

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ СРЕДЫ НА ТЕЛО КОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

© 2015 г. А. В. АНДРЕЕВ, М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Рассматривается математическая модель плоскопараллельного воздействия среды на твердое тело, частью участка внешней поверхности которого является круговой конус. Приводится полная система уравнений движения в условиях квазистационарности. Динамическая часть уравнений движения образует независимую систему, в которой выделяется независимая подсистема второго порядка на двумерном цилиндре. Получено бесконечное семейство фазовых портретов на фазовом цилиндре квазискоростей, соответствующее наличию в системе лишь неконсервативной пары сил.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоскопараллельное движение однородного твердого тела массы m , имеющего конусообразную переднюю часть, взаимодействующую с потоком среды в условиях, например, струйного или отрывного обтекания (рис. 1). Координата y_N точки N приложения силы воздействия среды определяется, для простоты, лишь одним параметром — углом атаки α , измеряемым между вектором скорости точки D и осью симметрии Dx :

$$y_N = R(\alpha). \quad (1)$$

Силы лобового и бокового сопротивления (рис. 1) будем представлять в квадратичном виде по скорости точки D :

$$\mathbf{S}_x = -s(\alpha)v^2\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{S}_y = -b(\alpha)v^2\mathbf{e}_y, \quad |\mathbf{v}_D| = v. \quad (2)$$

Таким образом, тройка функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$, $b(\alpha)$ определяет воздействие среды на твердое тело в условиях квазистационарности [1, 2, 8–10]. В данном случае конусообразная конструкция поверхности тела и гипотеза о квазистатическом воздействии среды позволили сформулировать полную схему сил, в которую входят все характеристики. При этом в дальнейшем полный нелинейный анализ построенных систем проводится, вообще говоря, как ранее известными методами качественной теории, так и новыми методами, полученными исключительно для возникающих систем с так называемой переменной диссипацией [15, 16, 19].

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Динамическая часть уравнений движения переписется в следующем виде (I — центральный момент инерции тела, $\sigma = CD$, C — центр масс) при учете условий (1), (2):

$$\dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -\frac{s(\alpha)}{m} v^2, \quad (3)$$

$$\dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha - \Omega v \cos \alpha + \sigma \dot{\Omega} = -\frac{b(\alpha)}{m} v^2, \quad (4)$$

$$I \dot{\Omega} = -F(\alpha)s(\alpha)v^2 + \sigma b(\alpha)v^2 - h\Omega v, \quad (5)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00020-а), а также в рамках реализации государственного задания министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности, проект № 333.

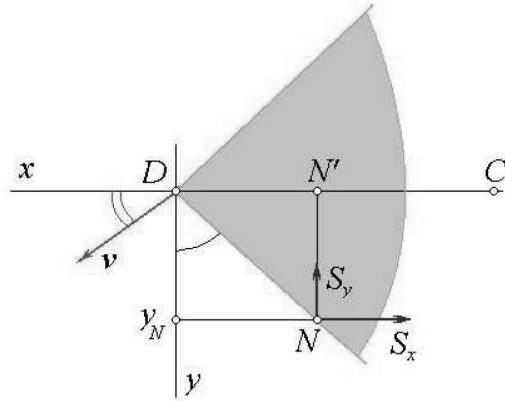


Рис. 1. Воздействие среды на твердое тело

при этом $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$, а коэффициент $h > 0$ характеризует дополнительный момент, зависящий от угловой скорости [3, 4, 13, 21]. Вообще же, введение в таких задачах зависимости силомоментных характеристик от угловой скорости тела априори не очевидно.

Здесь первые два уравнения получены из теоремы о движении центра масс, а третье — из теоремы об изменении кинетического момента в осях Кенига. Подобные системы, но без боковой силы ранее были использованы также в работах [5–7, 20].

Поскольку кинетическая энергия тела и обобщенные силы и моменты, действующие на тело, не зависят от положения тела на плоскости, позиционные координаты в системе являются циклическими. Это позволяет рассматривать систему динамических уравнений (3) (4) (5) в качестве независимой. При этом система кинематических уравнений (здесь переменные φ, x_0, y_0 определяют положение тела на плоскости)

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \dot{x}_0 = v \cos(\alpha - \varphi), \quad \dot{y}_0 = v \sin(\alpha - \varphi),$$

вместе с системой (3) (4) (5) является полной системой для исследования рассматриваемого движения в построенном поле сил.

Для определения вида тройки функций $R(\alpha), s(\alpha), b(\alpha)$ используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания (см. также [7–9]).

Вводимые классы динамических функций достаточно широки: они состоят из функций достаточно гладких, 2π -периодических ($R(\alpha), b(\alpha)$ — нечетные, а $s(\alpha)$ — четная), удовлетворяющих следующим условиям: $R(\alpha), b(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $R'(0), b'(0) > 0, R'(\pi), b'(\pi) < 0$ (классы функций $\{R\}, \{b\}$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0, s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\}$). Как R, b , так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$.

В частности, аналитические функции

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad b(\alpha) = b_1 \sin \alpha, \quad (6)$$

$$s(\alpha) = B \cos \alpha; \quad A, B, b_1 > 0, \quad (7)$$

служат типичными представителями описанных классов, и две из которых (R, s) соответствуют функциям воздействия среды, полученным в одной из своих работ С. А. Чаплыгиным (см. подробнее [15]) при исследовании плоскопараллельного обтекания плоской пластины бесконечной длины однородным потоком среды.

Объясним необходимость широкого выбора классов функций $\{R\}, \{b\}$ и $\{s\}$. Геометрические характеристики конусообразного тела могут быть совершенно различными. Это и позволяет отнести три возникающие динамические функции к определенным классам. Как указано выше, на

эти функциональные классы накладываются достаточно слабые условия, поэтому данные классы достаточно широки. Они заведомо включают допустимые конкретные функции, взятые для каждого мыслимого тела и для каждого мыслимого движения.

Но, конечно, не каждой конкретной тройке динамических функций можно поставить в соответствие мыслимое твердое тело со своим движением. Поэтому исследование данной проблемы для достаточно широких классов динамических функций позволяет говорить об относительно полном рассмотрении задачи о движении тела в среде в рамках данных модельных предположений в условиях квазистационарности.

Таким образом, для исследования обтекания конусообразного тела средой используются классы динамических систем, определенные с помощью тройки динамических функций, что значительно усложняет проведение глобального нелинейного анализа.

В некоторых случаях без ограничения общности [15, 16] будем рассматривать представления (6), (7) для функций $R(\alpha)$, $s(\alpha)$, $b(\alpha)$, определяющих воздействие среды.

3. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Уравнения (3), (4) могут быть приведены к виду

$$\dot{v} + \sigma\Omega^2 \cos \alpha + \sigma\dot{\Omega} \sin \alpha = -\frac{s(\alpha)}{m}v^2 \cos \alpha - \frac{b(\alpha)}{m}v^2 \sin \alpha, \quad (8)$$

$$\dot{\alpha}v - \Omega v + \sigma\dot{\Omega} \cos \alpha - \sigma\Omega^2 \sin \alpha = -\frac{b(\alpha)}{m}v^2 \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m}v^2 \sin \alpha. \quad (9)$$

Вводя далее новое дифференцирование по формуле $\langle \cdot \rangle = d/dt = vd/dq = v\langle' \rangle$, где q — путь, пройденный точкой D , имеем: $\Omega = \omega v$, $\dot{\Omega} = v(\omega'v + \omega v')$. Тогда динамическая часть уравнений движения в нашем случае примет следующий вид:

$$v' = v\Psi_1(\alpha, \omega), \quad (10)$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega) \cos \alpha + \sigma\omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha - \frac{b(\alpha)}{m} \cos \alpha, \quad (11)$$

$$\omega' = -\frac{1}{I}\psi(\alpha, \omega) - \omega\Psi_1(\alpha, \omega), \quad (12)$$

где

$$\psi(\alpha, \omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha) + h\omega,$$

$$\Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega) \sin \alpha - \sigma\omega^2 \cos \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha - \frac{b(\alpha)}{m} \sin \alpha.$$

Вводя далее безразмерные параметры и дифференцирование в виде

$$q = Q\sigma, \quad \bar{\omega} = \omega\sigma, \quad \beta_1 = \frac{\sigma^2 AB}{I}, \quad \beta_2 = \frac{\sigma^3 b_1}{I}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma h}{I}, \quad \beta_4 = \frac{B\sigma}{m}, \quad \beta_5 = \frac{b_1\sigma}{m},$$

опуская при этом черту в дальнейшем над безразмерной переменной $\bar{\omega}$, а также по-прежнему обозначая штрихом производную по безразмерной величине Q , имеем систему (11), (12) в случаях (6), (7) в следующем виде:

$$\alpha' = \omega + \beta_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \beta_2 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_3 \omega \cos \alpha + \omega^2 \sin \alpha + \beta_4 \sin \alpha \cos \alpha - \beta_5 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (13)$$

$$\omega' = -\beta_1 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_2 \sin \alpha - \beta_3 \omega + \omega^3 \cos \alpha - \beta_1 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ + \beta_2 \omega^2 \sin \alpha - \beta_3 \omega^2 \sin \alpha + \beta_4 \omega \cos^2 \alpha + \beta_5 \omega \sin^2 \alpha. \quad (14)$$

При этом безразмерные параметры β_k , $k = 1, \dots, 5$, естественно являются:

β_1 — параметром момента силы лобового сопротивления;

β_2 — параметром момента боковой силы;

β_3 — параметром дополнительного демпфирующего момента;

β_4 — параметром силы лобового сопротивления;

β_5 — параметром момента боковой силы.

Имеем, таким образом, пятипараметрическое семейство систем (13), (14) на двумерном фазовом цилиндре

$$\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2 : \alpha \bmod 2\pi\}.$$

4. РЕЖИМ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ТОРМОЖЕНИЯ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

Среди всех возможных движений тела имеется ключевой режим — режим прямолинейного поступательного торможения: тело движется поступательно с нулевым углом атаки, при этом скорости всех точек тела убывают со временем (см. также [13]). Ключевой режим соответствует тривиальному решению системы (13), (14).

Под устойчивостью ключевого режима будем понимать устойчивость угловых колебаний тела относительно его продольной оси по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости. При этом, с точки зрения теории устойчивости, исследуемая устойчивость понимается по части упомянутых переменных.

Исследуем его устойчивость, а именно, линеаризуем систему (13), (14) в начале координат. Получим:

$$\alpha' = \omega + \beta_1\alpha - \beta_2\alpha + \beta_3\omega + \beta_4\alpha - \beta_5\alpha, \quad (15)$$

$$\omega' = -\beta_1\alpha + \beta_2\alpha - \beta_3\omega + \beta_4\omega. \quad (16)$$

Матрица данной системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 - \beta_2 + \beta_4 - \beta_5 & 1 + \beta_3 \\ -\beta_1 + \beta_2 & -\beta_3 + \beta_4 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

что приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = 0, \quad (18)$$

где

$$\operatorname{tr} A = \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + 2\beta_4 - \beta_5. \quad (19)$$

Понятно, что условия

$$\operatorname{tr} A < 0, \quad \det A > 0$$

обеспечивают асимптотическую устойчивость тривиальному решению системы (13), (14).

Из равенства (19) видно, что присутствие в системе силы лобового сопротивления (и ее момента) делает прямолинейное поступательное торможение более неустойчивым. Другими словами, увеличение коэффициентов β_1 и β_4 увеличивает величину $\operatorname{tr} A$. Обратное, присутствие в системе силы бокового сопротивления (и ее момента), а также дополнительного демпфирующего момента делает прямолинейное поступательное торможение более устойчивым. Другими словами, увеличение коэффициентов β_2, β_3 и β_5 уменьшает величину $\operatorname{tr} A$.

5. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ

Рассмотрим случай наличия двух пар сил, а именно, предположим, что выполнены следующие условия:

$$\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0. \quad (20)$$

При этом система (13), (14) примет вид

$$\alpha' = \omega + \omega^2 \sin \alpha + \beta_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \beta_2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (21)$$

$$\omega' = -\beta_1 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_2 \sin \alpha + \omega^3 \cos \alpha - \beta_1 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \beta_2 \omega^2 \sin \alpha. \quad (22)$$

Таким образом, в системе присутствуют две пары сил: пара силы лобового сопротивления и пара боковой силы (которые, в принципе, можно сложить).

Тогда система (21), (22) обладает двухпараметрическим семейством фазовых портретов (рис. 2–7, замена $\Omega \leftrightarrow \omega$). Полученное семейство отличается от ранее полученных [11, 12, 14, 17, 18].

6. О ВОЗМОЖНОМ ДОСТИЖЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ КЛЮЧЕВОГО РЕЖИМА

При выполнении условия (20) характеристическое уравнение (18) примет вид

$$\lambda^2 + (\beta_2 - \beta_1)\lambda + \beta_1 - \beta_2 = 0, \quad (23)$$

указывающий на то, что в данной области параметров желаемой устойчивости достигнуть не удастся. Так, например, при

$$\beta_1 < \beta_2 \quad (24)$$

тривиальное решение системы имеет неустойчивость, соответствующую седловидной точке, а значит, выбором соответствующих начальных условий можно достигнуть условной устойчивости. Действительно, можно попытаться выбрать начальные условия вблизи устойчивых сепаратрис возле начала координат, подсчитав при этом в линейном приближении собственные направления.

Другой тип неустойчивости будет иметь тривиальное решение системы при условии

$$\beta_1 > \beta_2. \quad (25)$$

Начало координат при этом является отталкивающей особой точкой, и никакой выбор начальных условий не приведет к достижению устойчивости.

При этом семейства портретов, полученные ранее [17,18], имеют дело со случаем, когда в принципе можно достигнуть асимптотической устойчивости начала координат. Семейство же портретов, полученное в данной работе, имеет дело со случаем условной устойчивости, достигнуть которую, в принципе, оказывается возможным соответствующим выбором начальных условий.

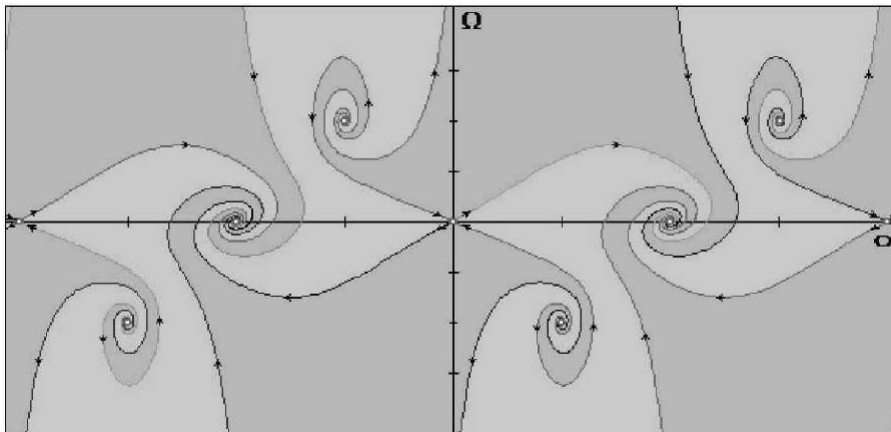


Рис. 2

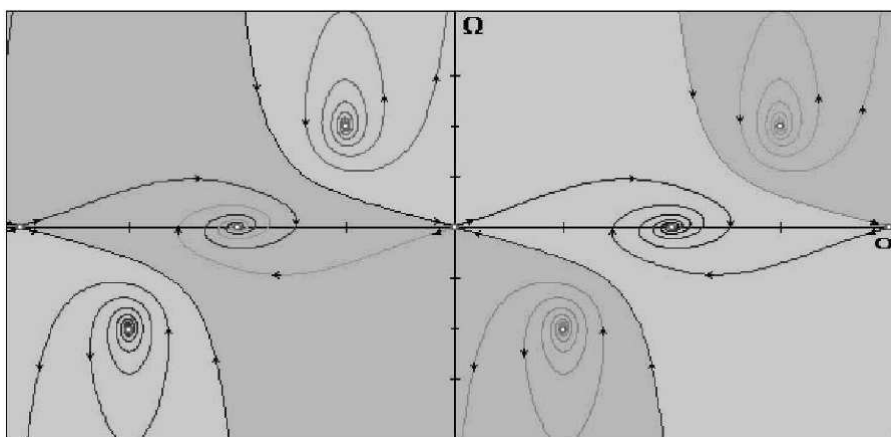


Рис. 3

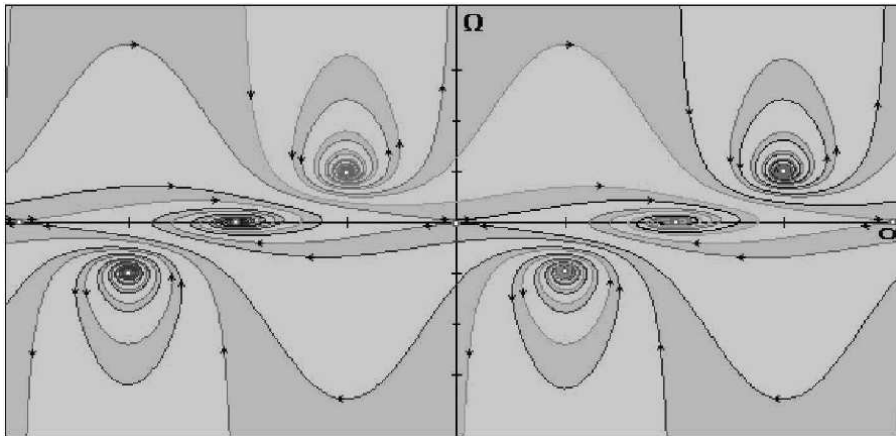


Рис. 4

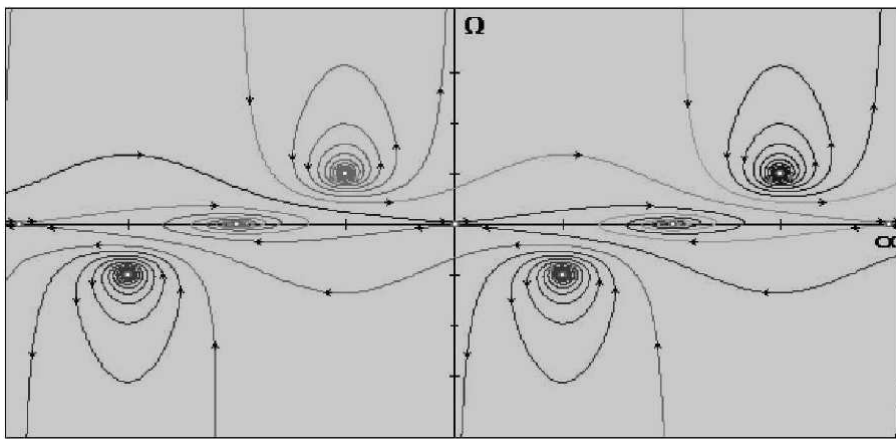


Рис. 5

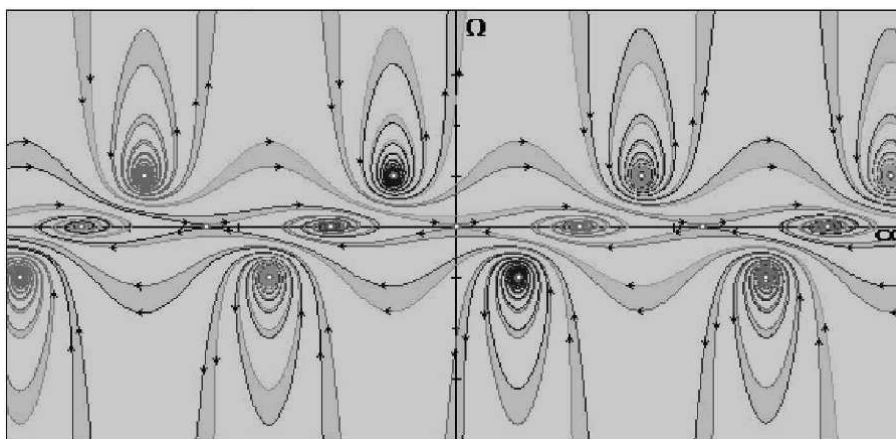


Рис. 6

Так на рис. 2–6 показаны случаи, соответствующие выполнению неравенства (24) (начало координат — седло), а на рис. 7 показан случай, соответствующий выполнению неравенства (25) (начало координат — отталкивающая точка).

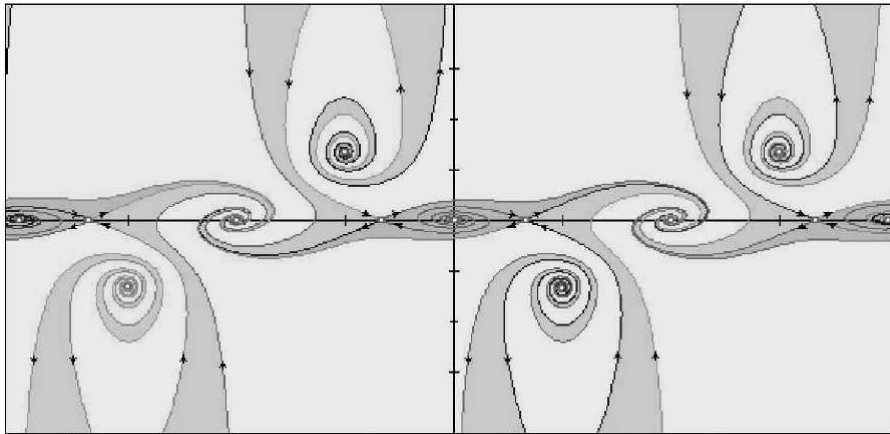


Рис. 7

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ерошин В. А.* Рикошет пластинки от поверхности идеальной несжимаемой жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1970. — № 6. — С. 99–104.
2. *Ерошин В. А.* Погружение диска в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1983. — № 2. — С. 142–144.
3. *Ерошин В. А.* Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН. — МЖГ. — 1992. — № 5. — С. 20–30.
4. *Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л.* Экспериментальное определение давления на диске при погружении в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1988. — № 2. — С. 21–25.
5. *Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л.* Экспериментальное определение момента гидродинамических сил при несимметричном проникании диска в сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1990. — № 5. — С. 88–94.
6. *Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Сб. науч.-метод. статей по теоретич. механ. Вып. 18. — М.: Наука, 1987. — С. 75–78.
7. *Ерошин В. А., Романенков Н. И., Серебряков И. В., Якимов Ю. Л.* Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1980. — № 6. — С. 44–51.
8. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* О движении тела в среде при струйном обтекании // Тез. всесоюзной конференции по устойчивости движения, колебаниям механических систем и аэродинамике. М., 2–4 февр., 1988. — М.: МАИ, 1988. — С. 21. — Деп. в ВИНТИ 22.12.88, № 8886–В–88.
9. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Математическое моделирование в задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании. Тез. докл. Чебышевских чтений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1995. — № 6. — С. 17.
10. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Известия РАН. — МЖГ. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
11. *Шамолин М. В.* Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Доклады РАН. — 1994. — 337, № 5. — С. 611–614.
12. *Шамолин М. В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН, 1996. — 349, № 2. — С. 193–197.
13. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1996 — № 4. — С. 57–69.
14. *Шамолин М. В.* Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. — 1998. — № 6. — С. 29–37.

15. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007. — 352 с.
16. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фунд. и прикл. мат. — 2008. — 14, Вып. 3. — С. 3–237.
17. *Шамолин М. В.* Трехпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Доклады РАН. — 2008. — 418, № 1. — С. 46–51.
18. *Шамолин М. В.* Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2011. — № 3. — С. 24–30.
19. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Итоги науки и техники. Сер. "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры т. 125, "Динамические системы". — 2013. — С. 3–251.
20. *Shamolin M. V.* New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium// Journal of Mathematical Sciences. — 2003. — 114, № 1. — С. 919–975.
21. *Shamolin S. V.*, New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium// PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.). — 2009. — 9. — С. 139–140.

А. В. Андреев

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

М. В. Шамолин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия,

Институт механики, Москва, Россия

E-mail: shamolin@imec.msu.ru