ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2015, том 464, № 6, с. 688–692

МЕХАНИКА

УДК 531.01+531.552

ПОЛНЫЙ СПИСОК ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

© 2015 г. М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 16.02.2015 г.

Поступило 17.02.2015 г.

Исследуется динамическая часть уравнений движения динамически симметричного многомерного твердого тела в неконсервативном силовом поле при наличии следящей силы в случае, когда на тело действует пара сил. При этом в системе присутствует дополнительное линейное демпфирование. Найден новый случай полной интегрируемости в трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функциях, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

DOI: 10.7868/S0869565215300118

Построение неконсервативного силового поля, действующего на многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных твердых тел, находящихся в поле силы сопротивления среды. Становятся возможными обобщение динамической части уравнений на случай движения тела многомерного в аналогично построенном поле сил и получение полного списка, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны из-за присутствия в системе именно неконсервативного поля сил, поскольку ранее другими авторами использовалось поле сил лишь потенциальное (см., например, [1–3]).

Интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы и линейного демпфирования, когда был найден в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле комплексного анализа) функцией квазискоростей, была показана в [4]. В данном случае все взаимодействие среды с телом сосредоточено на части его поверхности, имеющей форму (одномерной) пластины. Затем [5, 6] задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений был найден в явном виде полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже все взаимодействие среды с телом сосредоточено на части его поверхности, имеющей форму плоского (двумерного) диска. В дальнейшем [7–9] была исследована динамическая часть уравнений движения четырехмерного твердого тела различных видов динамической симметрии, где неконсервативное силовое поле сосредоточено на части его поверхности, имеющей форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску.

В работе показана интегрируемость в элементарных функциях динамической части уравнений движения динамически симметричного многомерного твердого тела под действием неконсервативной пары сил при наличии линейного демпфирующего момента.

1. УРАВНЕНИЯ НА АЛГЕБРЕ Ли so(n)

Рассмотрим движение однородного твердого тела массы m, частью внешней поверхности которого является $(n-1)$-мерный диск, находящийся в некотором неконсервативном поле силы $\mathbf{S}$, приложенной в точке N диска, с динамической симметрией следующего вида:

$$I_1,\ I_2 = \ldots = I_n. \tag{1}$$

Здесь $I_1, \ldots, I_n$ – главные моменты инерции тела в некоторой связанной с ним системе координат $Dx_1 \ldots x_n$, при этом $CD = Dx_1$ (C – центр масс, D – центр диска), а оси $Dx_2, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска. Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ – (обобщенные) сферические координаты вектора скорости $\mathbf{v}_D$ центра D диска такие, что α – угол между вектором $\mathbf{v}_D$ и прямой Dx_1.

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru

Пусть $\mathbf{S} = \{-S, ..., 0\}$ в системе $Dx_1 \ldots x_n$, при этом $S = s_1(\alpha)v^2$, $v = |\mathbf{v}_D|$, $s_1 \geq 0$, $s_1(\alpha) = s(\alpha)\operatorname{sgn}\cos\alpha$. Если Ω – тензор угловой скорости твердого тела, $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, размерность которой равна $n(n-1)/2$, имеет следующий вид [5, 10]:

$$\Omega^{\bullet}\Lambda + \Lambda\Omega^{\bullet} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \qquad (2)$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + \ldots + I_n)/2, \ldots$, $\lambda_n = (I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n)/2$, M – момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроектированный на "естественные" координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, $[\ldots]$ – коммутатор в $\mathrm{so}(n)$. Так, например, элемент $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ при $n = 5$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_{10}$ – компоненты "угловой скорости" в проекциях на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$.

Если $N = (0, x_{2N}, \ldots, x_{nN})$ в системе $Dx_1 \ldots x_n$, то при вычислении момента силы $\mathbf{S}$ строится отображение

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathrm{so}(n), \qquad (3)$$

переводящее пару векторов из $\mathbf{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$. Так, например, при $n = 5$ в проекциях на алгебру Ли $\mathrm{so}(5)$ момент силы сопротивления имеет следующий вид (ср. с [5, 10]):

$$(0, 0, 0, -x_{5N}s(\alpha)v^2, 0, 0, x_{4N}s(\alpha)v^2, 0,$$
$$-x_{3N}s(\alpha)v^2, x_{2N}s(\alpha)v^2) \in \mathbf{R}^{10} \cong M \in \mathrm{so}(5),$$

при этом в общем случае элемент M будет иметь $(n-1)(n-2)/2$ нулевых компонент, поскольку вспомогательная матрица для построения отображения (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

и именно $(n-1)(n-2)/2$ ее миноров второго порядка со знаком, определяющих элемент M, тождественно равны нулю.

Уравнение (2) можно переписать в виде системы $n(n-1)/2$ уравнений. Так, в частности, при $n = 5$ система на алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$ примет вид

$$\begin{gathered}
(\lambda_4 + \lambda_5)\omega_1^{\bullet} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_4\omega_7 + \omega_3\omega_6 + \omega_2\omega_5) = 0, \\
(\lambda_3 + \lambda_5)\omega_2^{\bullet} + (\lambda_5 - \lambda_3)(\omega_1\omega_5 - \omega_3\omega_8 - \omega_4\omega_9) = 0, \\
(\lambda_2 + \lambda_5)\omega_3^{\bullet} + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_4\omega_{10} - \omega_2\omega_8 - \omega_1\omega_6) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_5)\omega_4^{\bullet} + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_3\omega_{10} + \omega_2\omega_9 + \omega_1\omega_7) = -x_{5N}S, \\
(\lambda_3 + \lambda_4)\omega_5^{\bullet} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_7\omega_9 + \omega_6\omega_8 + \omega_1\omega_2) = 0, \\
(\lambda_2 + \lambda_4)\omega_6^{\bullet} + (\lambda_4 - \lambda_2)(\omega_5\omega_8 - \omega_7\omega_{10} - \omega_1\omega_3) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_4)\omega_7^{\bullet} + (\lambda_1 - \lambda_4)(\omega_1\omega_4 - \omega_6\omega_{10} - \omega_5\omega_9) = x_{4N}S, \\
(\lambda_2 + \lambda_3)\omega_8^{\bullet} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_9\omega_{10} + \omega_5\omega_6 + \omega_2\omega_3) = 0, \\
(\lambda_1 + \lambda_3)\omega_9^{\bullet} + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) = -x_{3N}S, \\
(\lambda_1 + \lambda_2)\omega_{10}^{\bullet} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_8\omega_9 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) = x_{2N}S.
\end{gathered} \qquad (4)$$

2. ДИНАМИКА В $\mathbf{R}^n$ И ОТДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

По аналогии с трехмерным случаем справедливы формулы, аналогичные формулам Эйлера и Ривальса, а именно, скорости и ускорения любых двух точек A и B многомерного твердого тела в любой декартовой системе координат связаны соотношениями

$$v_B = v_A + \Omega AB, \quad w_B = w_A + \Omega^2 AB + \mathrm{E}AB, \qquad (5)$$

где $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, $\mathrm{E} = \Omega^{\bullet} \in \mathrm{so}(n)$. Тензор E называется тензором углового ускорения.

Таким образом, уравнение движения центра масс в $\mathbf{R}^n$ запишется при помощи (5) через уравнение Ньютона:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}. \qquad (6)$$

Если правые части уравнений (2), (6) зависят лишь от квазискоростей (т.е. от величин $v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$ и компонент тензора $\Omega \in \mathrm{so}(n)$), то эти уравнения определяют замкнутую динамическую часть системы уравнений движения многомерного твердого тела на $\mathrm{so}(n) \times \mathbf{R}^n$, которая имеет порядок $n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2$.

3. ДВИЖЕНИЕ В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ И ЦИКЛИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим такой класс движений тела, при котором центр масс C движется прямолинейно и равномерно, т.е. выполнено условие (см. также [5, 6])

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{const}. \qquad (7)$$

Для достижения этого предположим, что по прямой $CD = Dx_1$ на тело действует некоторая следящая сила $\mathbf{T} = -\mathbf{S}$, обеспечивающая выполнение условия (7) (ср. с маломерными случаями [5, 6]). Тем самым на тело действует пара сил, и выполнение условия (7) может быть достигнуто.

Поскольку выполнены равенства (1), то существуют $(n-1)(n-2)/2$ циклических первых интегралов у уравнения (2):

$$\omega_{k_1} = \omega_{k_1}^0, \ldots, \omega_{k_s} = \omega_{k_s}^0, \tag{8}$$

где $s = (n-1)(n-2)/2$. При этом $k_1 = 1, \ldots, k_s$ – некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$. Рассмотрим набор (8) первых интегралов на своих нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = 0, \ldots, \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{9}$$

В частности, при $n = 5$ у системы (4) имеются шесть таких первых интегралов: $\omega_1 = \omega_1^0$, $\omega_2 = \omega_2^0$, $\omega_3 = \omega_3^0$, $\omega_5 = \omega_5^0$, $\omega_6 = \omega_6^0$, $\omega_8 = \omega_8^0$, рассматриваемых на нулевых уровнях: $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0$. Ненулевых компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = n(n-1)/2 - (n-1)(n-2)/2 = n-1$ штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ – оставшиеся p чисел из множества W, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

При выполнении условий (7)–(9) порядок общей системы (2), (6) опускается до $2(n-1)+1$. Если правые части уравнений (2), (6) зависят лишь от квазискоростей системы, то справедлива

Т е о р е м а 1. *Система* (2), (6) *при выполнении условий* (7)–(9) *редуцируется к динамической системе на прямом произведении числового луча* $\mathbf{R}^1 + \{v\}$ *на касательное расслоение* $T_*\mathbf{S}^{n-1}$ $(n-1)$-*мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$.

4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ МОМЕНТ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛЫ

Введем зависимость функций координат точки N приложения силы $\mathbf{S}$ от тензора угловой скорости Ω. Выберем функции $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ в следующем виде (гиперплоскость диска задается уравнением $x_{1N} = 0$):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \cdots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = Q - \frac{1}{v}\Omega \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где Q – функции, не зависящие от тензора угловой скорости, h_1, $h_2 = \ldots = h_n > 0$ (ср. со случаями меньшей размерности [5]). При этом следует учесть, что если $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ – (обобщенные) сферические координаты в $\mathbf{R}^n$, то

$$Q = R(\alpha) i_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),\ i_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = i_v(\pi/2, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),$$

где

$$i_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \cdots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Для построения силового поля используется пара функций $(R(\alpha), s(\alpha))$, информация о которых носит качественный характер. По аналогии с маломерными случаями без ограничения общности [5] можно считать, что

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A > 0, \quad s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad B > 0 \tag{11}$$

(функции типа Чаплыгина [11]).

5. ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

Преобразуем далее набор фазовых переменных $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \\ = T_{n-2,n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \cdots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix},$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\beta,$$

$$m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\beta.$$

Введем следующие безразмерные переменные, параметры и дифференцирование:

$$w_1 = \frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}}, \quad \ldots, \quad w_{n-4} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}},$$

$$w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_{n-2} = \frac{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}}{n_0 v}, \quad w_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{n_0 v},$$

$$n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad b = \sigma n_0, \quad \sigma = CD, \tag{12}$$

$$H_1 = \frac{Bh_2}{(n-2)I_2 n_0}, \quad n_0 v \langle ' \rangle = \langle ^\cdot \rangle.$$

В результате совместные уравнения (2), (6) при условиях (7)–(12) примут следующий вид:

$$
\begin{gathered}
v' = v\cos\alpha[\sin^2\alpha - (w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)] - \\
- bH_1 v w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha,
\end{gathered} \tag{13}
$$

$$
\begin{gathered}
\alpha' = -(1 + bH_1)w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + \\
+ b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha, \\
w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\
+ bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\
- bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - \\
- H_1 w_{n-1}\cos\alpha, \\
w'_{n-2} = (1 + bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\
+ bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\
- bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + \\
+ bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-2}\cos\alpha,
\end{gathered} \tag{14}
$$

$$
\begin{gathered}
w'_k = d_k\frac{1 + w_k^2}{w_k}\frac{\cos\beta_k}{\sin\beta_k}, \\
\beta'_k = d_k, \quad k = 1, \ldots, n-3,
\end{gathered} \tag{15}
$$

$$
\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}(1 + bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1.\ldots.\sin\beta_{n-3}}, \tag{16}
$$

где $Z_1(w_1, \ldots, w_{n-1}) = z_1$ в силу замены (12), d_k, $k = 1, \ldots, n-3$, — некоторые гладкие функции на своей области определения.

Видно, что в системе (13)–(16) порядка $2(n-1) + 1$ выделяется независимая подсистема (14)–(16) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. При этом сама система (14)–(16) распадается на совокупность независимых подсистем: система (14) — третьего порядка, системы (15) (их $n - 3$ штуки, после замены независимого переменного) — второго, при этом, в свою очередь, система (14), (15) — независимая подсистема порядка $2n - 3$ (уравнение (16) на угол β_{n-2} отделяется).

Для полного интегрирования системы (13)–(16) порядка $2(n-1) + 1$ достаточно знать, вообще говоря, $2(n-1)$ независимых первых интегралов. Но после введения новых переменных и дифференцирования (12), в силу имеющихся симметрий, для интегрирования системы (13)–(16) достаточно знать два независимых первых интеграла системы (14), $n - 3$ независимых первых интеграла совокупности систем (15), а также два инвариантных соотношения, "привязывающих" уравнения (13) и (16) (т.е. всего $n + 1$).

6. ПОЛНЫЙ СПИСОК ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Полная система (13)–(16) является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [12]. Тем не менее она обладает аналитическим первым интегралом вида

$$
v^2(1 - 2bw_{n-1}\sin\alpha + (w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)) = V_C^2, \tag{17}
$$

поскольку выполнено свойство (7). При этом первый интеграл (17) позволяет определить величину v.

Система (14) обладает двумя независимыми первыми интегралами, которые являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных (в смысле определений комплексного анализа) и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Один из трансцендентных первых интегралов системы (14) имеет вид рациональной однородной функции по группе переменных w_1, w_2, $\sin\alpha$:

$$
\begin{gathered}
\frac{(1 + bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b + H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = \\
= C_1 = \mathrm{const}.
\end{gathered} \tag{18}
$$

Второй трансцендентный интеграл системы (14) достаточно громоздко выражается через конечную комбинацию элементарных функций и имеет следующий структурный вид:

$$
G\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{19}
$$

Далее, распавшаяся система (15) имеет $n - 3$ независимых первых интеграла

$$
\frac{\sqrt{1 + w_k^2}}{\sin\beta_k} = C_{k+2} = \mathrm{const}, \quad k = 1, \ldots, n-3, \tag{20}
$$

а первый интеграл, "привязывающий" уравнение (16) на угол β_{n-2}, найдется из уравнения

$$
\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{1}{w_{n-3}\sin\beta_{n-3}},
$$

при этом, используя первые интегралы (20) при $k = n - 3$, $n - 4$, окончательно получим его вид:

$$
\mathrm{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} \pm \beta_{n-2} = C_n = \mathrm{const}. \tag{21}
$$

7. Теорема 2 (основная). *Динамическая часть* (2), (6) *уравнений движения n-мерного твердого тела при условиях* (1), (7)–(11) *обладает полным списком первых интегралов,* $(n-1)(n-2)/2 + 1$ *из которых* ((8), (17)) *являются аналитическими функциями, а остальные n* ((18)–(21)) — *трансцендентными функциями своих переменных (после их формального продолжения в комплексную область), выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работах автора [13, 14] уже рассматривались задачи о движении многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил при наличии следящей силы. Данное сообщение продолжает цикл работ по интегрированию многомерного твердого тела в неконсервативном поле, поскольку ранее, как уже указывалось (см., например, [1–3]), рассматривались лишь движения многомерного тела в потенциальном поле сил.

Более того, на основании данной работы можно заключить, что три следующие задачи динамики многомерного твердого тела в неконсервативном поле в некотором смысле эквивалентны: свободное тело при наличии неинтегрируемой связи [13]; закрепленный маятник в потоке среды [14]; свободное тело под действием пары сил.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12–01–00020-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Манаков С.В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функцион. анализ и его прил. 1976. Т. 10. № 4. С. 93–94.
2. *Веселов А.П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на so(4) // ДАН. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298–1300.
3. *Богоявленский О.И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105–1108.
4. *Шамолин М.В.* Моделирование движения твердого тела в сопротивляющейся среде и аналогии с вихревыми дорожками // Мат. моделирование. 2015. Т. 27. № 1. С. 33–53.
5. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил. В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2013. Т. 125. С. 5–254.
6. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в пространственной динамике твердого тела в неконсервативном поле сил. Тр. семинара им. И.Г. Петровского. В. 30. М.: Изд-во МГУ, 2014. С. 287–350.
7. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // ДАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 187–190.
8. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // ДАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
9. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // ДАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.
10. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448 с.
11. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости. В кн.: Полное собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–135.
12. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14. № 3. С. 3–237.
13. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // ДАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 542–545.
14. *Шамолин М.В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле // ДАН. 2015. Т. 460. № 2. С. 165–169.