, динамические функции  $s$ ,  $y_N$  и  $z_N$  в системе (6.3) примем в виде (3.7), (6.21) (при этом функция  $R$  соответствует функции  $y$ ). При этом по-прежнему в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы.

**7.1. Динамические уравнения движения симметричного тела под действием силы сопротивления при отсутствии собственного вращения (задача о пространственном свободном торможении).** В силу уравнений (6.3) во все моменты времени имеется циклическое инвариантное соотношение

$$\Omega_x \equiv \Omega_{x0} = \text{const}. \quad (7.2)$$

В дальнейшем будем исследовать случай нулевой закрутки твердого тела вокруг своей продольной оси, т.е. когда выполнено следующее условие:

$$\Omega_{x0} = 0. \quad (7.3)$$

Проектируя в дальнейшем угловые скорости на подвижные оси, не связанные с телом, так, что

$$z_1 = \Omega_y \cos \beta_1 + \Omega_z \sin \beta_1, \quad z_2 = -\Omega_y \sin \beta_1 + \Omega_z \cos \beta_1 \quad (7.4)$$

и вводя, как и ранее, новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_0 v Z_k, \quad k = 1, 2, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \quad (7.5)$$

система (6.3) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (7.6)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0} F(\alpha) \cos \alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_2 s(\alpha) \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m n_0} \cos \alpha, \quad (7.7)$$

$$Z_2' = \frac{F(\alpha)}{I_2 n_0^2} - Z_2 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1^2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0} Z_2 s(\alpha), \quad (7.8)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1 Z_2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0} Z_1 s(\alpha), \quad (7.9)$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha}, \quad (7.10)$$

где

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m n_0} \cos \alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2} Z_2 s(\alpha) \sin \alpha,$$

а в случае функций Чаплыгина воздействия среды вид аналитической системы уравнений

$$v' = v \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (7.11)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \mu_2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \mu_2 \mu_3 Z_2 \cos^2 \alpha + \frac{\mu_1}{2} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (7.12)$$

$$Z_2' = \sin \alpha \cos \alpha - Z_2 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - (1 + \mu_2 \mu_3) Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \mu_3 Z_2 \cos \alpha, \quad (7.13)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + (1 + \mu_2 \mu_3) Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \mu_3 Z_1 \cos \alpha, \quad (7.14)$$

$$\beta_1' = (1 + \mu_2 \mu_3) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (7.15)$$

где

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{\mu_1}{2} \cos^2 \alpha - \mu_2 \mu_3 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая в дальнейшем, как и выше, безразмерные параметры  $\mu_1$ ,  $b = \mu_2$ ,  $H_1 = \mu_3$  следующим образом:

$$\mu_1 = 2 \frac{B}{m n_0}, \quad b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad H_1 = \frac{B h_1}{I_2 n_0}. \quad (7.16)$$

Уравнения (7.7)–(7.10) системы (7.6)–(7.10) образуют независимую подсистему четвертого, а уравнения (7.7)–(7.9) – третьего порядка.

**7.2. Об устойчивости прямолинейного поступательного торможения.** Исследуем устойчивость ключевого режима — невозмущенного движения — по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости, т.е. по отношению к переменным  $\alpha, Z_1, Z_2$ . Другими словами, исследуем устойчивость тривиального решения независимой системы третьего порядка (7.7)–(7.9) (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно).

Справедливо следующее важное утверждение.

**Предложение 8.** *Плоскость*

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 : Z_1 = 0\} \quad (7.17)$$

*является интегральной для системы (7.7)–(7.9).*

Более того, после формальной подстановки  $Z_1 = 0$  в систему (7.7)–(7.9) оставшиеся два уравнения на  $\alpha, Z_2$  образуют систему, описывающую динамику плоскопараллельного движения тела (см. выше), при этом получившаяся система совпадает с (5.4).

Таким образом, на плоскость (7.17) «укладывается» фазовый портрет из плоской динамики. Более того, плоскость (7.17) разделяет трехмерное фазовое пространство на две части:

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 : 0 < \alpha < \pi, Z_1 > 0\} \quad (7.18)$$

и

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 : 0 < \alpha < \pi, Z_1 < 0\}, \quad (7.19)$$

в каждой из которых движение происходит самостоятельно. Но не произвольно друг от друга, поскольку в системе присутствует симметрия (6.48).

Последние факты говорят о том, что систему (7.7)–(7.9) достаточно исследовать в полуограниченном слое (7.18), хотя полноценным фазовым пространством его считать нельзя.

Важным следствием последних замечаний является возможность использования функции

$$V_1(\alpha, Z_1) = Z_1 \sin \alpha \quad (7.20)$$

в качестве функции Ляпунова (Четаева) в полуограниченном слое (7.18), поскольку в нем данная функция положительно определена.

**Теорема 8.** *Функция (7.20) является для системы (7.7)–(7.9) функцией Ляпунова (Четаева), т.е. ее производная в силу системы (7.7)–(7.9) отрицательно определена при  $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$  и положительно определена при  $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$ .*

**Следствие 5.** *При  $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$  система (7.7)–(7.9) имеет в начале координат (после доопределения правых частей в нем) притягивающую особую точку, а при  $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$  — отталкивающую.*

*Доказательство теоремы 8.* Действительно, производная функции (7.20) в силу системы (7.7)–(7.9) представляется в виде

$$(\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)Z_1\alpha + \bar{v}(\alpha^2 + Z_1^2 + Z_2^2). \quad (7.21)$$

□

В частности, аналогичная теорема справедлива и для систем вида (7.12)–(7.14), взятой для функций Чаплыгина (6.11) воздействия среды.

При переходе к задаче о движении однородных круговых цилиндров можно заключить, что указанная асимптотическая устойчивость имеет место при выполнении следующего неравенства:

$$\sigma k + \frac{2I_2}{mD} < hD, \quad (7.22)$$



где  $D$  — диаметр цилиндра,  $\sigma$  — расстояние  $DC$ , а  $k$  и  $h$  — безразмерные параметры воздействия воды на цилиндр, или

$$\sigma Dk + 2r_1^2 < hD^2, \quad (7.23)$$

где  $r_1$  — радиус инерции цилиндра (подробнее см. следующую главу).

Видно, что теорема 8 дает такие же условия асимптотической устойчивости по части переменных  $(\alpha, Z_1, Z_2)$ , что и предложение 5, в котором фигурируют динамические системы из динамики плоскопараллельного движения.

В случае же пространственного движения полученные системы имеют неопределенность в начале координат, что вызвано вырожденностью сферических координат конца вектора  $\mathbf{v}$  скорости центра переднего диска (кавитатора) и преодолевается доопределением правых частей динамических систем.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ К ДВУМЕРНОЙ И ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧАМ

Итак, неустойчивость простейшего движения тела — прямолинейного поступательного торможения — используется в методических целях, а именно, для определения неизвестных параметров воздействия среды на твердое тело в условиях квазистационарности.

Эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров, проведенный в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова, подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твердое тело необходимо учитывать также дополнительный параметр, вносящий в систему диссипацию.

При изучении класса торможений тела с конечными углами атаки главным вопросом является нахождение таких условий, при которых существуют автоколебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения. Возникает, таким образом, необходимость полного нелинейного исследования.

Начальным этапом такого исследования является пренебрежение демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело. На функциональном языке это означает предположение о том, что пара динамических функций, определяющих воздействие среды, зависит лишь от одного параметра — угла атаки. Динамические системы, возникающие при таком нелинейном описании, носят характер систем с переменной диссипацией. Поэтому появляется необходимость создания методики исследования таких систем.

Вообще, динамика твердого тела, взаимодействующего со средой, — как раз та область, где обычно возникают либо системы с переменной диссипацией с ненулевым средним (задача о свободном торможении твердого тела), либо системы, в которых потеря энергии в среднем за период может обращаться в нуль (задача о движении твердого тела в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы). В работе используется такая методика, благодаря которой удается до конца аналитически исследовать некоторые модельные задачи о плоскопараллельном и пространственном движении твердого тела.

При качественном описании взаимодействия тела со средой по причине использования экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания возникает определенный разброс в моделировании силомоментных характеристик. Это делает естественным введение определения относительной грубости (относительной структурной устойчивости) и доказательство такой грубости для исследуемых систем. При этом многие из рассматриваемых систем получаются просто (абсолютно) грубыми по Андронову—Понтрягину в обычном смысле.

Весь спектр результатов, найденных при простейшем предположении об отсутствии демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело, позволяет сделать вывод о невозможности нахождения таких условий, при которых существовали бы автоколебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения.

Данная работа систематизирует исследование движения тела в среде при учете демпфирующего момента со стороны среды. Такой момент вносит в систему дополнительную диссипацию, в

результате чего прямолинейное поступательное торможение тела в принципе может стать устойчивым.

Таким образом, учет демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос: при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний.

## 9. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим также некоторые динамические уравнения движения четырехмерного твердого тела, рассмотренные в [48].

**9.1. Система динамических уравнений движения при наличии неинтегрируемой связи.** Рассмотрим систему динамических уравнений, которую можно рассматривать на касательном расслоении  $T_*\mathbf{S}^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$  трехмерной сферы  $\mathbf{S}^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$  и которая описывает движение динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии неинтегрируемой связи [53]:

$$\dot{\alpha} = -(1 + \mu_2\mu_3)z_3 + \mu_2 \sin \alpha, \quad (9.1)$$

$$\dot{z}_3 = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + \mu_2\mu_3)(z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \mu_3 z_3 \cos \alpha, \quad (9.2)$$

$$\dot{z}_2 = (1 + \mu_2\mu_3)z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + \mu_2\mu_3)z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \mu_3 z_2 \cos \alpha, \quad (9.3)$$

$$\dot{z}_1 = (1 + \mu_2\mu_3)z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + \mu_2\mu_3)z_1 z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \mu_3 z_1 \cos \alpha, \quad (9.4)$$

$$\dot{\beta}_1 = (1 + \mu_2\mu_3)z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (9.5)$$

$$\dot{\beta}_2 = -(1 + \mu_2\mu_3)z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \quad (9.6)$$

Исследуем устойчивость ее тривиального решения по отношению к возмущениям переменных  $\alpha, z_1, z_2, z_3$  (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно).

Рассмотрим функцию

$$V(\alpha, z_1, z_2, z_3) = (1 + \mu_2^2)(z_3^2 + z_2^2 + z_1^2) - 2\mu_2 z_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha, \quad (9.7)$$

которая является положительно определенной в окрестности начала координат.

**Теорема 9.** *Функция (9.7) является для системы (9.1)–(9.6) функцией Ляпунова (Четаева), т.е. ее производная в силу системы (9.1)–(9.6) отрицательно определена при  $\mu_2 < \mu_3$  и положительно определена при  $\mu_2 > \mu_3$ .*

**Следствие 6.** *При  $\mu_2 < \mu_3$  система (9.1)–(9.6) имеет в начале координат (после доопределения правых частей в нем) притягивающую особую точку, а при  $\mu_2 > \mu_3$  — отталкивающую.*

*Доказательство теоремы 9.* Действительно, производная функции (9.7) в силу системы (9.1)–(9.6) представляется в виде

$$2(\mu_2 - \mu_3)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \cos \alpha. \quad (9.8)$$

□

**9.2. Система динамических уравнений движения под действием неконсервативной пары сил.** Рассмотрим систему динамических уравнений, которую можно рассматривать на касательном расслоении  $T_*\mathbf{S}^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$  трехмерной сферы  $\mathbf{S}^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$  и которая описывает движение динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле под действие пары сил [48, 53]:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (9.9)$$

$$\alpha' = -Z_3 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha + \mu_2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \mu_2\mu_3 Z_3 \cos^2 \alpha, \quad (9.10)$$

$$\begin{aligned} Z_3' = & \sin \alpha \cos \alpha - (1 + \mu_2\mu_3) (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ & + \mu_2 Z_3 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - \mu_2 Z_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ & + \mu_2\mu_3 Z_3^2 \sin \alpha \cos \alpha - \mu_3 Z_3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} Z_2' = & (1 + \mu_2\mu_3) Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + \mu_2\mu_3) Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ & + \mu_2 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - \mu_2 Z_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ & + \mu_2\mu_3 Z_2 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - \mu_3 Z_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} Z_1' = & (1 + \mu_2\mu_3) Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + \mu_2\mu_3) Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ & + \mu_2 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - \mu_2 Z_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ & + \mu_2\mu_3 Z_1 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - \mu_3 Z_1 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$\beta_1' = (1 + \mu_2\mu_3) Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (9.14)$$

$$\beta_2' = -(1 + \mu_2\mu_3) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (9.15)$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \mu_2\mu_3 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Исследуем устойчивость ее тривиального решения по отношению к возмущениям переменных  $\alpha, Z_1, Z_2, Z_3$  (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно).

Рассмотрим функцию

$$V(\alpha, Z_1, Z_2, Z_3) = (1 + \mu_2^2)(Z_3^2 + Z_2^2 + Z_1^2) - 2\mu_2 Z_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha, \quad (9.16)$$

которая является положительно определенной в окрестности начала координат.

**Теорема 10.** *Функция (9.16) является для системы (9.9)–(9.15) функцией Ляпунова (Четаева), т.е. ее производная в силу системы (9.9)–(9.15) отрицательно определена при  $\mu_2 < \mu_3$  и положительно определена при  $\mu_2 > \mu_3$ .*

**Следствие 7.** *При  $\mu_2 < \mu_3$  система (9.9)–(9.15) имеет в начале координат (после доопределения правых частей в нем) притягивающую особую точку, а при  $\mu_2 > \mu_3$  — отталкивающую.*

*Доказательство теоремы 10.* Действительно, производная функции (9.16) в силу системы (9.9)–(9.15) представляется в виде

$$2(\mu_2 - \mu_3)(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) + \bar{\sigma}(\alpha^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2). \quad (9.17)$$

□

## ГЛАВА 2

АНАЛИЗ ДАННЫХ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ  
ПО ДВИЖЕНИЮ ТЕЛ В СРЕДЕ

Предлагаемая глава представляет собой очередной этап исследования задачи плоскопараллельного движения твердого тела, взаимодействующего со средой лишь через передний плоский участок своей внешней поверхности. При построении силового воздействия среды используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности (например, о входе однородных круговых цилиндров в воду). Движение среды не изучается, а рассматривается такая задача динамики твердого тела, в которой характерное время движения тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра. Если в [57] предъявляются условия асимптотической устойчивости прямолинейного поступательного торможения, в [56] получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов в пространстве квазискоростей, то в данной главе подготовлен количественный материал для проведения дальнейших натурных экспериментов о движении в среде полых круговых цилиндров.

## 10. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Дадим краткое резюме предыдущим этапам исследований. Итак, по причине сложности нелинейного анализа начальным их этапом явилось пренебрежение зависимостью момента силы воздействия среды от угловой скорости тела и использование такой зависимости лишь от угла атаки.

С практической точки зрения важен вопрос исследования устойчивости так называемого невозмущенного (прямолинейного поступательного) движения, при котором скорости точек тела перпендикулярны пластине (кавитатору).

Весь спектр результатов, найденных при указанном простейшем предположении, позволял сделать вывод о невозможности нахождения таких условий, при которых у приведенных систем существовали бы решения, соответствующие угловым колебаниям тела ограниченной амплитуды.

Эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твердое тело действительно необходимо учитывать зависимость момента силы воздействия среды и от угловой скорости тела. При этом в уравнениях движения возникают дополнительные члены, вносящие в систему диссипацию.

При изучении движения тела с конечными углами атаки основным вопросом нелинейного анализа является нахождение таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле невозмущенного движения. Это подтверждает необходимость полного нелинейного исследования.

В более ранних работах удалось использовать неустойчивость прямолинейного поступательного торможения в методических целях, а именно, для определения неизвестных параметров воздействия среды на твердое тело в условиях квазистационарности.

Учет демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос нелинейного анализа: при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний, которые обуславливаются учетом дополнительной зависимости воздействия среды от угловой скорости тела, что вносит в систему дополнительную диссипацию.

Более того, в процессе применения методики исследования диссипативных динамических систем определенного вида получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре, состоящее из бесконечного множества топологически неэквивалентных фазовых портретов, меняющих свой топологический тип при изменении параметров системы вырожденным образом.

## 11. ПОДГОТОВКА ДАННЫХ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ НАТУРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

**11.1. Задача о входе в воду однородных круговых цилиндров.** Вернемся далее к задаче о входе в воду однородных круговых цилиндров. Значения физических параметров цилиндров, при которых прямолинейное поступательное торможение в принципе может стать устойчивым, должны быть связаны соотношением

$$\mu_3 > \mu_1 + \mu_2 \quad (11.1)$$

или

$$h \frac{mD^2}{I} - 2 - k \frac{m\sigma D}{I} > 0. \quad (11.2)$$

При этом если величина, стоящая в левой части неравенства (11.2), равна нулю, то будем говорить о *критическом случае*.

Напомним, что здесь  $D$  — диаметр кругового цилиндра,  $\sigma$  — расстояние от центра масс до переднего торца,  $I, m$  — инерционно-массовые характеристики цилиндра, постоянные  $k$  и  $h$  — безразмерные параметры воздействия среды на цилиндр.

Для параметров  $k, h$  воздействия воды на тело с передним круглым торцом уже была принята оценка  $k = h = 0,1$ . Таким образом, условие (11.2) позволяет попытаться «сконструировать» твердое тело — круговой цилиндр, для которого прямолинейное поступательное торможение может стать устойчивым. Для этого осталось выбрать параметры  $\sigma, D, I, m$  цилиндра, исходя из условия (11.2).

Анализируя неравенство (11.2), можно сделать следующий вывод. Инерционно-массовые параметры однородных цилиндров таковы, что неравенство (11.2) при  $h = 0,1$  удовлетворить невозможно. Действительно, при данном значении  $h = 0,1$  левая часть (11.2) представляется в виде

$$F_1(k, h, m, I, \sigma, D)|_{k=h=0,1} = h \frac{mD^2}{I} - 2 - k \frac{m\sigma D}{I} \Big|_{k=h=0,1} = F_2(\sigma, D). \quad (11.3)$$

правая часть которого, в свою очередь, с точностью до положительного множителя всегда принимает следующее отрицательное значение:

$$-3D^2 - 12\sigma D - 80\sigma^2, \quad (11.4)$$

что соответствует экспоненциальной неустойчивости прямолинейного поступательного торможения. Здесь учитывается, что центральный момент инерции цилиндра представляется в виде

$$I = m \left( \frac{\sigma^2}{3} + \frac{D^2}{16} \right). \quad (11.5)$$

Более того, если исследовать левую часть (11.2) при изменении значения  $h$ , то она может достигать нуля лишь при следующем наименьшем критическом значении  $h_*$ :

$$\left( 10h_* - \frac{5}{4} \right) - \bar{\sigma} - \frac{20}{3}\bar{\sigma}^2 = 0, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{D}, \quad (11.6)$$

превосходящем принятое ранее значение  $h = 0,1$  и равном

$$h_* = 0,125. \quad (11.7)$$

Условия (11.6) и (11.7) позволяют сделать следующий промежуточный вывод. Прямолинейное поступательное торможение однородного кругового цилиндра в воде *не может быть устойчивым* по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости.

Тем не менее, отметим, что задача исследуемой устойчивости решается в соответствии с ранее принятой оценкой на данный коэффициент:  $h = 0,1$ .

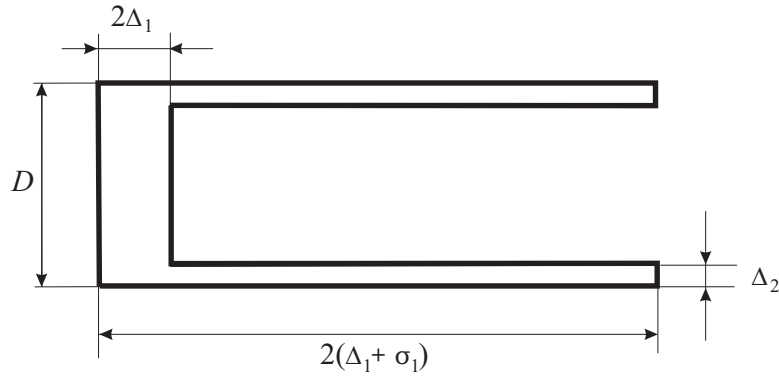


Рис. 4. Полый цилиндр («гильза»)

**11.2. Задача о входе в воду полых круговых цилиндров.** Поставим теперь задачу определения геометрических и инерционно-массовых параметров составного твердого тела — полого цилиндра — для достижения указанной устойчивости. А именно, представим себе некоторый полый цилиндр («гильзу», рис. 4), геометрические и инерционно-массовые характеристики которого в дальнейшем приведут к выполнению искомого неравенства при уже фиксированном нами значении  $h = 0, 1$ .

Исследуемое составное твердое тело представляет собой переднюю однородную часть (цилиндр) диаметра  $D$  и высоты  $2\Delta_1$ , который продолжается боковыми стенками длины  $2\sigma_1$  и ширины  $\Delta_2$  (рис. 4).

Вычислим параметры составного тела, входящие в неравенство (11.2), — расстояние от центра масс до переднего круглого торца  $\sigma$ , а также (центральный) радиус инерции тела  $\rho$ . Данные величины выражаются следующими формулами:

$$\sigma = \frac{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)(\sigma_1 + 2\Delta_1)}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)}, \quad (11.8)$$

$$\begin{aligned} \rho^2 = & \frac{\Delta_1^2 D^2 +}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)} \left\{ \frac{4}{3} \Delta_1^2 + \frac{D^2}{16} - 2\Delta_1 \sigma + \sigma^2 \right\} + \\ & + \frac{4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)} \times \\ & \times \left\{ \frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{D^2}{8} - \frac{\Delta_2 (D - \Delta_2)}{4} + \frac{D^4 \Delta_1^2 (\sigma_1 + \Delta_1)^2}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1 \Delta_2 (D - \Delta_2)} \right\}. \quad (11.9) \end{aligned}$$

Можно использовать полные равенства (11.8), (11.9), но это не имеет решающего значения, поскольку достаточно принять следующие допущения:

$$\Delta_1^2 \approx \Delta_2^2 \approx \Delta_1 \Delta_2 \approx 0. \quad (11.10)$$

Далее, все геометрические параметры будем считать безразмерными:

$$\overline{\Delta}_1 = \frac{\Delta_1}{D}, \quad \overline{\Delta}_2 = \frac{\Delta_2}{D}, \quad \overline{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{D}, \quad (11.11)$$

при этом в дальнейшем, для простоты записи, везде черту опустим.

Тогда левая часть (11.2) при допущениях (11.10) при  $h = 0, 1$  в критическом случае приведет к равенству

$$\Delta_1 \left( -\frac{1}{4} \right) + \sigma_1 \Delta_2 \left( \frac{7}{2} \right) - 4\sigma_1^2 \Delta_2 = 0. \quad (11.12)$$

Найдем критическое значение  $\sigma_1^*$  безразмерной длины боковых стенок составного тела. Оно равно

$$\sigma_1^* = \frac{7}{16} + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{49}{4} - 4 \frac{\Delta_1}{\Delta_2}}. \quad (11.13)$$

Из равенства (11.13) видно, что величина  $\Delta_1/\Delta_2$  может колебаться лишь в следующих пределах:

$$0 < \frac{\Delta_1}{\Delta_2} < \frac{49}{16} = 3,0625. \quad (11.14)$$

Формально, при  $\Delta_1 \rightarrow 0$  (передний торец стремится к бесконечно тонкому диску) искомое критическое значение стремится к

$$\sigma_1^* = 0,875. \quad (11.15)$$

В частном интересном случае при  $\Delta_1 = \Delta_2$  оно найдется в виде

$$\sigma_1^* = \frac{1}{16}(7 + \sqrt{33}) \approx 0,797, \quad (11.16)$$

а также при  $\Delta_1/\Delta_2 \rightarrow 49/16$  искомое критическое значение стремится к

$$\sigma_1^* = 0,4375. \quad (11.17)$$

Таким образом, можно выбирать значение  $\sigma_1^*$  в пределах

$$0,4375 \leq \sigma_1^* \leq 0,875, \quad (11.18)$$

несмотря на то, что выражения (11.15)–(11.17) затрагивают лишь удобные частные случаи.

Так, в частности, если принять  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0,1$  (т.е., если  $D = 30$  мм, то  $\Delta_1 = \Delta_2 = 3$  мм), тогда размерная длина боковых стенок должна быть равна  $2\sigma_1 \approx 1,6D \approx 47,8$  мм, а общая «критическая» длина всего составного тела составит  $47,8 + 6 \approx 54$  мм.

В заключение заметим, что если же для проведения эксперимента потребуется «скорректировать» постоянную  $h$  воздействия среды на тело, то искомое выражение для величины  $\sigma_1^*$  представится следующим образом. Линеаризованное критическое равенство (11.12) перепишется в виде

$$\Delta_1 \left(10h - \frac{5}{4}\right) + \sigma_1 \Delta_2 \left(40h - \frac{1}{2}\right) - 4\sigma_1^2 \Delta_2 = 0, \quad (11.19)$$

а искомая величина  $\sigma_1^*$  найдется из равенства

$$\sigma_1^* = \frac{1}{8} \left\{ \left(40h - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(40h - \frac{1}{2}\right)^2 + 16 \left(10h - \frac{5}{4}\right) \frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right\}. \quad (11.20)$$

**11.3. Возможности движения твердого тела в сопротивляющейся среде с ограниченными углами атаки.** Как уже отмечалось в предыдущих разделах, если параметры задачи допускают наличие критического случая (левая часть равенства (11.2) равна нулю), то в зависимости от старших производных функций воздействия среды  $y_N$  и  $s$  прямолинейное поступательное торможение тела может быть или устойчивым, или неустойчивым по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости.

Выше найдены достаточные условия для такой устойчивости или неустойчивости, включающие неравенства на старшие производные функций воздействия среды. Но главная трудность заключается в том, что измерить в эксперименте данные производные в явном виде не представляется возможным.

Продemonстрируем, как можно исследовать поведение тела около прямолинейного поступательного торможения (т.е. устойчивые или неустойчивые угловые колебания), используя экспериментальную информацию, тем самым неявно оценивая старшие производные функций воздействия среды.

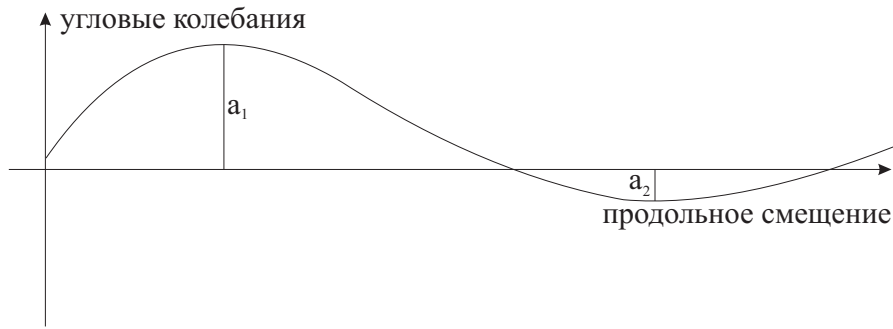


Рис. 5

Сначала отметим, что следующее неравенство, гарантирующее *колебательную* устойчивость или неустойчивость, по крайней мере в случае предложенных выше изделий, выполнено (можно несколько изменить массу тела, изготавливая изделия из металлов различной плотности):

$$\frac{DI\rho_0}{m^2} < \frac{8k}{c_x\pi}, \quad (11.21)$$

где к известным параметрам добавлены:  $\rho_0$  — плотность жидкости (в данном случае воды),  $c_x = 0,82$  — безразмерный коэффициент лобового сопротивления.

Действительно, в системе СГС неравенство (11.21) эквивалентно  $D\rho^2/m < 0,31$ ,  $[m] = z$ ,  $[D] = [\rho] = \text{см}$ , где  $\rho$  — (центральный) радиус инерции, выражаемый формулой (11.9).

Далее, во время проведения эксперимента в случае колебательного характера движения необходимо получение информации не менее чем о *трех* полуколебаниях с амплитудами  $a_1, a_2, a_3$  (т.е. полутора периодов колебаний). Исследуя значения параметров, близких к критическому случаю, из теоремы о рождении предельных циклов получаем *два вывода* об устойчивости ключевого режима — прямолинейного поступательного торможения и о характере угловых колебаний тела (см. ниже **I** и **II**).

Сначала сделаем важное замечание о последовательных изменениях значений измеряемых в эксперименте амплитуд  $a_1, a_2, a_3$ .

**Замечание 1.** *Последовательность отношений величин  $a_1, a_2, a_3, \dots$*

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots \quad (11.22)$$

(и далее, если удастся измерить не три полуколебания, а более) во многом может определить характер колебательного процесса. Так, если величины

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad (11.23)$$

напоминают возрастающую (убывающую) геометрическую прогрессию (в частности, отношения  $a_2/a_1, a_3/a_2$  примерно равны), то с долей уверенности можно говорить о достаточно быстром росте (затухании) угловых колебаний. Если же величины (11.23) возрастают, а их отношения  $a_2/a_1, a_3/a_2, \dots$  (из (11.22)) явно убывают, то следует говорить о возможном переходе к угловым колебаниям ограниченной амплитуды.

**I.** Пусть после проведения натурального эксперимента с параметрами, соответствующими *критическому* случаю, наблюдаются устойчивые колебания по отношению к углу отклонения. Тогда при малом уменьшении продольной длины тела (см. пример 1 ниже) может возникнуть затухание угловых колебаний (рис. 5).

При малом же увеличении продольной длины тела (см. пример 2 ниже) следует ждать роста угловых колебаний и в дальнейшем могут наблюдаться устойчивые угловые автоколебания тела (рис. 6). При этом надо обратить внимание на скорость изменения амплитуды колебаний (см. замечание 1).



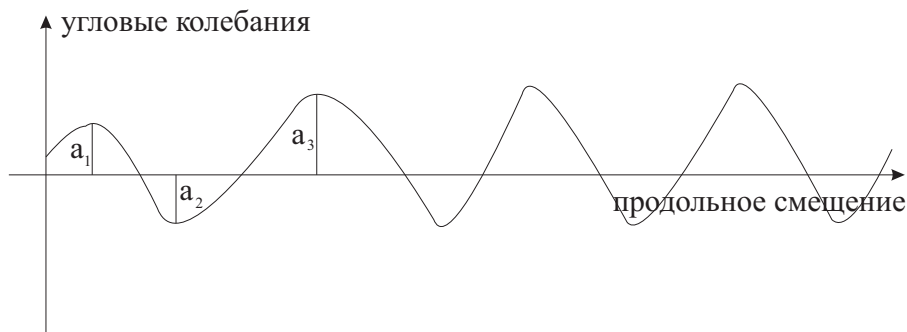


Рис. 6

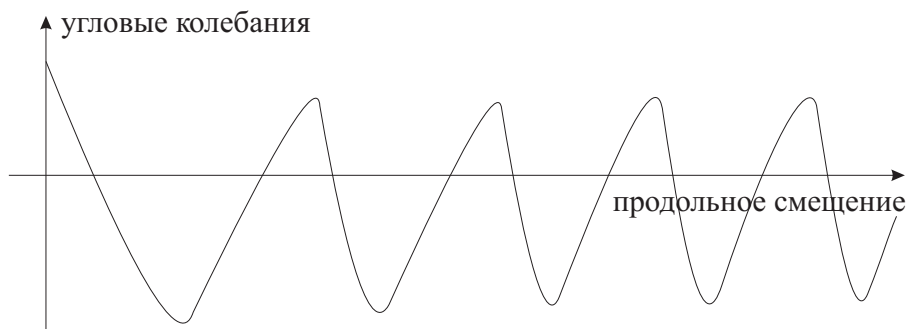


Рис. 7

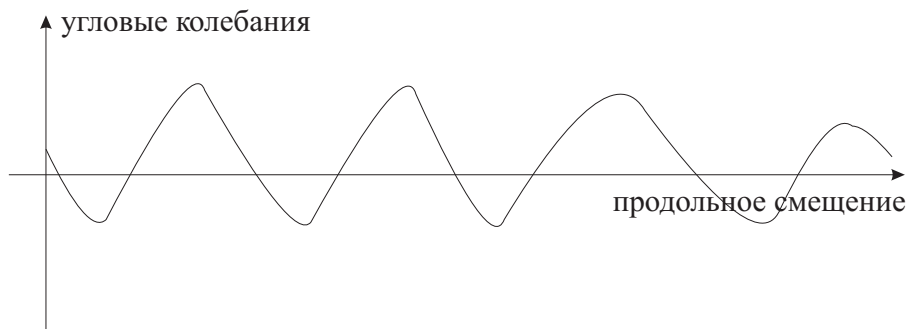


Рис. 8

Более того, проводя эксперимент повторно для изделия из примера 2 при достаточно больших возмущениях начального угла атаки и (или) угловой скорости, возможен переход к устойчивым угловым автоколебаниям с конечными амплитудами (рис. 7), аналогичным предыдущему случаю на рис. 6.

**Пример 1.** : общая длина тела равна  $50 < 54$  (мм).

**Пример 2.** : общая длина тела равна  $60 > 54$  (мм).

**II.** Пусть после проведения натурального эксперимента с параметрами, соответствующими *критическому* случаю, наблюдается рост угловых колебаний. Тогда при малом уменьшении продольной длины тела (см. пример 1 выше) также можно говорить об устойчивых колебаниях ограниченной амплитуды (т.е. переход от неустойчивых угловых автоколебаний тела, рис. 8). При этом надо обратить внимание на скорость изменения амплитуды колебаний (см. замечание 1).

Более того, проводя эксперимент повторно для изделия из примера 1 при конечных возмущениях начального угла атаки и (или) угловой скорости, возможен переход от неустойчивых

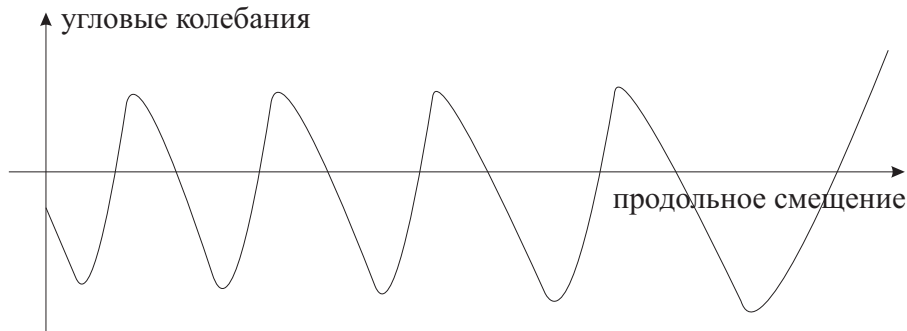


Рис. 9

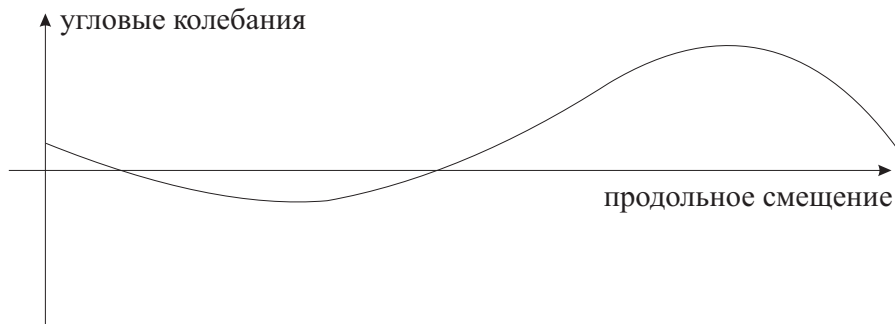


Рис. 10

автоколебаний к их росту (рис. 9). При малом же увеличении продольной длины тела (см. пример 2 выше) следует ждать роста угловых колебаний (рис. 10).

## 12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При изучении рассматриваемой модели найдены достаточные условия асимптотической устойчивости одного из ключевых режимов — прямолинейного поступательного торможения. В применение к однородным круговым цилиндрам выписаны конкретные оценки на их инерционно-массовые характеристики, при этом учитываются результаты приведенных ранее экспериментов, в том числе по получению безразмерных параметров воздействия воды на них.

В работе также показано, что при некоторых условиях на старшие производные функций воздействия среды (плеча силы воздействия и коэффициента сопротивления) возможно присутствие в системе либо устойчивого, либо неустойчивого автоколебательных режимов движения. При этом непреодолимой сложностью является измерение старших производных данных функций воздействия среды, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и знаки старших производных даже в отдельных точках таких функций нам неизвестны.

В процессе применения разработанной ранее методики исследования диссипативных динамических систем определенного вида, возникающих в задаче о свободном торможении, получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре квазискоростей, состоящее из бесконечного множества топологически неэквивалентных портретов, вырожденным образом меняющих свой топологический тип при изменении параметров системы. Полученное семейство обладает или устойчивым, или неустойчивым автоколебательным режимами в конечном диапазоне углов атаки. Область физических параметров при этом является множеством конечной меры во всем бесконечномерном пространстве параметров системы, так что полученные портреты являются типичными.

Полученные результаты позволяют сконструировать полые круговые цилиндры — «гильзы», использование которых может обеспечить необходимую устойчивость при проведении дополнительных натуральных экспериментов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бивин Ю. К. Изменение направления движения твердого тела на границе раздела сред// Изв. АН СССР. — МТТ. — 1981. — № 4. — С. 105–109.
2. Бивин Ю. К., Викторов В. В., Степанов Л. П. Исследование движения твердого тела в глинистой среде// Изв. АН СССР. — МТТ. — 1978. — № 2. — С. 159–165.
3. Бивин Ю. К., Глухов Ю. М., Пермяков Ю. В. Вертикальный вход твердых тел в воду// Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1985. — № 6. — С. 3–9.
4. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969. — 349 с.
5. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988. — 320 с.
6. Вышкварко Ю. Г., Шамолин М. В. Некоторые вопросы качественной теории в динамике твердого тела// Материалы Всерос. конф., посвящ. 110-летию матем. ф-та МПГУ "Математика, информатика и методика их преподавания М., 14–16 марта 2011 г. — М.: МПГУ, 2011. — С. 40–41.
7. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В., Трофимов В. В.// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — 23. — С. 5–15.
8. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979. — 322 с.
9. Ерошин В. А. Рикошет пластинки от поверхности идеальной несжимаемой жидкости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1970. — № 6. — С. 99–104.
10. Ерошин В. А. Погружение диска в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности// Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1983. — № 2. — С. 142–144.
11. Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л. Экспериментальное определение давления на диске при погружении в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности// Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1988. — № 2. — С. 21–25.
12. Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л. Экспериментальное определение момента гидродинамических сил при несимметричном проникании диска в сжимаемую жидкость// Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1990. — № 5. — С. 88–94.
13. Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде// Сб. научн.-метод. статей по теоретич. механ. Вып. 18. — М.: Наука, 1987. — С. 75–78.
14. Ерошин В. А., Романенков Н. И., Серебряков И. В., Якимов Ю. Л. Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости// Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1980. — № 6. — С. 44–51.
15. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. О движении тела в среде при струйном обтекании// Тез. всесоюзной конференции по устойчивости движения, колебаниям механических систем и аэродинамике. М., 2–4 февр., 1988. — М.: МАИ, 1988. — С. 21. — Деп. в ВИНТИ 22.12.88, № 8886–В–88.
16. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании. Тез. докл. Чебышевских чтений// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1995. — № 6. — С. 17.
17. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Известия РАН. — МЖГ. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
18. Жуковский Н. Е. О падении легких, продолговатых тел, вращающихся вокруг своей продольной оси/ П.с.с. — 5. — М.: Физматгиз, 1937. — С. 72–80, 100–115.
19. Жуковский Н. Е. О парении птиц/ П.с.с. — 5. — М.: Физматгиз, 1937. — С. 49–59.
20. Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947. — 928 с.
21. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986. — 86 с.
22. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1992. — 76 с.
23. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.–Л.: ОГИЗ, 1947.

24. Самсонов В. А., Ерошин В. А., Константинов Г. А., Макаришин В. М. Две модельные задачи о движении тела в среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3427. — М., 1987. — 27 с.
25. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
26. Самсонов В. А., Шамолин М. В. О движении тела в сопротивляющейся среде // Современные проблемы механики и технологии машиностроения. Всес. конф. (16–18 апреля 1989 г.). Тез. докл. — М.: ВИНТИ. — 1989. — С. 128–129.
27. Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3969. — М., 1990. — 80 с.
28. Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием // Нелинейные колебания механических систем. Тез. докл. II Всес. конф. (сентябрь 1990 г.), ч. 2. — Горький. — 1990. — С. 95–96.
29. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4141. — М., 1991. — 48 с.
30. Самсонов В. А., Шамолин М. В., Ерошин В. А., Макаришин В. М. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4396. — М., 1995. — 41 с.
31. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — 1. — М.: Наука, 1983. — 528 с.; 2. — М.: Наука, 1984. — 560 с.
32. Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев В. В., Королев Г. Л. Асимптотическая теория отрывных течений. — М.: Наука, 1987. — 256 с.
33. Табачников В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. Вып. 1621. — М., 1974. — С. 18–24.
34. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
35. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости / В кн. Полн. собр. соч. — 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
36. Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976. — 495 с.
37. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1992. — № 1. — С. 52–58.
38. Шамолин М. В. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. матем. и механ. — 1993. — 57, № 4. — С. 40–49.
39. Шамолин М. В. Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Доклады РАН. — 1994. — 337, № 5. — С. 611–614.
40. Шамолин М. В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1996. — № 4. — С. 57–69.
41. Шамолин М. В. Введение в пространственную динамику движения твердого тела в сопротивляющейся среде // Материалы межд. конф. и Чебышевских чтений, посвящ. 175-летию со дня рожд. П.Л. Чебышева (Москва, 14–19 мая 1996 г.). — 2. — М.: МГУ. — С. 371–373.
42. Шамолин М. В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН, 1996. — 349, № 2. С. 193–197.
43. Шамолин М. В. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Известия РАН. МТТ. — 1996. — № 2. — С. 55–63.
44. Шамолин М. В. Математическое моделирование динамики пространственного маятника, обтекаемого средой // Тр. VII Межд. Симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики 26–29 июня 1997 г., Феодосия. — Херсон: Изд-во ХГТУ. — 1997. — С. 153–154.
45. Шамолин М. В. Пространственная динамика твердого тела, взаимодействующего со средой // Сем. по мех. систем и пробл. управления движ. и навиг. Известия РАН. МТТ. — 1997. — № 4. — С. 174.
46. Шамолин М. В. Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. — 1998. — № 6. — С. 29–37.
47. Шамолин М. В. Некоторые классы частных решений в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. — 1999. — № 2. — С. 178–189.

48. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Доклады РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
49. *Шамолин М. В.* Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Доклады РАН. — 2000. — 371, № 4. — С. 480–483.
50. *Шамолин М. В.* Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой// Прикл. механика. — 2004. — 40, № 4. — С. 137–144.
51. *Шамолин М. В.* К задаче о пространственном торможении твердого тела в сопротивляющейся среде// Известия РАН. МТТ. — 2006. — № 3. — С. 45–57.
52. *Шамолин М. В.* Модельная задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4818. — М., 2006. — 44 с.
53. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Изд-во «Экзамен», 2007. — 352 с.
54. *Шамолин М. В.* Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии его со средой// Прикл. механика. — 2007. — 43, № 10. — С. 49–67.
55. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фунд. и прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
56. *Шамолин М. В.* Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Доклады РАН, 2008. — 418, № 1. С. 46–51.
57. *Шамолин М. В.* Об устойчивости прямолинейного поступательного движения// Прикл. механика. — 2009. — 45, № 6. — С. 125–140.
58. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 5052. — М.: Ин-т механики МГУ, 2010. — 66 с.
59. *Шамолин М. В.* Пространственное движение твердого тела в среде с сопротивлением// Прикл. механика. — 2010. — 46, № 7. — С. 120–133.
60. *Шамолин М. В.* Движение твердого тела в сопротивляющейся среде// Матем. моделирование. — 2011. — 23, № 12. — С. 79–104.
61. *Шамолин М. В.* Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2011. — № 3. — С. 24–30.
62. *Шамолин М. В.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости// Матем. моделирование. — 2012. — 24, № 10. — С. 109–132.
63. *Шамолин М. В., Цытцын С. В.* Аналитическое и численное исследование траекторий движения тела в сопротивляющейся среде. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4289. — М., 1993. — 43 с.
64. *Prandtl L., Betz A.* Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Gottingen. — Berlin, 1932. — 148 с.
65. *Shamolin M. V.* Some Classical Problems in a Three Dimensional Dynamics of a Rigid Body Interacting with a Medium// Proc. of ICTACEM'98, Kharagpur, India, Dec.1–5, 1998; Aerospace Engineering Dep., Indian Inst. of Technology. — Kharagpur, India, 1998. — 11 с. (CD–Rome, Printed at: Printek Point, Technology Market, KGP–2).
66. *Shamolin M. V.* Mathematical modelling of interaction of a rigid body with a medium and new cases of integrability, In: CD–Proc. of ECCOMAS 2000, Barcelona, Spaine, 11–14 Septembero — Barcelona, 2000. — 11 с.

М. В. Шамолин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия,

Институт механики, Москва, Россия

E-mail: shamolin@imec.msu.ru